

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

РЕДАКЦИЯ:

А. Ю. Шлинский (главный редактор), В. В. Новожилов (зам. главного редактора), Э. П. Григोलюк (отв. секретарь редколлегии), П. П. Артоболевский, Н. Х. Арутюнян, В. П. Бармин, А. Л. Гольденвейзер, Ф. М. Диментберг, А. А. Ильюшин, Л. М. Качанов, В. И. Кузнецов, А. И. Лурье, И. М. Рабинович, С. В. Серенсен, В. В. Соколовский, Т. М. Энесев



Москва, А-40, Ленинградский проспект, д. 7. Тел. Д 1-97-64

ИНЖЕНЕРНЫЙ ЖУРНАЛ

МЕХАНИКА

ТВЕРДОГО ТЕЛА

1967

СЕНТЯБРЬ – ОКТЯБРЬ

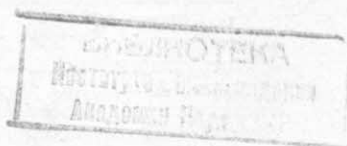
№ 5

(Журнал основан в 1966 г. Выходит 6 раз в год. Москва)

РЕДКОЛЛЕГИЯ

А. Ю. Ишлинский (главный редактор), В. В. Новожилов (зам. главного редактора), Э. И. Григолоук (отв. секретарь редколлегии), И. П. Артоболевский, Н. Х. Арутюнян, В. П. Бармин, А. Л. Гольденвейзер, Ф. М. Диментберг, А. А. Пльюшин, Л. М. Качанов, В. П. Кузнецов, А. П. Лурье, И. М. Рабинович, С. В. Серенсен, В. В. Соколовский, Т. М. Энеев

ПЗЧЧ



СОДЕРЖАНИЕ

К пятидесятилетию советской механики	3
И. И. Блехман, Л. А. Ладыженский, В. И. Поляков, И. А. Попова, К. Ш. Ходжаев (Ленинград, Рига). Колебания резонансных многоприводных вибрационных устройств	6 ✓
В. С. Бояринов (Горький). О расчете вибрации вала, вращающегося в шарикоподшипниках	19 ✓
Р. М. Ларин (Ленинград). Задача оптимизации в случае неоднородно заданного ограничения на управление	27
Л. И. Слепян (Новосибирск). Волна деформаций в стержне с амортизированными массами	34 ✓
В. П. Василенко, В. Н. Кошляков, М. А. Шиф (Киев, Москва). К теории корректируемого гирогоризонткомпыаса	41
В. Г. Климов, М. И. Фейгин (Горький). Влияние ударных взаимодействий на резонансные свойства динамической системы	44 ✓
И. А. Бережной (Куйбышев). О применении функции нагружения в некоторых задачах движения экипажа	47
Э. И. Григолоук, А. Г. Горшков, Ф. Н. Шклярчук (Москва). Прощелкивание цилиндрической панели под действием ударной акустической волны давления	50
Л. П. Балабух, А. Г. Молчанов (Москва). Осесимметричные колебания сферической оболочки, частично заполненной жидкостью	56
В. Л. Бидерман (Москва). Применение метода прогонки для численного решения задач строительной механики	62
Е. С. Гребень (Ленинград). К теории тонких стержней	67
Т. Д. Шермергор (Москва). Реологические характеристики упруговязких материалов, обладающих асимметричным релаксационным спектром	73 ✓
А. Я. Александров, В. С. Вольперт (Новосибирск). Решение пространственных задач теории упругости для трансверсально-изотропного тела вращения при помощи аналитических функций	84

(Продолжение на 2 стр.)

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГОВЯЗКИХ МАТЕРИАЛОВ, ОБЛАДАЮЩИХ АСИММЕТРИЧНЫМ РЕЛАКСАЦИОННЫМ СПЕКТРОМ

Т. Д. ШЕРМЕРГОР

(Москва)

Необходимость учета размытия релаксационного спектра твердых тел требует подбора таких ядер интегральных операторов модулей упругости, чтобы обеспечивалось сочетание максимальной близости выбранных реологических характеристик реальному материалу, с одной стороны, а с другой — удобство использования интегральных операторов для решения различных задач теории упруго-вязких сред. Простейшими ядрами такого типа являются дробно-экспоненциальные функции Ю. Н. Работнова [1], которые нашли широкое применение в механике упруго-наследственных сред благодаря особым свойствам \mathcal{E}_α^* -операторов, позволяющим достаточно эффективно проводить расшифровку различных функций \mathcal{E}_α^* -операторов [2-4].

Дробно-экспоненциальные ядра приводят к симметричной колоколообразной функции распределения логарифмов времен релаксаций $H(\tau)$ [5, 6]. Однако во многих случаях функции $H(\tau)$ оказываются существенно асимметричными. Примером может служить область перехода полимеров из стеклообразного состояния в высокоэластичное, когда функция распределения логарифмов времен релаксаций в координатах $\ln H$, $\ln \tau$ с достаточной точностью описывается прямой с наклоном $-1/2$. В этой связи представляет интерес исследование наследственных свойств материалов, асимметрия релаксационного спектра которых описывается сравнительно простыми интегральными операторами.

1. По-видимому, простейший оператор интегрального типа, приводящий к асимметрическому релаксационному спектру, был предложен А. Р. Ржаницыным [7]. Ядро этого оператора имеет вид

$$R(t) = Ae^{-\beta t^\alpha - 1} \quad (1.1)$$

При помощи ядра Ржаницына могут быть определены следующие две пары дуальных интегральных операторов:

$$M^* = M_\infty - \Delta MR^*, \quad J^* = J_\infty + \Delta JK^* \quad (1.2)$$

$$M^* = M_\infty - \Delta MK^*, \quad J^* = J_\infty + \Delta JR^* \quad (1.3)$$

$$(\Delta M \equiv M_\infty - M_0, \quad \Delta J \equiv J_0 - J_\infty)$$

Здесь M — модуль упругости, который для определенности считается модулем сдвига; $J = 1/M$ — модуль сдвиговой податливости; символ * обозначает операцию свертки на отрезке $(0, t)$. Этот же символ в качестве верхнего индекса указывает на операторное значение соответствующей величины. Индексами 0 и ∞ отмечены соответственно релаксированное и нерелаксированное значения M или J .

Операторная схема (1.3) с ядром Ржаницына использовалась С. З. Вульфсон [8] применительно к бетону. М. А. Колтунов [9] разработал технику использования с тем же ядром схемы (1.2), однако вопрос о материалах, которые могут быть описаны этой схемой, не обсуждался. Ниже проводится анализ схем (1.2) и (1.3) применительно к полимерам и показывается, что в обоих случаях тип асимметрии, учитываемый ядрами (1.1), противоположен тому, который обычно имеет место в полимерах. Проведенный анализ используется для конструирования интегральных операторов, обеспечивающих согласование типов асимметрий расчетной схемы и реальных полимерных материалов.

2. Пусть упруго-вязкий материал, описываемый интегральными операторами (1.2) или (1.3), подвергнут гармонической деформации $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ с циклической частотой ω . Тогда с учетом (1.1) получаем сле-

дующие выражения для комплексных модулей упругости и податливости:

$$M_1(\omega) = M_\infty - \Delta M (1 + i\omega\tau_\varepsilon)^{-\alpha}$$

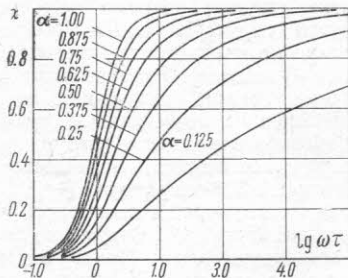
$$J_1(\omega) = J_\infty + \Delta J [1 + (m^{-1/\alpha} + i\omega\tau_\sigma)^\alpha - m^{-1}]^{-1} \quad (2.1)$$

$$M_2(\omega) = M_\infty - \Delta M [1 + (m^{1/\alpha} + i\omega\tau_\varepsilon)^\alpha - m]^{-1}$$

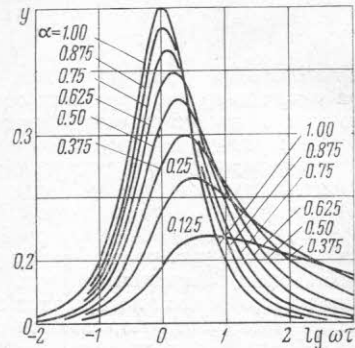
$$J_2(\omega) = J_\infty + \Delta J (1 + i\omega\tau_\sigma)^{-\alpha} \quad (2.2)$$

$$(m \equiv M_0/M_\infty = J_\infty/J_0 < 1, \quad \tau_\varepsilon/\tau_\sigma = m^{1/\alpha})$$

Здесь и в дальнейшем модули M и J , вычисленные по прямой схеме (1.2), отмечены индексом 1, а по инверсной (1.3) — индексом 2. Констан-



Фиг. 1



Фиг. 2

ты, входящие в ядро оператора (1.1), исходя из условий нормировки $R(\omega = 0) = K(\omega = 0) = 1$, приняты равными

$$A_\nu = \frac{\Delta_\nu}{\Gamma(\alpha)\tau_\nu^\alpha}; \quad \tau_\nu = \frac{1}{\beta_\nu}, \quad \Delta_1 = \frac{\Delta M}{M_\infty}, \quad \Delta_2 = \frac{\Delta M}{M_0}, \quad \tau_1 = \tau_\varepsilon, \quad \tau_2 = \tau_\sigma \quad (2.3)$$

При $\alpha = 1$ формулы (2.1) и (2.2) совпадают и описывают динамические свойства стандартного линейного тела, причем $\tau_\varepsilon/\tau_\sigma = M_0/M_\infty$.

Разлагая в ряд изображение Лапласа функции K_ν

$$K_\nu(p) = \frac{1 + q_\nu}{(1 + p\tau_\nu)^\alpha + q_\nu} \quad (2.4)$$

и переходя к оригиналу, находим резольвенту K ядра R

$$K_\nu(t) = (1 + q_\nu) \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\nu}\right) \sum_0^\infty \frac{(-q_\nu)^n (t/\tau_\nu)^{\alpha(n+1)}}{\Gamma[\alpha(n+1)]} \quad (2.5)$$

$$(q_1 \equiv m - 1 < 0, \quad q_2 \equiv 1/m - 1 > 0)$$

Из выражения (2.5) при $\nu = 1$ получаем резольвенту, найденную М. А. Колтуновым [9], а при $\nu = 2$ — вычисленную С. З. Вульфсон [8].

Из выражений (2.1) и (2.2) находятся действительные и мнимые части модулей упругости и податливости. Если ядро данного интегрального оператора дается непосредственно формулой Ржаницына (1.1), то выражения для действительной и мнимой частей модулей имеют вид

$$\frac{\operatorname{Re} M_1 - M_0}{\Delta M} = 1 - x = \chi, \quad \frac{\operatorname{Im} M_1}{\Delta M} = y_1, \quad \frac{\operatorname{Re} J_2 - J_\infty}{\Delta J} = x, \quad \frac{\operatorname{Im} J_2}{\Delta J} = -y \quad (2.6)$$

$$x \equiv \frac{\cos(\alpha\varphi)}{(1 + \chi^2)^{1/2\alpha}}, \quad y \equiv \frac{\sin(\alpha\varphi)}{(1 + \chi^2)^{1/2\alpha}}, \quad \varphi \equiv \operatorname{arc} \operatorname{tg} \chi, \quad \chi \equiv \omega\tau$$

Частотная зависимость действительной и мнимой частей приведенного упругого модуля x и y представлена на фиг. 1 и 2, соответственно. Цифрами у кривых указаны значения показателя дробности α . Графики иллюстрируют асимметрию релаксационных свойств. Последняя особенно наглядно проявляется на мнимой части модуля. Кривые имеют медленный спад в сторону больших $\omega\tau$ и резкий — в противоположную сторону. В случае, если интегральный оператор M^* или J^* описывается резольвентой (2.5), разделение действительной и мнимой частей комплексных модулей приводит к несколько более громоздким выражениям.

Рассмотрим асимптотику динамических модулей.

а) В случае низких частот ($\omega\tau \rightarrow 0$) из выражений (2.1) и (2.2) получим

$$M_1(\omega) \approx M_\infty - \frac{\Delta M}{1 + i\omega\tau_\varepsilon^\circ}$$

$$J_1(\omega) \approx J_\infty + \frac{\Delta J}{1 + i\omega\tau_\sigma^\circ}$$

(2.7)

$$M_2(\omega) \approx M_\infty - \frac{\Delta M}{1 + i\omega\tau_\varepsilon'}$$

$$J_2(\omega) \approx J_\infty + \frac{\Delta J}{1 + i\omega\tau_\sigma'}$$

(2.8)

$$\tau_\varepsilon^\circ = \alpha\tau_\varepsilon, \quad \tau_\sigma^\circ = \alpha\tau_\sigma m^{(1-\alpha)/\alpha}, \quad \tau_\varepsilon' = \alpha\tau_\varepsilon m^{(\alpha-1)/\alpha}$$

$$\tau_\sigma' = \alpha\tau_\sigma, \quad \tau_\varepsilon^\circ / \tau_\sigma^\circ = \tau_\varepsilon' / \tau_\sigma' = m \tag{2.9}$$

б) В случае высоких частот ($\omega\tau \rightarrow \infty$) обе схемы расчета приводят к одинаковым выражениям

$$M(\omega) \approx M_\infty - \Delta M (i\omega\tau_\varepsilon)^{-\alpha}, \quad J(\omega) \approx J_\infty - \Delta J (i\omega\tau_\sigma)^{-\alpha} \tag{2.10}$$

Таким образом, при низких частотах асимптотические формулы (2.7) и (2.8) совпадают с точными формулами стандартного линейного тела. При высоких частотах асимптотические формулы (2.10) совпадают с высокочастотной асимптотикой модулей упругости и податливости реологической модели, описываемой дробно-экспоненциальными функциями памяти. В последнем легко убедиться, принимая во внимание, что дробно-экспоненциальные ядра дают следующие точные формулы:

$$M(\omega) = M_\infty - \frac{\Delta M}{1 + (i\omega\tau_\varepsilon)^\alpha}, \quad J(\omega) = J_\infty + \frac{\Delta J}{1 + (i\omega\tau_\sigma)^\alpha} \tag{2.11}$$

Отсюда при $\omega\tau \rightarrow \infty$ получаем асимптотические формулы, совпадающие с выражениями (2.10).

Из приведенных асимптотических оценок следует, что в случае низких частот фазовые диаграммы мало отличаются от полуокружностей, которыми описывается стандартное линейное тело, а при высоких частотах они вырождаются в прямые с углом наклона к действительной оси $1/2\alpha\pi$.

1 — параметр, равный нулю, 2 — абсцисса, 3 — ордината, 4 — индекс, 5 — диаграмма, 6 — индекс, 7 — диаграмма, 8 — диаграмма для дробно-экспоненциального оператора.

1	2	3	4	5	6	7	8
—	$(M' - M_0) / \Delta M$	$M'' / \Delta M$	1	Б	3	А	Ж
—	$(J' - J_0) / \Delta J$	$-J'' / \Delta J$	1	В	3	Г	Ж
—	$(M' - M_0) / \Delta M$	$M'' / \Delta M$	2	Г	4	В	Ж
—	$(J' - J_0) / \Delta J$	$-J'' / \Delta J$	2	А	4	Б	Ж
M_0	M' / M_∞	M'' / M_∞	1	Б	3	А	Ж
M_0	J' / J_∞	$-J'' / J_\infty$	1	Е	3	Д	И
M_0	M' / M_∞	M'' / M_∞	2	Ж	4	—	Ж
M_0	J' / J_∞	$-J'' / J_\infty$	2	И	4	—	И
J_∞	M' / M_0	M'' / M_0	1	—	3	И	И
J_∞	J' / J_0	$-J'' / J_0$	1	—	3	Ж	Ж
J_∞	M' / M_0	M'' / M_0	2	Д	4	Е	И
J_∞	J' / J_0	$-J'' / J_0$	2	А	4	Б	Ж

Типы фазовых диаграмм, описывающих комплексные модули M и J , указаны в таблице и приведены на фиг. 3. На всех диаграммах возрастание параметра ωt соответствует направлению оси абсцисс для модулей упругости и противоположно для податливости. Цифрами на кривых указаны значения α . Для невырожденных моделей ($m \neq 0$) пересчет M на J , и наоборот, проводился при $m = 1/2$.

Как видно из фиг. 2, переход от прямой схемы (1.2) к инверсной (1.3) не влияет существенно на тип симметрии диаграммы. Однако более простой вид имеет диаграмма для M в прямой схеме, а для J — в инверсной.

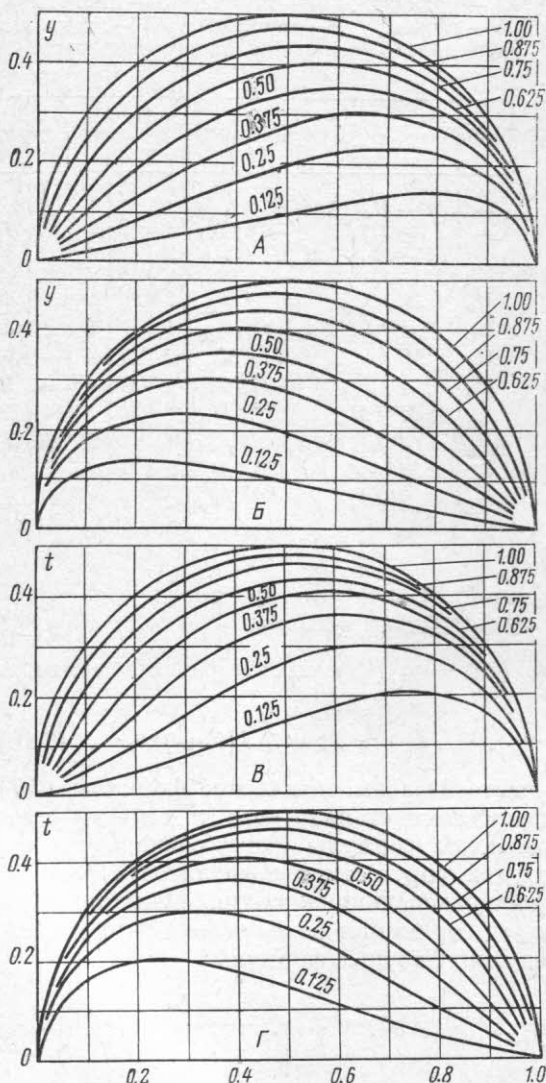
В случае квазимаксвелловской среды ($M_0 = 0$) вместо формул (2.1) и (2.2) будем иметь (2.12)

$$\begin{aligned} M_1(\omega) &= \\ M_\infty [1 - (1 + i\omega\tau_\varepsilon)^{-\alpha}] \\ M_2(\omega) &= \\ M_\infty [1 + (i\omega\tau_\varepsilon)^{-\alpha}]^{-1} \end{aligned}$$

Второй предельный случай соответствует квазигойгтовской среде, для которой $J_\infty = 0$. Прямая схема в этом случае описывает тривиальный результат $M_1(0) = M_0$, а инверсная дает (2.13)

$$M_2(\omega) = M_0(1 + i\omega\tau_\sigma)^\alpha$$

Как видно из выражений (2.12), уменьшение частоты для квазимаксвелловской среды приводит к неограниченному возрастанию модуля комплексной податливости, причем в случае инверсной схемы (1.3) податливость описывается диаграммой I , имеющей вид прямой, наклоненной под углом $1/2\alpha\pi$ к действительной оси, как и для дробно-экспоненциальных ядер. При использовании прямой схемы (1.2) податливость описывается диаграммой E , в которой отмеченный наклон имеют высокочастотные асимптоты. Для квазигойгтовской среды неограниченный рост модуля упругости с увеличением частоты



Фиг. 3, а—г

описывается кривыми (диаграмма D), которые в пределе $\omega \rightarrow \infty$ имеют асимптоты, наклоненные к действительной оси также под углом $1/2\alpha\pi$. Таким образом, асимметрия релаксационного спектра учитывается для

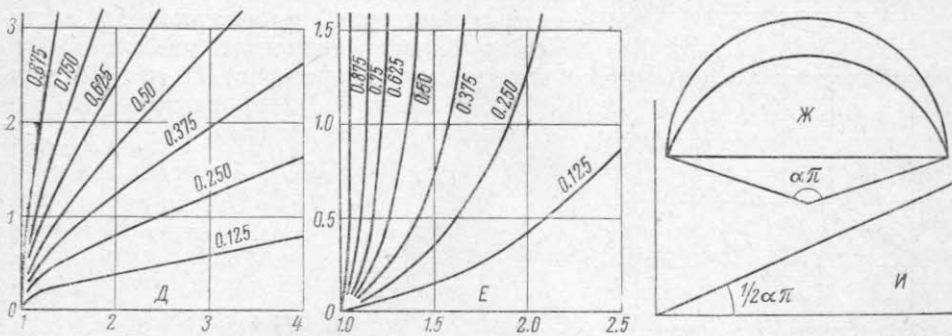
квазимаксвелловской среды схемой (1.2), а для квазифойгтовской — схемой (1.3).

Отметим, что в диаграммах D кривые имеют асимптоту с наклоном к действительной оси $1/2\alpha\pi$ при больших значениях соответствующего модуля, а в диаграммах E — при малых. Увеличение мнимой части в последнем случае не сопровождается неограниченным возрастанием действительной части, которая ограничивается вертикальной асимптотой, отсекающей на действительной оси отрезок $1/2(1 + \alpha^{-1})$. Поскольку для обычной модели Максвелла низкочастотная асимптотика имеет вид

$$M(0) = 0 + i0, \quad J(0) = J_\infty - i\infty$$

находим, что условие $M(0) = 0$, $\text{Re } J(0) = 1/2 J_\infty (1 + 1/\alpha)$ ближе соответствует модели Максвелла, чем неограниченное возрастание $\text{Re } J(0)$, к которому приводит дробно-экспоненциальная квазимаксвелловская модель.

3. Диаграммы, приведенные на фиг. 3 и описанные в таблице, иллюстрируют асимметрию свойств рассматриваемой среды. Рассчитаем теперь



Фиг. 3, $\theta - u$

непосредственно функцию распределения логарифмов времен релаксаций, к которой приводит ядро Ржаницына или его резольвента. Функция распределения H может быть вычислена по известной частотной зависимости действительной M' или мнимой M'' частям комплексного упругого модуля M

$$M'(\omega) = M_0 + \Delta M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} H(\tau) d \ln \tau \quad (3.1)$$

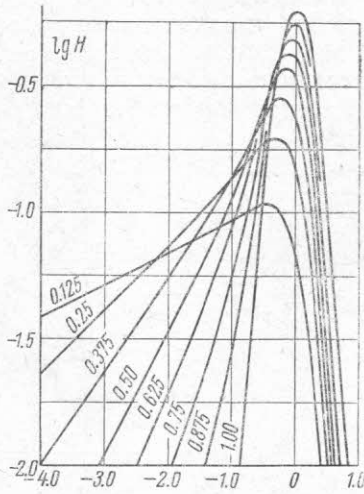
$$M''(\omega) = \Delta M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} H(\tau) d \ln \tau \quad (3.2)$$

Функции M' и M'' известны, поэтому уравнения (3.1) или (3.2) позволяют рассчитать $H(\tau)$. К сожалению, точное обращение любого из этих интегральных уравнений не представляется возможным. Поэтому релаксационный спектр рассчитывался приближенно по методу Ниномия и Ферри [10, 11]. Во втором приближении расчетная формула имеет вид

$$H(\tau) = \left\{ \frac{1}{2 \ln a} [M'(a\omega) - M'(\omega/a)] - \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2 \ln a} \times \right. \\ \left. \times [M'(a^2\omega) - M'(\omega/a^2) - 2M'(a\omega) + 2M'(\omega/a)] \right\}_{1/\omega = \tau} \quad (3.3)$$

Вычисления проводились на электронной вычислительной машине «Наири» с шагом $\lg a = 0,2$. Результаты приведены на фиг. 4. При точном обращении значению $\alpha = 1$ должна соответствовать δ -функция. Поэтому кривая $H(\tau)$ при $\alpha = 1$ может рассматриваться как функция искажения, определяющая отклонение приближенного результата от истинного.

Как видно из фиг. 4, в координатах $\lg H - \lg \tau$ кривые для $\alpha < 1$ имеют асимметричный вид, причем функция $\lg H$ имеет резкий спад в сторону возрастания τ и пологий — в противоположную сторону. Анализ, проведенный Дж. Ферри для семи типичных полимеров, показал [11], что в этих координатах функция распределения либо почти не изменяется, либо имеет тенденцию к медленному убыванию, которое может быть растянуто на 5—10 порядков по оси τ и давать убывание H с ростом τ на 4—6 порядков. Таким образом, пологий спад функции распределения большинства полимеров направлен в сторону роста τ , тогда как, согласно рассмотренным выше обеим схемам расчета, использующим ядро Ржаницына или его резольвенту, пологий спад направлен в сторону убывания τ . Следовательно, схемы (1.2) и (1.3), основанные на использовании ядра Ржаницына, не могут правильно учитывать вид симметрии релаксационного спектра полимерных материалов.



Фиг. 4

4. Для согласования симметрии комплексных модулей упругости и податливости с симметрией релаксационного спектра реальных полимеров удобно, вместо определения операторов M^* и J^* формулами (1.2) и (1.3), определить их следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} M^* &= M_0 + \Delta M S^* D, \\ J^* &= J_0 - \Delta J P^* D \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} M^* &= M_0 + \Delta M P^* D, \\ J^* &= J_0 - \Delta J S^* D \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$(D \equiv d/dt)$$

Потребуем, чтобы комплексные модули упругости и податливости, вытекающие из определения операторов (4.1) и (4.2), после замены $i\omega\tau \rightarrow 1/i\omega\tau$ и соответствующего переобозначения констант приводили к формулам (2.1) и (2.2). Исходя из этого, примем следующие две пары соотношений:

$$\begin{aligned} M_3(\omega) &= M_0 + \Delta M (1 + 1/i\omega\tau_\epsilon)^{-\alpha} \\ J_3(\omega) &= J_0 - \Delta J [1 + (m^{1/\alpha} + 1/i\omega\tau_\sigma)^\alpha - m]^{-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$J_4(\omega) = J_0 - \Delta J (1 + 1/i\omega\tau_\sigma)^{-\alpha} \quad (4.4)$$

$$M_4(\omega) = M_0 + \Delta M [1 + (m^{-1/\alpha} + 1/i\omega\tau_\epsilon)^\alpha - m^{-1}]^{-1}$$

$$(m \equiv M_0/M_\infty < 1, \quad \tau_\epsilon/\tau_\sigma = m^{1/\alpha})$$

из которых первые формулы в каждой паре — определяющие, а вторые вытекают из условия взаимности $M(\omega) = 1/J(\omega)$, или наоборот. Здесь и в дальнейшем комплексные модули M и J , вычисленные по прямой схеме (4.1), отмечены индексом 3, а по инверсной схеме (4.2) — индексом 4.

Из выражений (4.3) и (4.4) видно, что низкочастотная асимптотика ($\omega\tau \ll 1$) в обоих случаях совпадает

$$M_{3,4}(\omega) \approx M_0 + \Delta M (i\omega\tau_\epsilon)^\alpha, \quad J_{3,4}(\omega) \approx J_0 - \Delta J (i\omega\tau_\sigma)^\alpha \quad (4.5)$$

В другом предельном случае высоких частот ($\omega\tau \gg 1$) имеем

$$M_3(\omega) \approx M_\infty - \frac{\Delta M}{1 + i\omega\tau_\varepsilon^\circ}, \quad J_3(\omega) \approx J_\infty + \frac{\Delta J}{1 + i\omega\tau_\sigma^\circ} \quad (4.6)$$

$$M_4(\omega) \approx M_\infty - \frac{\Delta M}{1 + i\omega\tau_{\varepsilon'}}, \quad J_4(\omega) \approx J_\infty + \frac{\Delta J}{1 + i\omega\tau_{\sigma'}} \quad (4.7)$$

$$\tau_\varepsilon^\circ = \frac{\tau_\varepsilon}{\alpha}, \quad \tau_\sigma^\circ = \frac{\tau_\sigma}{\alpha} m^{1/\alpha-1}, \quad \tau_{\varepsilon'} = \frac{\tau_\varepsilon}{\alpha} m^{1-1/\alpha}, \quad \tau_{\sigma'} = \frac{\tau_\sigma}{\alpha} \quad (4.8)$$

Таким образом, низкочастотная асимптотика (4.5) совпадает с асимптотикой дробно-экспоненциальных ядер, а высокочастотная описывается формулами стандартного линейного тела. Сопоставляя выражения (4.5) — (4.8) с соответствующими асимптотическими оценками (2.7) — (2.10), убеждаемся в инверсии симметрии фазовых диаграмм и, следовательно [12], в инверсии симметрии функции распределения.

Рассмотрим динамические характеристики сред, характеризуемых выродженными ($m = 0$) реологическими моделями. В случае квазимаксвелловской среды ($M_0 = 0$) из равенства (4.3) получим

$$M_3(\omega) = M_\infty (1 + 1/i\omega\tau_\varepsilon)^{-\alpha} \quad (4.9)$$

а равенство (4.4) приводит к тривиальному результату $M(\infty) = M_\infty$.

Во втором предельном случае квазифойгтовской среды ($J_\infty = 0$) соответственно найдем

$$J_3(\omega) = J_0 [1 + (i\omega\tau_\sigma)^\alpha]^{-1}, \quad J_4(\omega) = J_0 [1 - (1 + 1/i\omega\tau_\sigma)^{-\alpha}] \quad (4.10)$$

Первая из формул (4.10) совпадает с податливостью квазифойгтовской среды, описываемой дробно-экспоненциальными ядрами. Поэтому асимметрия релаксационного спектра учитывается для квазифойгтовской среды податливостью J_4 , а для квазимаксвелловской — модулем M_3 . Фазовые диаграммы, описываемые формулами (4.3) — (4.10), указаны в таблице. Там же для сопоставления приведены типы диаграмм упруго-вязких сред при дробно-экспоненциальных функциях памяти. Сравнивая диаграммы квазифойгтовских сред, обладающих симметричным и асимметричным релаксационным спектром, отметим, что для обычной модели Фойгта высокочастотная асимптотика характеризуется следующими предельными значениями модулей упругости и податливости:

$$J(\infty) = 0 - i0, \quad M(\infty) = M_0 + i\infty$$

Поэтому условие $J_4(\infty) = 0$, $\text{Re } M_4(\infty) = 1/2 M_0 (1 + 1/\alpha)$ ближе соответствует модели Фойгта, чем неограниченное возрастание $\text{Re } M(\infty)$, к которому приводит дробно-экспоненциальная квазифойгтовская модель.

Для иллюстрации частотной зависимости комплексных упругих модулей можно воспользоваться кривыми фиг. 1. Легко видеть, что кривые, описывающие приведенный упругий модуль $[M_3(\omega) - M_0]/\Delta M$, получаются из кривых фиг. 1 и 2 заменой $y \rightarrow y$, $x \rightarrow 1 - x$ и $\lg \omega\tau \rightarrow -\lg \omega\tau$. Такая замена означает инверсию симметрии кривых. Мнимая часть приведенного упругого модуля теперь имеет резкий спад со стороны больших $\omega\tau$ и слабое убывание в сторону малых $\omega\tau$.

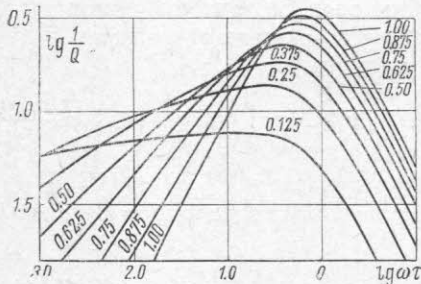
Формулы (4.3) и (4.4) позволяют рассчитать внутреннее трение рассматриваемой среды. Обозначая по-прежнему величины, относящиеся к прямой схеме (4.3), индексом 3, а к инверсной схеме (4.4) — индексом 4, найдем

$$Q_3^{-1} = \frac{y_e}{x_e + M_0/\Delta M}, \quad Q_4^{-1} = \frac{y_\sigma}{1 - x_\sigma + M_0/\Delta M} \quad (4.11)$$

$$y_v \equiv \frac{\sin[\alpha \arctg(\omega\tau_v)]}{[1 + (\omega\tau_v)^2]^{1/2\alpha}}, \quad x_v \equiv \frac{\cos[\alpha \arctg(\omega\tau_v)]}{[1 + (\omega\tau_v)^2]^{1/2\alpha}} \quad (4.12)$$

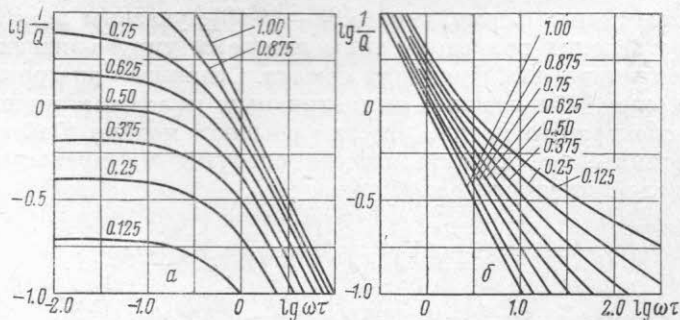
Внутреннее трение, рассчитанное по первой из формул (4.11) при $m = 1/2$, приведено на фиг. 5. На фиг. 6, а и б приведены частотные зависимости внутреннего трения квазимаксвелловской и квазифойгтовской сред соответственно. Первое выражение (4.10) не учитывает асимметрии релаксационного спектра, поэтому внутреннее трение рассчитывалось в первом случае по формуле $Q_3^{-1} = y_e/x_e$, вытекающей из (4.9), а во втором принималось $Q_4^{-1} = y_\sigma/(1 - x_\sigma)$ в соответствии со вторым выражением (4.10).

5. Перейдем к вычислению релаксации напряжений и ползучести упруго-вязкой среды, наследственные свойства которой определены выражениями (4.3) и (4.4). Для этого примем во внимание, что последние выражения являются фурье-образом интегральных операторов M^* и J^* . Восстановление явного вида M^* и J^* по известному фурье-образу может быть проведено при помощи выражений (4.1) и (4.2) или (1.2) и (1.3). Ниже в качестве основной схемы принята первая пара определений, поскольку она приводит непосредственно к функциям релаксации и ползучести, тогда как при использовании последней пары выражений необходимо провести свертывание соответствующих ядер с единицей. Действительно, принимая для релаксации напряжений импульсное деформирование образца до некоторой величины ε^0 , а для ползучести — мгновен-



Фиг. 5

необходимо провести свертывание соответствующих ядер с единицей. Действительно, принимая для релаксации напряжений импульсное деформирование образца до некоторой величины ε^0 , а для ползучести — мгновен-



Фиг. 6

по приложенную постоянную нагрузку σ^0 , из выражений (4.1) и (4.2) найдем

$$\sigma_3 = \varepsilon^0 [M_0 + \Delta MS(t)], \quad \sigma_4 = \varepsilon^0 [M_0 - \Delta MP(t)] \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_3 = \sigma^0 [J_0 - \Delta JP(t)], \quad \varepsilon_4 = \sigma^0 [J_0 - \Delta JS(t)] \quad (5.2)$$

Тогда как из формул (1.2) и (1.3) следует

$$\sigma_1 = \varepsilon^\circ [M_\infty - \Delta MR(t) * 1], \quad \sigma_2 = \varepsilon^\circ [M_\infty - \Delta MK(t) * 1] \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_1 = \sigma^\circ [J_\infty + \Delta JK(t) * 1], \quad \varepsilon_2 = \sigma^\circ [J_\infty + \Delta JR(t) * 1] \quad (5.4)$$

Функции $R(t) * 1$ и $K(t) * 1$ равны

$$R_v(t) * 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma\left(\alpha, \frac{t}{\tau_v}\right)$$

$$K_v(t) * 1 = (1 + q_v) \sum_0^\infty (-q_v)^n \frac{\gamma[\alpha(n+1), t/\tau_v]}{\Gamma[\alpha(n+1)]} \quad (5.5)$$

где $\gamma(\alpha, x)$ — неполная гамма-функция. Для нахождения $S(t)$ примем во внимание, что

$$LS_v(p) = (1 + 1/p\tau_v)^{-\alpha} \quad (v=3, 4)$$

Здесь L — оператор интегрального преобразования Лапласа — Карсона. Обращая это выражение, находим

$$S_v(t) = {}_1F_1(\alpha, 1, -t/\tau_v) \quad (5.6)$$

где ${}_1F_1(\alpha, 1, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Последняя может быть определена рядом

$${}_1F_1(\alpha, 1, x) = 1 + \frac{\alpha}{(1!)^2} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(2!)^2} x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{(n!)^2} x^n + \dots \quad (5.7)$$

При $\alpha = 1$ функция $S(t)$ вырождается в экспоненциальную функцию

$${}_1F_1(1, 1, -t/\tau) = \exp(-t/\tau)$$

Это отражает переход к модели стандартного линейного тела. График функции ${}_1F_1(\alpha, 1, -t/\tau)$ при различных значениях параметра α представлен на фиг. 7.

Вычислим теперь оператор P^* . Его изображение равно

$$LP_v(p) = \frac{1 + q_v}{(1 + 1/p\tau_v)^{\alpha + q_v}} \quad (v=3, 4)$$

$$q_3 = 1/m - 1, \quad q_4 = m - 1$$

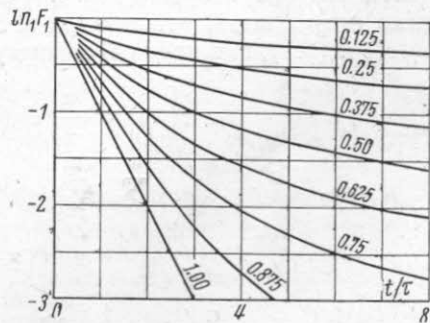
$$\tau_3 = \tau_\varepsilon, \quad \tau_4 = \tau_\sigma \quad (5.8)$$

Дробь (5.8) можно представить в виде ряда, который в случае $|q_v| < 1$ имеет вид

$$LP_v(p) = (1 + q_v) \sum_0^\infty (-q_v)^n \left(1 + \frac{1}{p\tau_v}\right)^{-\alpha(n+1)} \quad (5.9)$$

При $|q_v| > 1$ получаем другой ряд

$$LP_v(p) = \left(1 + \frac{1}{q_v}\right) \sum_0^\infty (-q_v)^{-n} \left(1 + \frac{1}{p\tau_v}\right)^{\alpha n} \quad (5.10)$$



Фиг. 7

Обращение выражений (5.9) и (5.10) соответственно дает

$$P_v(t) = (1 + q_v) \sum_0^{\infty} (-q_v)^n {}_1F_1[\alpha(n+1), 1, -t/\tau_v] \quad (5.11)$$

$$P_v(t) = \left(1 + \frac{1}{q_v}\right) \sum_0^{\infty} (-q_v)^{-n} {}_1F_1(-\alpha n, 1, -t/\tau_v) \quad (5.12)$$

Последние формулы вместе с выражением (5.6) определяют явный вид интегральных операторов (4.1) и (4.2).

Сравнивая выражение (5.6) с формулами (5.11), (5.12), убеждаемся, что оператор S^* описывается достаточно простым выражением, но дуальный ему оператор P^* не удается представить в удобной для расчетов форме. Однако из сопоставления фазовых диаграмм видно, что при гармоническом воздействии различие в виде диаграмм невелико, если релаксированный и нерелаксированный упругие модули отличаются не слишком сильно (на фиг. 3 кривые построены при $M_0/M_\infty = 1/2$). Поэтому, если не возникает необходимости использовать в расчетах одновременно операторы M^* и J^* , можно при расчетах релаксации напряжений пользоваться оператором (4.1.1), а для ползучести — (4.2.1).

Сопоставляя определения операторов схемами (1.2) и (1.3) с определениями (4.1) и (4.2) и учитывая условие нормировки

$$S(t=0) = P(t=0) = 1$$

находим, что переход от одной пары схем к другой осуществляется при помощи замены

$$S * D \rightarrow -(DS) *, \quad P * D \rightarrow -(DP) *$$

с соответствующим переобозначением констант. Таким образом, для эквивалентности операторов (4.1) и (4.2) с операторами (1.2) и (1.3) необходимо потребовать, чтобы ядра R и K были определены не выражениями (1.1) и (2.5), как прежде, а формулами

$$R_v(t) = \frac{\alpha}{\tau_v} {}_1F_1(1 + \alpha, 2, -t/\tau_v) \quad (5.13)$$

$$K_v(t) = \frac{\alpha}{\tau_v} (1 + q_v) \sum_0^{\infty} (n+1) (-q_v)^n {}_1F_1[\alpha(n+1) + 1, 2, -t/\tau_v] \quad (5.14)$$

($|q_v| < 1$)

$$K_v(t) = -\frac{\alpha}{\tau_v} \left(1 + \frac{1}{q_v}\right) \sum_0^{\infty} n (-q_v)^{-n} {}_1F_1(1 - \alpha n, 2, -t/\tau_v) \quad (5.15)$$

($|q_v| > 1$)

6. Из выражений (4.3) следует, что в случае низких частот ($\omega\tau \ll 1$) действительная и мнимая части комплексного модуля упругости определяются выражениями

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} M_3(\omega) &\approx M_0 + \Delta M (\omega\tau)^\alpha \cos 1/2\alpha\lambda \\ \operatorname{Im} M_3(\omega) &\approx \Delta M (\omega\tau)^\alpha \sin 1/2\alpha\lambda \end{aligned} \quad (6.1)$$

т. е. в области, не слишком близкой к релаксированному значению M_0 , зависимости (6.1) должны в двойных логарифмических координатах изобра-

жаться прямыми с углом наклона α и разностью ординат

$$\lg \operatorname{Im} M_3(\omega) - \lg \operatorname{Re} M_3(\omega) = \lg \operatorname{tg}^{1/2} \alpha l \quad (6.2)$$

При $\alpha > 1/2$ кривая $\lg \operatorname{Im} M_3(\omega)$ должна лежать выше кривой $\lg \operatorname{Re} M_3(\omega)$, а при $\alpha < 1/2$ — наоборот.

Для сопоставления полученных результатов с экспериментом воспользуемся данными для полиизобутилена [13, 14]. Определяя значения α из наклона и сдвига кривых, описывающих частотную зависимость действительной и мнимой частей модуля упругости, получим $\alpha = 0.61$ и $\alpha = 0.63$ соответственно. Совпадение найденных таким образом различными методами значений α можно считать удовлетворительным.

Автор благодарит Ю. Н. Работнова — за обсуждение результатов и У. А. Шермергор — за помощь в выполнении численных расчетов.

Поступило 27.III.67

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
2. Розовский М. И. О некоторых особенностях упруго-наследственных сред. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 2.
3. Розовский М. И., Круш И. И. Вынужденные колебания упруго-наследственных систем. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 1.
4. Глушко В. Т. Распределение напряжений в кольцеобразной упруго-наследственной пластинке с цилиндрической анизотропией. Механика полимеров, 1966, № 3.
5. Шермергор Т. Д. Расчет функций распределения констант релаксаций по дисперсии действительной части комплексной упругости для упруго-вязких тел. Изв. высш. учебн. завед. Физика, 1961, № 1.
6. Мешков С. И., Пачевская Г. Н., Шермергор Т. Д. К описанию внутреннего трения с помощью дробно-экспоненциальных ядер. ПМТФ, 1966, № 3.
7. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, 1949.
8. Вульфсон С. З. Температурные напряжения в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 1, стр. 162.
9. Койтунов М. А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации. Механика полимеров, 1966, № 4.
10. Nishiyama K., Ferry J. D. Some approximate equations useful in the phenomenological treatment of linear viscoelastic data. J. colloid. sci., 1959, vol. 14, No. 1, p. 36.
11. Ферри Дж. Вязко-упругие свойства полимеров. Изд. иностр. лит., 1963.
12. Шермергор Т. Д. О симметрии релаксационного спектра. Тр. Новокузнецкого гос. пед. института (Кемеровская обл.) Сер. физ.-мат., 1962, т. 4, стр. 153.
13. Catsiff E., Tobolsky A. V. Stress-Relaxation of Polyisobutylene in the Transition Region. J. Colloid. Sci., 1955, vol. 10, No. 4, p. 375.
14. Тобольский А. Свойства и структура полимеров. Изд. «Химия», Москва, 1964.