

На правах рукописи



Исполов Егор Михайлович

**РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХПОДВИЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ
ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С ИНТЕГРИРОВАННЫМ СХВАТОМ**

Специальность 2.5.2. Машиноведение

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва, 2026

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук» (ИМАШ РАН)

Научный руководитель: **Ларюшкин Павел Андреевич**
доктор технических наук, доцент,
профессор кафедры основ конструирования
машин МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва

Официальные оппоненты: **Марковец Алексей Владимирович**
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой машиноведения
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский
государственный университет промышленных
технологий и дизайна»

Приходько Александр Александрович
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры технической механики и
специальных машин им. профессора
А. А. Петрика ФГБОУ ВО «Кубанский
государственный технологический университет»,
г. Краснодар

Ведущая организация: **ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный
технический университет»**

Защита состоится «06» октября 2026 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета 24.1.075.01 на базе федерального государственного бюджетного учреждения науки Института машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук (ИМАШ РАН) по адресу: 101000, Москва, М. Харитоньевский пер., д. 4.

Отзывы на автореферат, заверенные печатью учреждения (организации), просьба направлять по адресу: 101000, Москва, М. Харитоньевский пер., д. 4., ученому секретарю совета 24.1.075.01.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИМАШ РАН и на сайте <http://imash.ru/>

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, д.т.н.
Рашоян Гагик Володяевич

Актуальность темы диссертации

Автоматизация и роботизация технологических процессов, бесспорно, является одним из главных трендом последних десятилетий. Повсеместное внедрение промышленных роботов позволяет существенно ускорить производственные процессы и повысить качество продукции, что способствует росту производительности и конкурентоспособности как отдельных предприятий, так и целых отраслей промышленности.

Внедрение современных робототехнических систем невозможно без развития научных методов синтеза и анализа их механической составляющей. При этом одним из перспективных направлений является разработка структурных схем механизмов роботов, имеющих параллельную кинематическую структуру. Такая структура, в отличие от традиционной последовательной, позволяет размещать все приводы на основании, что существенно снижает массу подвижных частей механизма и повышает его динамические характеристики. Наряду с очевидными достоинствами, механизмы параллельной структуры обладают и рядом недостатков. Так, размеры их рабочей зоны меньше, чем у механизмов с последовательной структурой, ввиду большего количества конструктивных ограничений. Еще одним серьезным недостатком является более широкий спектр так называемых особых положений, при попадании в которые происходит нежелательное изменение подвижности механизма.

Одним из способов увеличения рабочей зоны и избегания особых положений для механизмов параллельной структуры является использование избыточности, которая может быть приводной, либо кинематической. Приводная избыточность подразумевает, что приводов в механизме больше, чем степень его подвижности, в то время как в кинематически избыточном механизме степень подвижности и число приводов одинаково, однако, больше, чем необходимо для реализации требуемых законов движения выходного звена.

Помимо увеличения размеров рабочей зоны и избегания особых положений, кинематическая избыточность также может быть использована для расширения функциональных возможностей механизмов, в частности для реализации возможности захвата объектов манипулирования непосредственно выходным звеном без использования дополнительных устройств. В то же время количество примеров реализации данной концепции, описанных в научной литературе, крайне мало. В этой связи, тема настоящей диссертации, посвященной разработке механизмов с интегрированным схватом и их исследованию, является актуальной.

Цель работы – разработка трехподвижных механизмов параллельной структуры с интегрированным схватом и исследование их функциональных характеристик.

Задачи исследования:

1. Синтез структурных схем плоского и поступательно-направляющего механизмов параллельной структуры с кинематической избыточностью и составным выходным звеном, дополнительная подвижность которого может быть использована для реализации функции захвата объектов манипулирования;

2. Разработка математических моделей предложенных механизмов, в том числе вывод уравнений связи, решение прямой и обратной задачи о положениях, а также анализ рабочей зоны, кинематических и силовых характеристик этих механизмов;

3. Анализ особых положений механизмов, включая оценку близости к особым положениям разных типов с использованием условий максимизации скоростей и усилий в приводных шарнирах, а также анализ максимального усилия, развиваемого на схвате механизма для заданной внешней нагрузки при известных предельно допустимых значениях усилий на приводах;

4. Разработка конструкции, трехмерное моделирование, изготовление, сборка и отладка физических прототипов механизмов, экспериментальная проверка их работоспособности и аналитической методики расчета максимальной силы на схвате.

Область исследования

Область исследования диссертации соответствует пунктам 1, 2 и 3 паспорта научной специальности 2.5.2. Машиноведение: «Синтез структурных и кинематических схем механизмов и обобщенных структурных схем машин, оптимизация параметров»; «Теория и методы проектирования машин и механизмов, систем приводов, узлов и деталей машин»; «Методы кинематического и динамического анализа, в том числе математического моделирования, анимационного и экспериментального исследования механизмов».

Научная новизна:

1. Предложены структурные схемы новых трехподвижных плоского и поступательно-направляющего механизмов параллельной структуры с кинематической избыточностью, которая может быть использована для реализации функции захвата объектов манипулирования непосредственно выходным звеном механизма;

2. Разработаны математические модели предложенных механизмов, основанные на аналитическом решении задачи о положениях в общем виде и дифференцировании уравнений связи, что позволяет проводить анализ кинематических и силовых характеристик этих механизмов, а также исследовать их особые положения;

3. Предложена расчетная методика вычисления максимального значения усилия, развиваемого на схвате механизма для заданной внешней нагрузки при известных значениях максимально допустимых усилий на приводах механизма.

Практическая значимость:

1. На примере трехподвижных плоского и поступательно-направляющего механизмов параллельной структуры обоснована возможность использования составного выходного звена в качестве интегрированного схвата, что позволяет избежать необходимости применения отдельного захватного устройства и, как следствие, увеличения массы подвижных частей механизма;

2. Разработаны прикладные программы, реализующие аналитические алгоритмы расчета кинематики и статики предложенных механизмов с

интегрированным схватом, а также итерационные алгоритмы анализа и визуализации рабочей зоны и особых положений механизмов;

3. Созданы компьютерные твердотельные модели и физические прототипы разработанных механизмов, а также с использованием прототипа плоского механизма получены новые экспериментальные данные, подтверждающие применимость предложенной аналитической методики для расчета силы на схвате.

Реализация результатов работы

Полученные результаты приняты к использованию в АО «Композит» и МГТУ им. Н. Э. Баумана, что подтверждено соответствующими актами.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Новые структурные схемы плоского и поступательно-направляющего механизмов параллельной структуры с функцией захвата объекта манипулирования непосредственно выходным звеном механизма, реализованной за счет кинематической избыточности;

2. Математические модели предложенных механизмов и полученные с использованием указанных моделей результаты анализа рабочей зоны этих механизмов, их кинематических и силовых характеристик, а также анализа особых положений разных типов и близости к ним с использованием условий максимизации приводных скоростей и усилий;

3. Методика расчета максимальной силы, развиваемой на схвате механизмов при заданных значениях внешней нагрузки и предельно допустимой нагрузки на приводы, а также результаты экспериментального исследования плоского механизма, подтверждающие применимость разработанной расчетной методики.

Обоснованность и достоверность полученных результатов

Достоверность результатов подтверждается использованием общепринятых расчетных методик и допущений, характерных для работ в области теоретической механики и теории механизмов и машин, применением современного программного обеспечения, а также проверкой теоретических результатов компьютерным моделированием и натурным экспериментом.

Апробация работы

Полученные научные результаты были представлены на конференциях:

- 14-я Международная научно-практическая конференция «Современное машиностроение: Наука и образование MMESE-2025», Санкт-Петербург, 2025;
- 20-я Всероссийская научно-техническая конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях» (ИАМП-2025), Бийск, 2025;
- 37-я Международная инновационная конференция молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения (МИКМУС-2025), Москва, 2025.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 7 работ: 2 статьи журналах из Перечня ВАК РФ, 2 статьи в изданиях, индексируемых в базах Scopus и WoS (в том числе статья в журнале первого квартиля базы Scopus), 3 работы, индексируемые в РИНЦ.

Объем и структура работы

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 106 наименований и приложения. Объем диссертации составляет 131 страницу, включая 63 рисунка и 3 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель работы, решаемые задачи, научная новизна, практическая значимость и положения, выносимые на защиту.

В главе 1 проведен обзор научных исследований и применений параллельных механизмов. Рассмотрены подходы к избеганию особых положений, увеличению рабочей зоны механизмов и расширению их функционала.

В современной робототехнике все чаще находят применение механизмы параллельной структуры. Они имеют ряд преимуществ, таких как большая грузоподъемность, высокая точность и хорошие динамические характеристики. Одной из наиболее известных и широко применяемых схем таких механизмов является робот Delta (Рис. 1), обладающий высокой скоростью манипулирования.



Рис. 1 Дельта-робот ABB FlexPicker

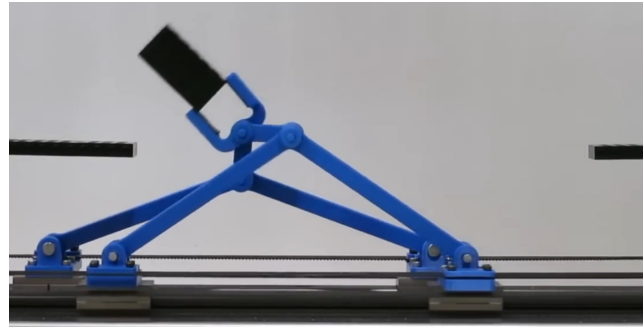


Рис. 2 Механизм 4-PRR со схватом

К главным недостаткам параллельной структуры можно отнести ограниченную рабочую зону, повышенные требования к точности изготовления и наличие особых положений. Для борьбы с указанными недостатками используют в том числе приводную и кинематическую избыточность. При этом за счет кинематической избыточности можно реализовать дополнительные функции, такие как, например, захват объекта манипулирования (Рис. 2). Отсутствие широких исследований такой возможности делает тему данной работы актуальной.

В главе 2 синтезирован плоский трехподвижный механизм параллельной структуры с интегрированным схватом, решена задача о положениях, проведен силовой и скоростной анализ, предложен метод вычисления силы на схвате.

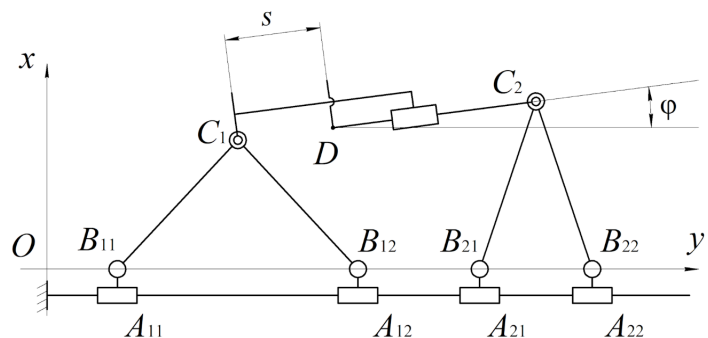


Рис.3. Схема плоского механизма

Механизм (Рис. 3) включает четыре кинематических цепи PRR, объединенных попарно в плоские двухподвижные лямбда-механизмы с общей

вращательной кинематической парой. Первым шагом является решение обратной задачи о положениях, то есть определение положения кареток для известного положения выходного звена. Для начала найдем координаты точек C_1 и C_2 :

$$x_{C1} = x_D - s \cos \varphi, y_{C1} = y_D - s \sin \varphi, x_{C2} = x_D + l_{C2D} \cos \varphi, y_{C2} = y_D + l_{C2D} \sin \varphi. \quad (1)$$

Рассмотрим отдельно один плоский лямбда-механизм (Рис. 4). Для треугольников $B_{i1}C_iC'_i$ и $B_{i2}C_iC'_i$, можно записать:

$$x_{A_{i1}} = x_{C_i} \mp \sqrt{l_{B_{i1}C_i}^2 - y_{C_i}^2}, \quad x_{A_{i2}} = x_{C_i} \pm \sqrt{l_{B_{i2}C_i}^2 - y_{C_i}^2}. \quad (2)$$

Подставив (1) в (2) для каждого i и j получим окончательные выражения для решения обратной задачи о положениях для всех цепей:

$$x_{A_{i1}} = x_D - s \cos \varphi \mp \sqrt{l_{B_{i1}C_i}^2 - (y_D - s \sin \varphi)^2}, \quad x_{A_{i2}} = x_D - s \cos \varphi \pm \sqrt{l_{B_{i2}C_i}^2 - (y_D - s \sin \varphi)^2}, \quad (3)$$

$$x_{A_{21}} = x_D + l_{C2D} \cos \varphi \mp \sqrt{l_{B_{21}C_2}^2 - (y_D + l_{C2D} \sin \varphi)^2}, \quad x_{A_{22}} = x_D + l_{C2D} \cos \varphi \pm \sqrt{l_{B_{22}C_2}^2 - (y_D + l_{C2D} \sin \varphi)^2}.$$

Выражение (3) является решением обратной задачи о положениях. Кроме того, было получено аналитическое решение прямой задачи о положениях. Для этого сначала были определены координаты точек C_i , в которых пересекаются окружности радиусами $l_{B_{i1}C_i}$ и $l_{B_{i2}C_i}$ (Рис. 5) Зная координаты x_{C_i} и y_{C_i} можно легко вычислить значения s и φ , а затем, используя выражение (1), и координаты x_D, y_D .

Далее была проанализирована рабочая зона механизма со следующими геометрическими параметрами $l_{B_{11}C_1} = l_{B_{22}C_2} = 0,25$ м, $l_{B_{12}C_1} = l_{B_{21}C_2} = 0,18$ м, $l_{C2D} = 0,22$ м, и пределами перемещения кареток от 0 до 1,5 м. Для этого в среде MATLAB были созданы прикладные программы, реализующие итерационный процесс анализа – перебор точек с заданным шагом с проверкой в каждой точке возможности решения обратной задачи о положениях в действительных числах. Примеры визуализации результата для постоянных значений $s = 0,14$ м и $\varphi = 20^\circ$ без учета конструктивных ограничений (предела сближения кареток и невозможности пересечь основание) и с их учетом представлены на Рис. 6.

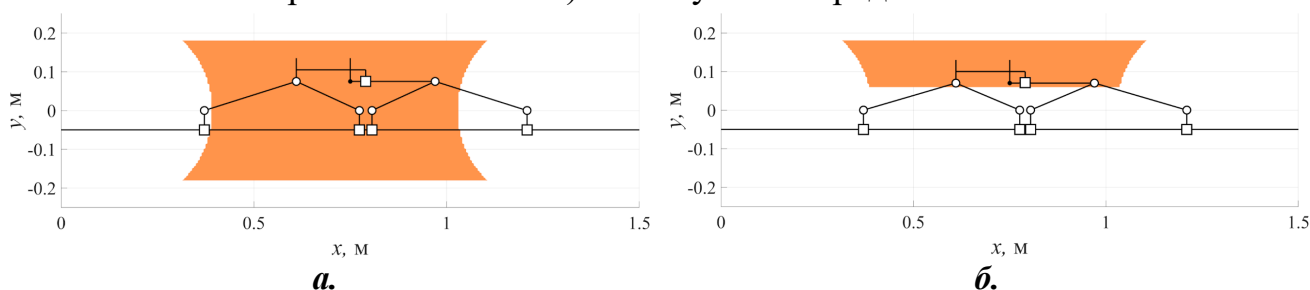


Рис 6. Рабочая зона без учета (а) и с учетом (б) конструктивных ограничений

Следующим этапом является скоростной и силовой анализ, а также анализ особых положений механизма, для чего был использован метод, основанный на исследовании свойств матрицы Якоби механизма и связанных с ней матриц.

Выражения, входящие в (3), можно представить в виде неявных функций $F_{ij}(x_D, y_D, \varphi, s) = 0$. После дифференцирования по времени получим следующую систему линейных уравнений (в матричной форме):

$$\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{q}} \Leftrightarrow \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (4)$$

где $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_D \dot{y}_D \dot{\varphi} \dot{s}]^T$ – вектор скоростей выходного звена, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x}_{A11} \dot{x}_{A12} \dot{x}_{A21} \dot{x}_{A22}]^T$ – вектор скоростей кареток, $\mathbf{J}^{-1} = (-\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x})/(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{q})$ – обратная матрица Якоби механизма, $\mathbf{A} = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x}$ и $\mathbf{B} = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{q}$ – матрицы, производные от матрицы Якоби.

Для решения обратной задачи о скоростях достаточно подставить известный вектор $\dot{\mathbf{x}}$ в выражение (4) и найти вектор $\dot{\mathbf{q}}$. Соответственно, решение прямой задачи сводится к решению системы (4) для заданного вектора $\dot{\mathbf{q}}$.

В большинстве практических применений, как правило, известно только требуемое абсолютное значение скорости выходного звена, но не направление его движения, которое может быть любым. В этой связи целесообразно производить скоростной анализ из условия максимизации приводных скоростей.

Из выражения (4) следует, что значение k -й ($k = 1 \dots 4$) приводной скорости, то есть k -го элемента вектора $\dot{\mathbf{q}}$ равно скалярному произведению вектора $\dot{\mathbf{x}}$ на вектор \mathbf{j}_k^{-1} , составленный из элементов k -й строки матрицы \mathbf{J}^{-1} . Тогда для некоторой заданной нормы $\|\dot{\mathbf{x}}\| = \text{const}$ максимальное значение скорости указанной скорости будет соответствовать такому направлению вектора $\dot{\mathbf{x}}$, при котором он оказывается коллинеарным вектору \mathbf{j}_k^{-1} , то есть для рассматриваемого механизма:

$$|\dot{x}_A|_{\max} = \max_{k=1 \dots 4} \left(|\dot{x}_{A(k)\max}| \right) = \max_{k=1 \dots 4} \left(\left(\sqrt{(j_{k,1}^{-1})^2 + (j_{k,2}^{-1})^2} \right) v_D + |j_{k,3}^{-1}| \omega + |j_{k,4}^{-1}| v_s \right). \quad (5)$$

где v_D – скорость точки D , ω – угловая скорость выходного звена, v_s – скорость раскрытия схвата.

Пример результатов итерационного анализа с решением обратной задачи о скоростях согласно выражению (5) для значений $v_D = 1$ м/с, $\omega = 1$ рад/с, $v_s = 1$ м/с при $s = 0,14$ м, $\varphi = 20^\circ$ представлен на Рис. 7.

Значение максимальной скорости кареток значительно возрастает при приближении к верхней и нижней границам рабочей зоны, где, как известно, встречаются особые положения типа «ПС», в которых выходное звено теряет степень свободы.

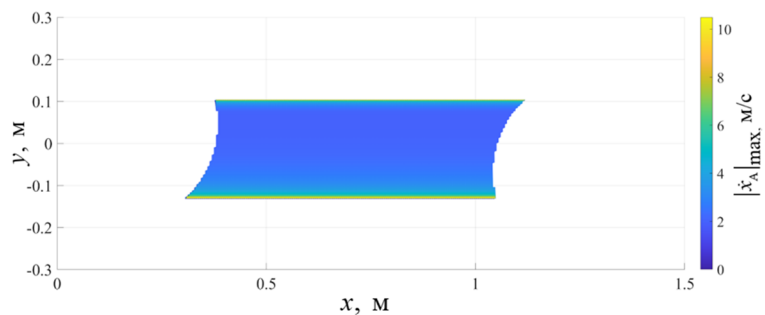


Рис. 7. Результат скоростного анализа

Матрица Якоби также может быть использована для статического силового анализа механизма. Вектор внешних нагрузок $\mathbf{P} = [F_x F_y T F_s]^T$, действующих на выходное звено механизма, связан с вектором приводных усилий (сил на каретках) $\mathbf{e} = [F_{A11} F_{A12} F_{A21} F_{A22}]$ через транспонированную матрицу Якоби механизма \mathbf{J}^T следующим образом:

$$-\mathbf{J}^T \mathbf{P} = \mathbf{e}. \quad (6)$$

По аналогии со скоростями для некоторой нормы $\|\mathbf{P}\| = const$ максимальное значение приводного усилия будет соответствовать такому направлению вектора \mathbf{P} , при котором он оказывается коллинеарным вектору \mathbf{j}_k^T , то есть:

$$|F_A|_{\max} = \max_{k=1..4} \left(|F_{A(k)\max}| \right) = \max_{k=1..4} \left(\left(\sqrt{(j_{k,1}^T)^2 + (j_{k,2}^T)^2} \right) F_D + |j_{k,3}^T| T + |j_{k,4}^T| F_s \right). \quad (8)$$

Формула (8) позволяет производить расчет для наилучшего направления вектора внешнего нагружения, максимизирующего приводные усилия. Пример результатов итерационного анализа рабочей зоны для $F_D = 1$ Н, $T = 1$ Н·м, $F_s = 1$ Н при $s = 0,14$ м и $\varphi = 20^\circ$ представлен на Рис. 8.

Наибольшие значения приводных усилий наблюдаются вдоль горизонтальных линий. В данных зонах располагается особое положение типа «ПУ», которое характеризуется тем, что выходное звено приобретает неконтролируемую подвижность. В особом положении типа «ПУ» определитель матрицы \mathbf{A} становится равным нулю. Для подтверждения нахождения особых положений данного типа был проведен итерационный анализ значений $\det(\mathbf{A})$ при $s = 0,14$ м, $\varphi = 20^\circ$ (Рис. 9).

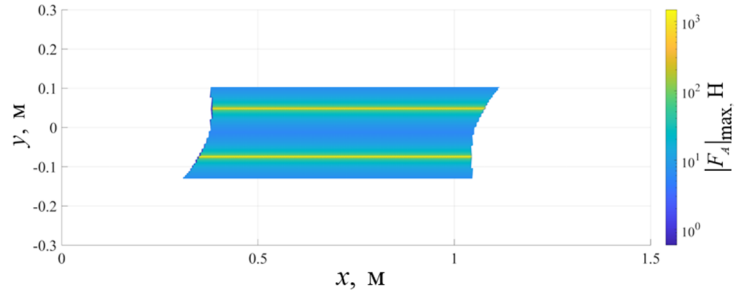


Рис. 8. Результаты силового анализа

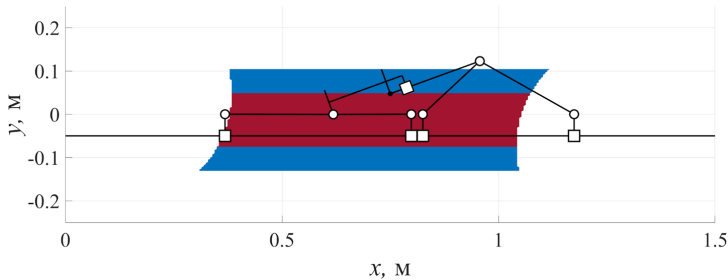


Рис. 9. Распределение знака $\det(\mathbf{A})$ по рабочей зоне красный – «плюс», синий – «минус»

Как можно видеть, границы областей рабочей зоны с положительным и отрицательным значением определителя матрицы \mathbf{A} в точности совпадают с горизонтальными линиями, вблизи которых наблюдается резкий рост приводных усилий. Перепишем систему (6) в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} F_{A11} \\ F_{A12} \\ F_{A21} \\ F_{A22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{A11}^{\text{BH}} \\ F_{A12}^{\text{BH}} \\ F_{A21}^{\text{BH}} \\ F_{A22}^{\text{BH}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{A11}^s \\ F_{A12}^s \\ F_{A21}^s \\ F_{A22}^s \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^T \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ T \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_s \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где индекс «вн» обозначает часть силы на каретке, возникающую из-за внешней нагрузки, а индекс «s» обозначает часть силы, обеспечивающую усилие на схвате.

Пусть $F_s = 1$ Н, тогда из (10) следует, что

$$\hat{F}_{A(k)}^s = -\mathbf{j}_k^T \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T = -j_{k,4}^T, \quad (11)$$

где $\hat{F}_{A(k)}^s$ – сила на k -й каретке, необходимая, чтобы развить 1 Н силы на схвате, \mathbf{j}_k^T – k -я вектор-строка матрицы \mathbf{J}^T , $j_{k,4}^T$ – элемент k -й строки четвертого столбца \mathbf{J}^T .

Пусть $F_{\text{пр}k}$ – сила, которую может развить k -й привод. Тогда, используя, выражения (10) и (11) можно найти значение максимально развиваемой силы на схвате, которую может обеспечить k -й привод при заданной внешней нагрузке. Соответственно, для механизма в целом значением максимально развиваемой силы на схвате определяется минимальным из значений для отдельных приводов:

$$|F_s|_{\max} = \min_{k=1\dots n} \left(|F_{s,k}|_{\max} \right) = \min_{k=1\dots n} \left(\frac{F_{\text{пр}k} - |F_{A(k)}^{\text{BH}}|}{|\hat{F}_{A(k)}^s|} \cdot 1 \text{ Н} \right). \quad (12)$$

С использованием выражения (12) был проведен итерационный анализ тех же условиях, что и ранее ($\varphi = 20^\circ$, $s = 0,14$ м) для $F_{\text{пр}} = 100$ Н без внешней нагрузки (Рис. 10а) и с внешней нагрузкой $F_x = F_y = 1$ Н, $T = 0,1$ Н·м (Рис. 10б).

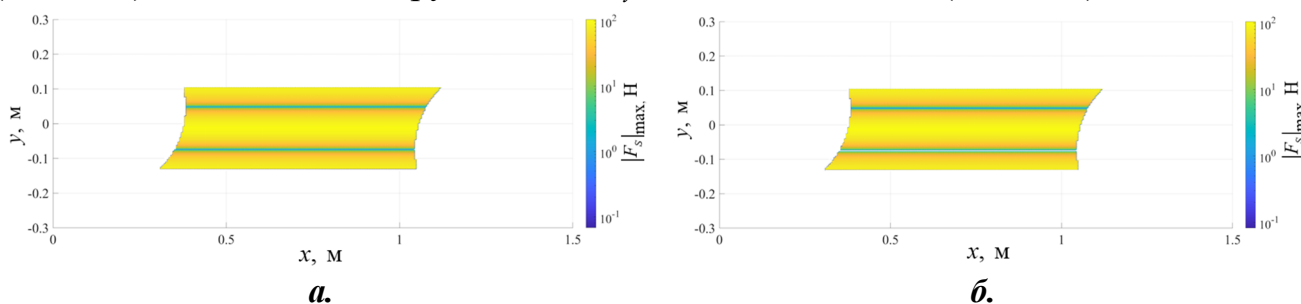


Рис 10. Максимальная сила на схвате без учета (а) и с учетом (б) внешней нагрузки

Как можно видеть, значение максимально развиваемой силы на схвате скачкообразно уменьшается вблизи особых положений типа «ПУ». При этом, если присутствует даже небольшая внешняя нагрузка, то в рабочей зоне имеется разрыв в районе горизонтальных прямых, соответствующих особым положениям указанного типа. В пределах этого разрыва значение силы, вычисляемой по формуле (12), становится отрицательным, то есть приводы механизма неспособны развить никакого усилия на схвате.

Таким образом, разработанная математическая модель механизма позволяет не только проводить скоростной и силовой анализ совместно с анализом особых положений, но также вычислять максимально развиваемое усилие на схвате по известным характеристикам двигателей приводов.

В главе 3 синтезирован пространственный поступательно-направляющий механизм параллельной структуры с интегрированным схватом, решена задача о положениях, проведен силовой и скоростной анализ, анализ особых положений.

В качестве основы разрабатываемого механизма была выбрана схема Delta с линейными приводами, в которую была введена кинематическая избыточность: добавлена четвертая кинематическая цепь, а платформа выполнена раздвижной. Предложено два исполнения механизма: исполнение «2+2» (Рис. 11а), у которого к каждой половине подвижной платформы присоединено по две цепи, и исполнение «3+1» (Рис. 11 б), у которого к одной половине платформы присоединено три цепи, к другой половине – одна цепь.

На первом этапе была решена обратная задача о положениях, в рамках которой известны координаты x_D , y_D , z_D и s выходного звена, а вычисляются, соответственно, перемещения h_i кареток приводных призматических пар.

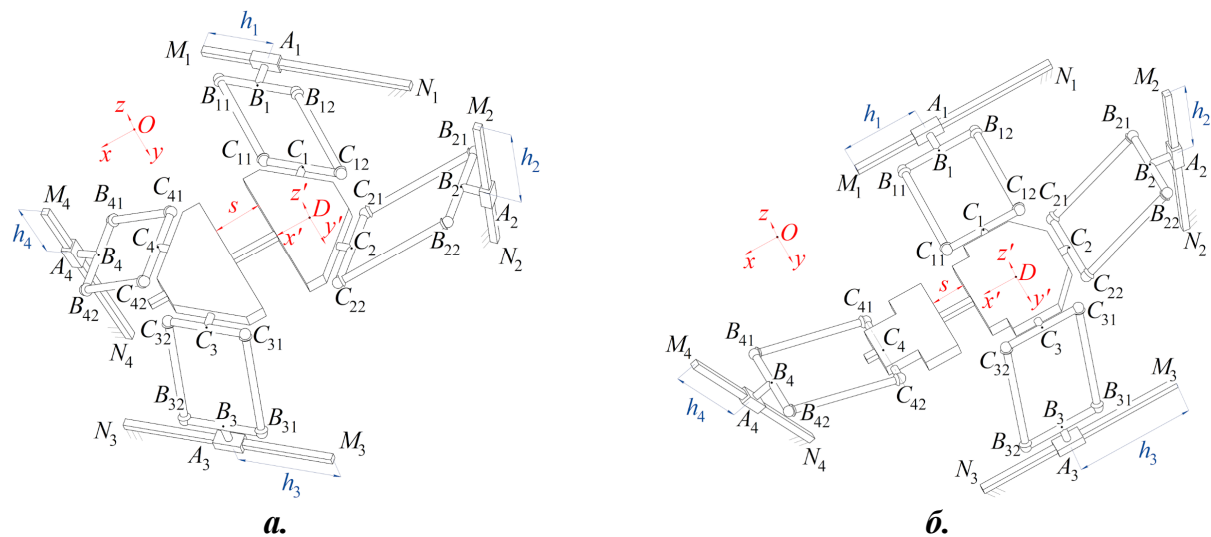


Рис 11. Исполнения «2+2» (а) и «3+1» (б) пространственного механизма
 При решении сначала вычисляются координаты точек C_i в системе $Oxyz$:

$$x_{C_i} = x_D + x'_{C_i}, \quad y_{C_i} = y_D + y'_{C_i}, \quad z_{C_i} = z_D + z'_{C_i}, \quad (13)$$

где

$$\text{для } 2+2: \begin{cases} x'_{C_i} = x'_{0C_i} & \text{если } i = 1, 2, \\ x'_{C_i} = x'_{0C_i} + s & \text{если } i = 3, 4, \end{cases} \quad \text{для } 3+1: \begin{cases} x'_{C_i} = x'_{0C_i} & \text{если } i = 1, 2, 3, \\ x'_{C_i} = x'_{0C_i} + s & \text{если } i = 4. \end{cases} \quad (14)$$

В выражении (14) дополнительный нижний индекс «0» указывает на то, что значение координаты x'_{C_i} соответствует $s = 0$.

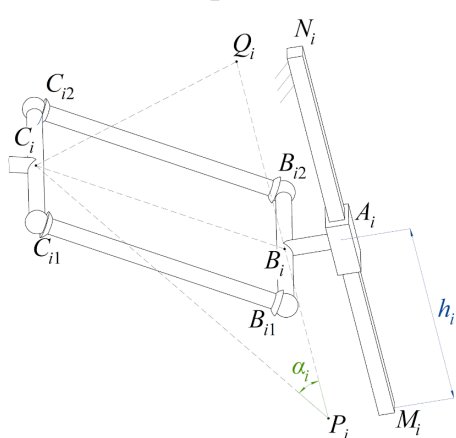


Рис. 12. Схема i -й цепи

Далее рассмотрим одну отдельную i -ю кинематическую цепь (Рис 12). Запишем теорему косинусов для угла α_i в треугольнике $C_iP_iQ_i$:

$$l_{CQ_i}^2 = l_{CP_i}^2 + l_{PQ_i}^2 - 2l_{CP_i}l_{PQ_i} \cos \alpha_i. \quad (15)$$

Так как координаты точек P_i и Q_i задаются геометрией механизма и известны, а координаты точки C_i вычисляются по формуле (13), длины сторон l_{CQ_i} , l_{CP_i} и l_{PQ_i} треугольника $C_iP_iQ_i$ могут быть легко вычислены по формулам расстояния между соответствующими точками. Расстояние между точками P_i и B_i равно h_i . Для треугольника $B_iC_iP_i$ в

можно записать теорему косинусов в следующем виде:

$$l_{BC_i}^2 = l_{CP_i}^2 + h_i^2 - 2l_{CP_i}h_i \cos \alpha_i. \quad (16)$$

Выразив $\cos \alpha_i$ из (15) и подставив его в (16), после преобразований получим:

$$h_i^2 + \frac{l_{CQ_i}^2 - l_{CP_i}^2 - l_{PQ_i}^2}{l_{PQ_i}} h_i + l_{CP_i}^2 - l_{BC_i}^2 = 0. \quad (17)$$

Выражение (17) представляет собой квадратное уравнение относительно h_i , общий вид решения которого хорошо известен. Для каждой цепи существует два решения обратной задачи о положениях, а для механизма в целом – шестнадцать.

В качестве примера был рассмотрен механизм с линейными направляющими длиной 0,57 м, образующими перевернутую пирамиду с углом наклона 45° . В исполнении «3+1» направляющие лежат в плоскостях Oxz и Oyz , а в исполнении «2+2» – повернуты на 45° вокруг оси Oz . Длины звеньев: $A_iB_i = 0,015$ м, $l_{BC_i} = 0,32$ м, $l_{B_1B_2i} = 0,08$ м, $C_iD = 0,0585$ м при $s = 0$. Пример решения для $x_D = 0,1$ м, $y_D = -0,15$ м, $z_D = -0,45$ м, $s = 0,05$ м представлен на Рис. 13.

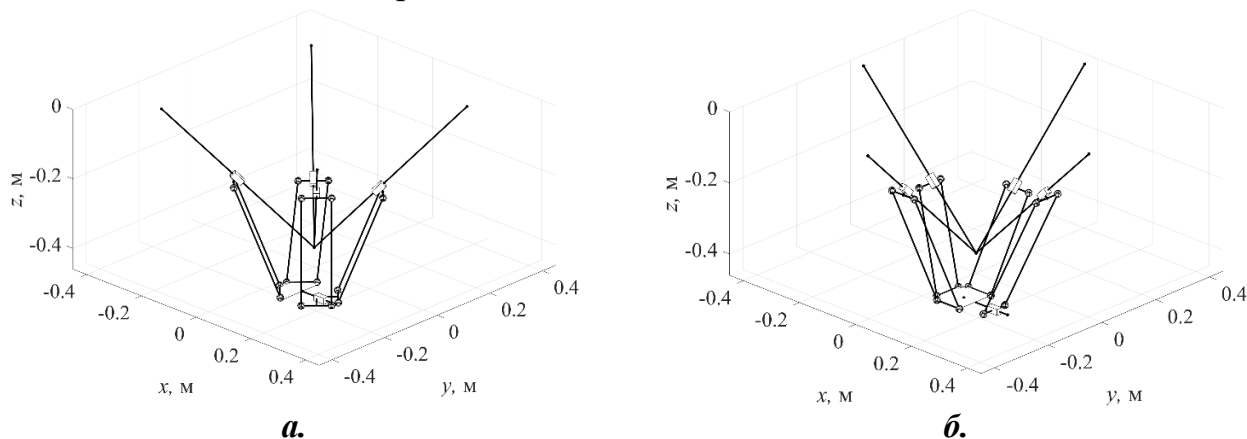


Рис 13. Примеры решения обратной задачи для исполнений «2+2» (а) и «3+1» (б)

Далее был проведен итерационный анализ рабочей зоны для трех разных значений s : 0 м, 0,04 м и 0,08 м. Пример визуализации результата для среднего значения (то есть, для 0,4 м) представлен на Рис. 14.

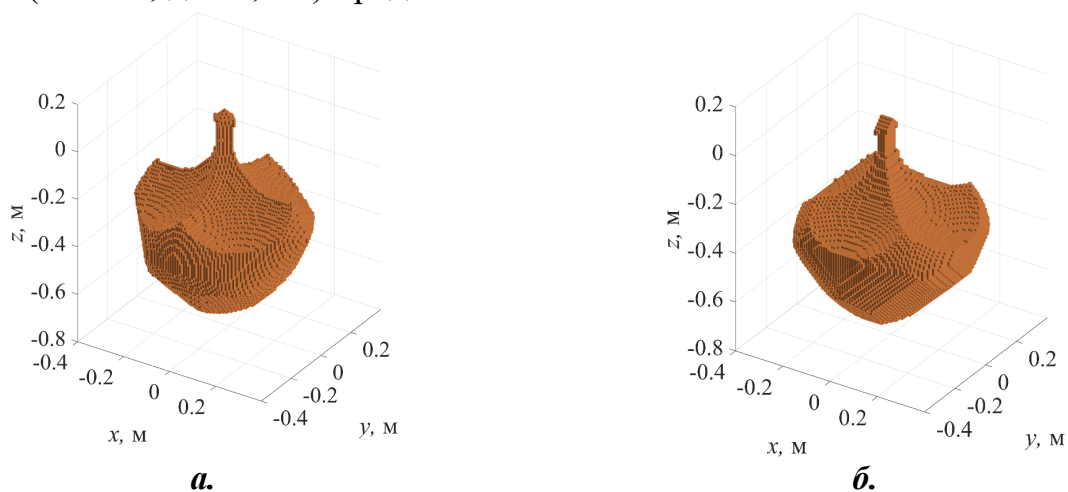


Рис 14. Рабочая зона исполнений «2+2» (а) и «3+1» (б) при $s = 0,4$ м

После решения обратной задачи о положениях была решена прямая задача, то есть для заданных перемещений кареток h_i вычислялись значения x_D , y_D , z_D и s . Для исполнения «3+1» данная задача может быть решена отдельно для части механизма, состоящей из половины платформы и трех присоединяемых к ней цепей. При этом необходимо найти координаты точки D , которая будет являться точкой пересечения трех сфер, радиусы которых равны l_{BC_i} , а центры находятся в точках E_i , полученных смещением точки B на расстояние l_{DC_i} параллельно отрезкам DC_i (по направлению от C_i к D).

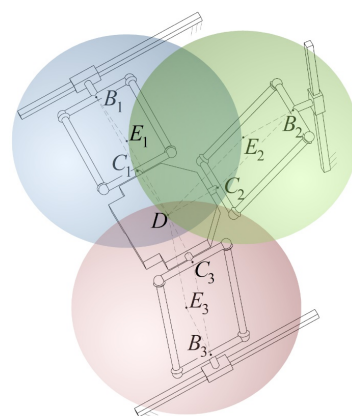


Рис. 15. Три сферы

Математически это означает, что необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (x_D - x_{E1})^2 + (y_D - y_{E1})^2 + (z_D - z_{E1})^2 = l_{BC1}^2, \\ (x_D - x_{E2})^2 + (y_D - y_{E2})^2 + (z_D - z_{E2})^2 = l_{BC2}^2, \\ (x_D - x_{E3})^2 + (y_D - y_{E3})^2 + (z_D - z_{E3})^2 = l_{BC3}^2. \end{cases} \quad (18)$$

Данная нелинейная система была решена следующим образом. Сначала из первого уравнения системы (18) были вычтены два других, что позволило получить систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными x_D , y_D , z_D . Из каждого уравнения новой линейной системы была выражена координата z_D , после чего второе уравнение вычтено из первого. В результате была получена линейная зависимость $y_D(x_D)$, которая после подстановки в первое уравнение линейной системы, позволила получить линейную зависимость $z_D(x_D)$. Наконец, при подстановке $y_D(x_D)$ и $z_D(x_D)$ в первое уравнение исходной системы (18) было получено квадратное уравнение относительно x_D . После решения данного уравнения, координаты y_D и z_D могут быть легко вычислены по полученным ранее зависимостям.

После того, как определены координаты точки D , из значения можно подставить в уравнение сферы для четвертой кинематической цепи:

$$(x_D + x'_{OC4} + s - x_{B4})^2 + (y_D + y'_{C4} - y_{B4})^2 + (z_D + z'_{C4} - z_{B4})^2 = l_{BC4}^2. \quad (19)$$

Уравнение является квадратным относительно s и может быть легко решено. Таким образом, система (18) будет иметь два решения, для каждого из которых существует по два решения уравнения (19), то есть число решений прямой задачи о положениях исполнения «3+1» равно четырем.

Для исполнения «2+2» необходимо решать систему из четырех, а не трех уравнений второй степени:

$$\begin{cases} (x_D - x_{E1})^2 + (y_D - y_{E1})^2 + (z_D - z_{E1})^2 = l_{BC1}^2, \\ (x_D - x_{E2})^2 + (y_D - y_{E2})^2 + (z_D - z_{E2})^2 = l_{BC2}^2, \\ (x_D + s - x_{0E3})^2 + (y_D - y_{E3})^2 + (z_D - z_{E3})^2 = l_{BC3}^2, \\ (x_D + s - x_{0E4})^2 + (y_D - y_{E4})^2 + (z_D - z_{E4})^2 = l_{BC4}^2. \end{cases} \quad (20)$$

Систему (20) можно вести к системе из трех линейных уравнений относительно x_D , y_D , z_D , часть коэффициентов которых будет зависеть от s . Для указанной системы можно составить выражения для расчета определителей матриц, возникающих при решении по методу Крамера. Данные определители будут иметь линейную или квадратичную зависимость от s . Соответственно, используя данные определители, можно получить зависимости $x_D(s)$, $y_D(s)$, $z_D(s)$. Подставляя эти зависимости в первое или второе уравнение системы (20) можно получить уравнение четвертой степени относительно s , которое может быть решено аналитически методом Феррари, либо численно. Таким образом, для прямой задачи о положениях исполнения «2+2», как и для «3+1», существует четыре решения.

Далее был проведен скоростной анализ механизма. Выражение для определения максимальной скорости на приводе имеет следующий вид:

$$|\dot{h}|_{\max} = \max_{i=1\dots 4} (|\dot{h}_{i\max}|) = \max_{i=1\dots 4} \left(\left(\sqrt{(j_{i,1}^{-1})^2 + (j_{i,2}^{-1})^2 + (j_{i,3}^{-1})^2} \right) v_D + |j_{i,4}^{-1}| v_s \right), \quad (21)$$

где $j_{i,p}^{-1}$ – элемент i -й строки, p -го столбца матрицы \mathbf{J}^{-1} ; v_D , v_s – абсолютные значения скорости выходного звена, и скорости раздвижения схвата соответственно; $|\dot{h}_{i\max}|$ – максимизированное значение скорости в i -м приводе.

Пример результатов итерационного анализа по формуле (21) при $s = 0,05$ м для $v_D = 1$ м/с, $v_s = 1$ м/с представлен на Рис. 16. Для наглядности визуализирован срез рабочей зоны при значении координаты $z_D = -0,45$ м.

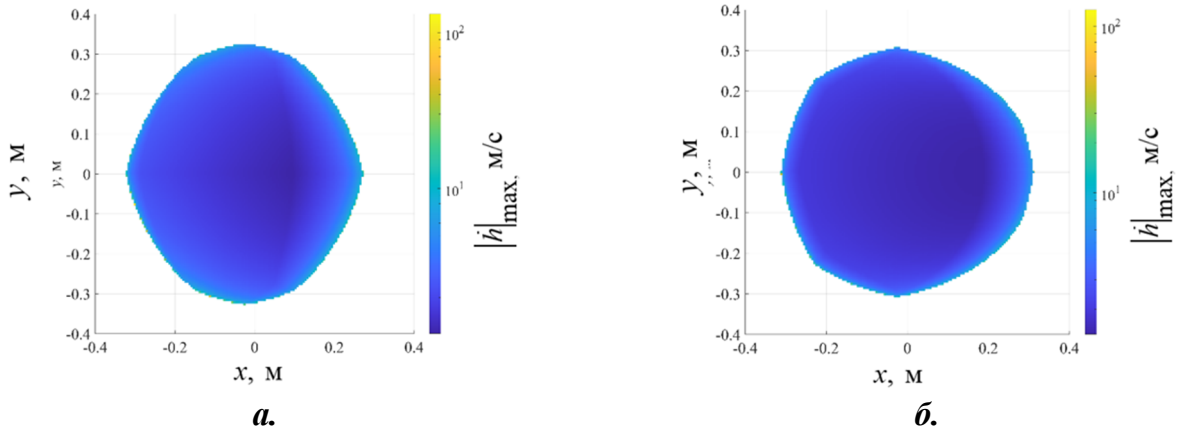


Рис 16. Пример результатов скоростного анализа для исполнений «2+2» (а) и «3+1» (б)

Далее был проведен силовой анализ по следующей зависимости:

$$|F_h|_{\max} = \max_{i=1\dots 4} (|F_{hi\max}|) = \max_{i=1\dots 4} \left(\left(\sqrt{(j_{i,1}^T)^2 + (j_{i,2}^T)^2 + (j_{i,3}^T)^2} \right) F_D + |j_{i,4}^T| F_s \right), \quad (22)$$

где $j_{i,p}^T$ – элемент i -й строки, p -го столбца матрицы \mathbf{J}^T ; F_D , F_s – абсолютные значения силы, приложенной к точке D , и силы на схвате соответственно; $|F_{hi\max}|$ – максимизированное значение силы в i -м приводе.

Результат анализа по формуле (22) при $F_s = F_D = 1$ Н представлен на Рис. 17.

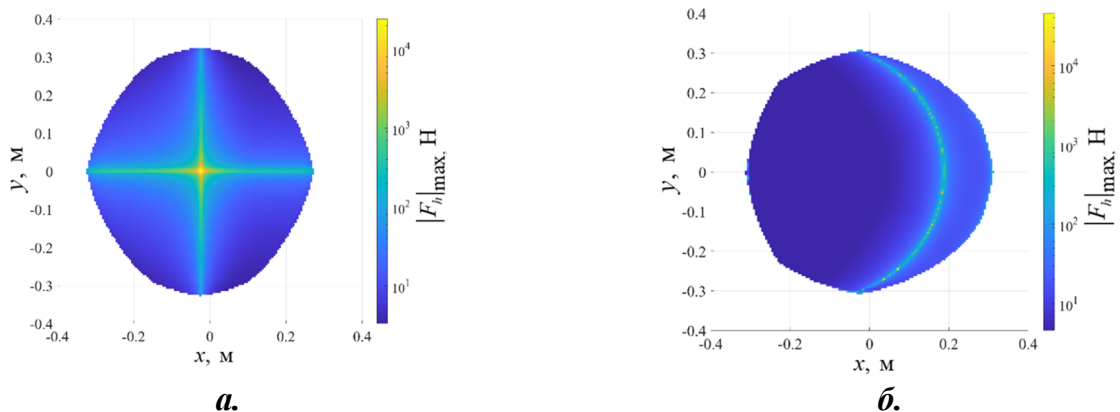


Рис 17. Пример результатов силового анализа для исполнений «2+2» (а) и «3+1» (б)

Для обоих исполнений наблюдается рост приводных сил в пределах среза рабочей зоны, что указывает на наличие особых положений типа «ПУ», и было подтверждено последующим итерационным анализом знака определителя

матрицы A . Также установлено, что для исполнения «2+2» имеет место редкий случай особых положений типа «ПУ» с конечными перемещениями (Рис. 18).

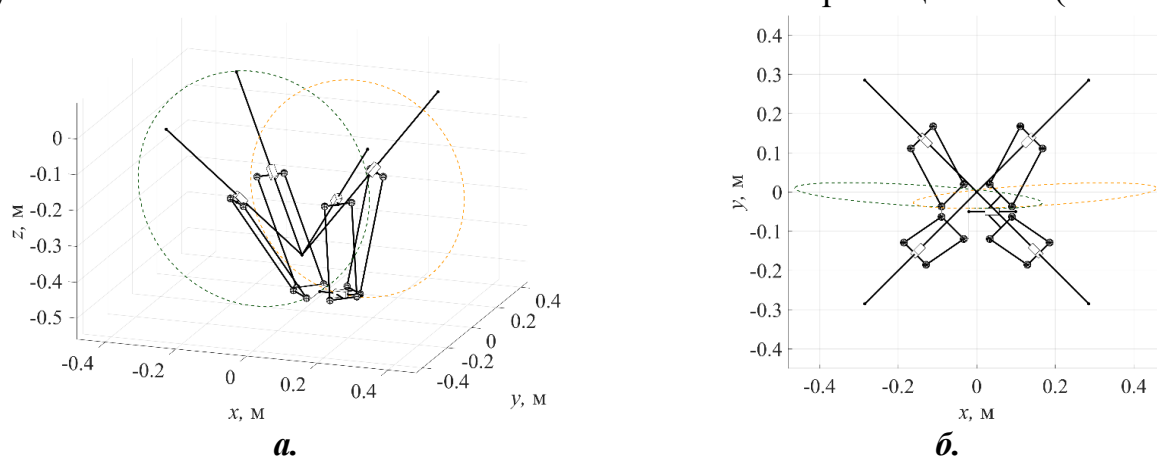


Рис 18. Примеры особых положений типа «ПУ» с конечными перемещениями

Если точка D находится в плоскости Oxz (Рис. 18а), то при остановленных приводах она может занимать любое положение на зеленой окружности, а симметричная ей точка на второй половине платформы – на желтой окружности. В результате существует бесконечное количество прямых, параллельных оси призматической пары платформы, соединяющих точки на этих окружностях, а значит выходное звено может свободно перемещаться параллельно плоскости, в которой лежат указанные окружности, изменяя свою длину. Если точка D находится в плоскости, смещенной на $-s/2$ относительно плоскости Oyz (Рис. 18б), то данные окружности уже не лежат в одной плоскости, но расположены симметрично, и выходное звено также сможет неконтролируемо перемещаться.

Указанные выше плоскости разделяют рабочую зону исполнения «2+2» на четыре части, то есть только порядка 25% от ее общего теоретического объема может быть использовано при работе механизма (Рис. 19а). При этом для исполнения «3+1» анализ показал (Рис. 19б), что полезный объем составляет более 80%. Однако, если для исполнения «2+2» отказаться от симметрии выходного звена и расположить направляющие тем же образом, что и в исполнении «3+1», то полезный объем рабочей зоны увеличится до 95% (Рис. 19в).

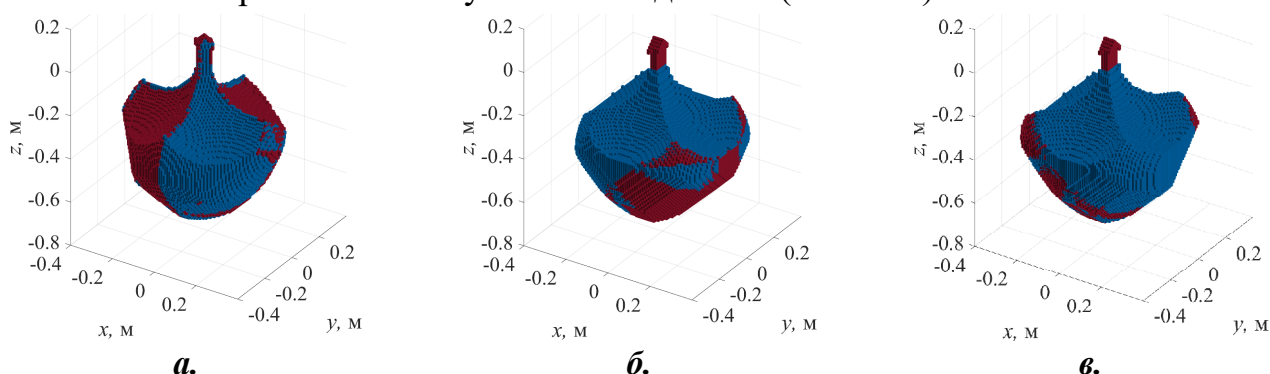


Рис 19. Распределение знака $\det(A)$ по рабочей зоне (красный – «плюс», синий – «минус») для исполнений «2+2» (а), «3+1» (б) и «2+2» с повернутыми направляющими (в)

Далее был проведен анализ максимально развиваемого усилия на схвате с применением той же методики, что и для плоского механизма, без учета внешней нагрузки (Рис. 20) и с внешней нагрузкой $F_x = F_y = F_z = 1$ Н (Рис. 21).

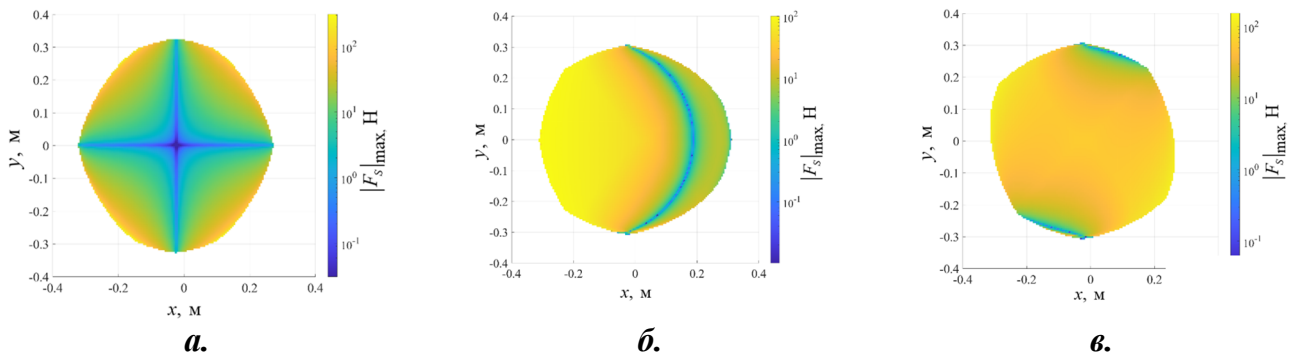


Рис 20. Распределение максимально развиваемой силы на схвате без внешней нагрузки для исполнений «2+2» (а), «3+1» (б) и «2+2» с повернутыми направляющими (в)

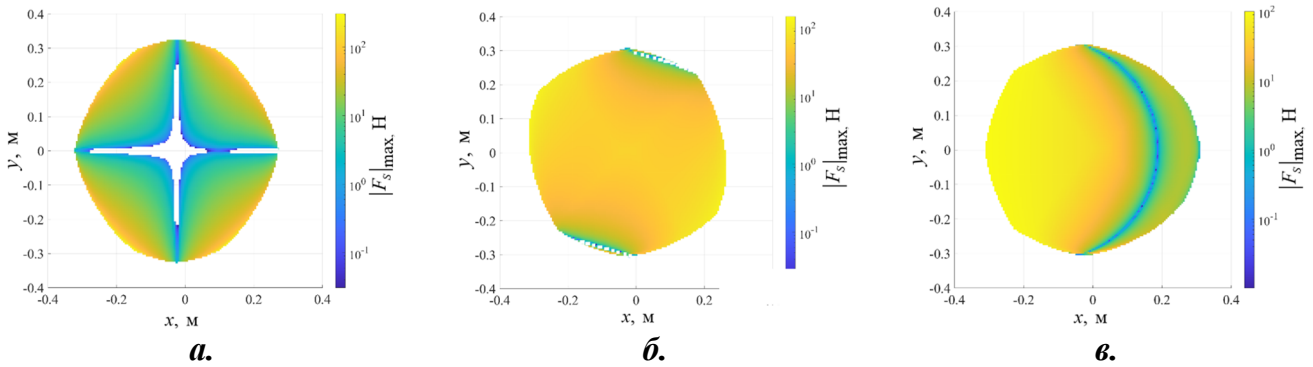


Рис 21. Распределение максимально развиваемой силы на схвате с внешней нагрузкой для исполнений «2+2» (а), «3+1» (б) и «2+2» с повернутыми направляющими (в)

Как и в случае с плоским механизмом, при приложении даже минимальной нагрузки в рабочей зоне возникают области, в которых расчетное значение силы на схвате получается отрицательным, то есть приводы неспособны обеспечить захват.

В главе 4 разработаны и изготовлены прототипы исследованных механизмов, и с помощью прототипа плоского механизма проведено экспериментальное исследование максимальной силы, развиваемой на схвате.

Для проектирования механизмов использовалась САПР Компас 3D. Для быстроты сборки и снижения стоимости прототипов использовались стандартные узлы и детали, а все нестандартные элементы изготавливались посредством трехмерной печати из пластика (Рис. 22). Размеры прототипа пространственного механизма соответствуют указанным ранее. Для прототипа плоского механизма: $l_{AB} = 56,5$; $l_{BC} = 270$ мм; $l_{C2D} = 67$ мм; пределы хода кареток: [50, 1050] мм; пределы изменения величины s : [67, 147] мм.

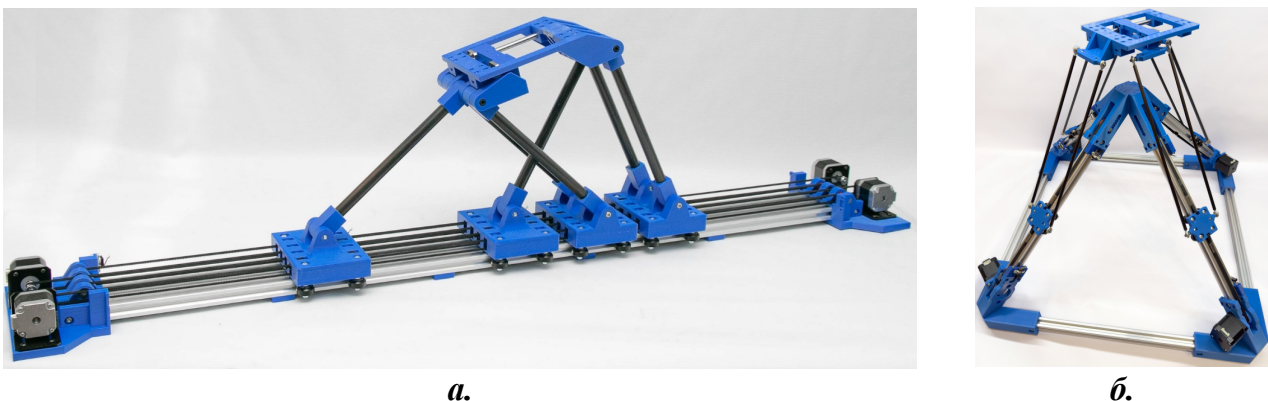


Рис 22. Прототипы плоского (а) и пространственного (б) механизмов

После сборки прототипа плоского механизма был проведен эксперимент по проверке предложенной расчетной методики для определения силы на схвате.

В рамках первого этапа эксперимента осуществлялось сближение двух половин выходного звена, в процессе которого помощью динамометра измерялось максимальное значение силы на схвате до момента, когда один из двигателей начинал пропускать шаги (Рис. 23а). Сближение осуществлялось с пятью разными значениями скорости, для каждого из которых было проведено по 20 испытаний. После этого вычислялось математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение величины максимальной силы на схвате (Табл. 1). Также все выборки были проверены на принадлежность нормальному распределению по критерию Андерсона-Дарлинга (p -значение $\geq 0,05$).

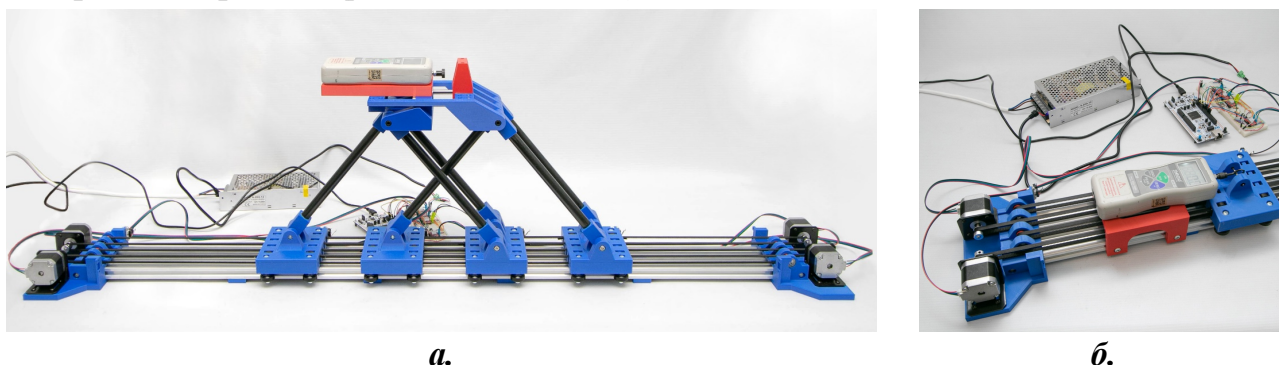


Рис 23. Механизм в процессе первого (а) и второго (б) этапа эксперимента

Табл. 1 Результаты измерения силы на схвате

Параметры выборки	Скорость движения кареток (v_A), мм/с				
	1	1,25	1,667	2,5	5
μ_{F_s} , Н	48,31	47,18	46,09	44,87	40,54
σ_{F_s} , Н	0,999	0,889	0,976	0,987	1,142
p -значение	0,117	0,880	0,451	0,256	0,692

На втором этапе эксперимента (Рис. 23б) от кареток механизма были отсоединены штанги, и для тех же пяти значений скоростей измерена сила на каретке F_k , которую может развить каждый k -й привод. После этого были определены параметры распределения этой силы μ_{F_k} и σ_{F_k} , и для значения внешней силы $F_y = -10,45$ Н рассчитаны параметры распределения максимального значения силы на схвате, которое может быть обеспечено каждым приводом (Табл. 2):

$$\mu_{F_s,k}^* = \frac{\mu_{F,k} - F_{A(k)}^{BH}}{|j_{k,4}^T|}, \quad \sigma_{F_s,k}^* = \frac{\sigma_{F,k}}{|j_{k,4}^T|}, \quad (23)$$

Табл. 2 Результаты расчета значений силы на схвате по силам на каретках

Индекс каретки	Параметры выборки	Скорость движения кареток (v_A), мм/с				
		1	1,25	1,667	2,5	5
«11»	$\mu_{F_s,1}^*$, Н	53,704	53,784	53,555	52,233	46,246
	$\sigma_{F_s,1}^*$, Н	0,882	0,869	0,825	0,853	0,911
«12»	$\mu_{F_s,2}^*$, Н	60,401	59,606	58,892	56,559	52,245
	$\sigma_{F_s,2}^*$, Н	2,387	1,700	2,207	2,050	2,406
«21»	$\mu_{F_s,3}^*$, Н	46,236	44,546	43,720	41,612	35,505
	$\sigma_{F_s,3}^*$, Н	1,336	0,759	0,599	0,740	0,894
«22»	$\mu_{F_s,4}^*$, Н	69,470	68,947	67,851	65,488	59,495
	$\sigma_{F_s,4}^*$, Н	0,776	0,707	0,624	0,788	0,686

Минимальные расчетные значения силы на схвате были получены для каретки с индексом «21», что соответствует наблюдениям, сделанным в процессе эксперимента, по которым двигатель именно этой каретки пропускал шаги. Значение относительного отклонения между расчетным и экспериментальным значениями составило 4,28 % для $v_A = 1$ мм/с, 5,58 % для $v_A = 1,25$ мм/с, 5,14 % для $v_A = 1,667$ мм/с, 7,25 % для $v_A = 2,5$ мм/с и 12,42 % для $v_A = 5$ мм/с.

Таким образом, экспериментальные исследования подтвердили принципиальную возможность использования предложенной расчетной методики, основанной на использовании матрицы Якоби механизма, для оценки величины максимальной силы на схвате механизма.

Основные результаты и выводы:

1. Предложены структурные схемы новых плоского и поступательно-направляющего механизмов параллельной структуры с интегрированным схватом. Реализация функции захвата объекта манипулирования выходным звеном механизмов осуществляется за счет наличия кинематической избыточности. Выходное звено выполнено из двух частей, соединенных призматической кинематической парой, возможность изменения расстояния между которыми является дополнительной (избыточной) подвижностью. Для поступательно-направляющего механизма предложено два структурно различающихся возможных варианта исполнения;

2. Разработаны математические модели предложенных механизмов. На основе анализа геометрии механизмов получены уравнения связи, а также решены прямая и обратная задача о положениях. Решение данных задач позволило провести итерационный анализ рабочих зон механизмов с целью установления их размеров и формы. Дифференцированием уравнений связи получен аналитический вид матрицы Якоби механизмов, с помощью которой проведен анализ кинематических и силовых характеристик механизмов.

3. Проведен анализ особых положений предложенных механизмов, включающий также оценку близости к ним с использованием условий максимизации приводных скоростей и усилий. При этом для одного из исполнений поступательно-направляющего механизма показана значительная зависимость размера объема рабочей зоны, свободного от особых положений, от расположения кинематических цепей относительно вертикальной плоскости, содержащей ось избыточной подвижности. Кроме того, предложена методика определения максимальной силы, развиваемой на схвате механизмов для заданной внешней нагрузки при известных предельно допустимых значениях усилий на приводах;

4. Разработана конструкция, проведено трехмерное моделирование, изготовление, сборка и отладка физических прототипов предложенных механизмов. С использованием САД-моделей и физических прототипов механизмов проведена проверка работоспособности предложенных структурных схем. Также на базе прототипа плоского механизма проведено экспериментальное исследование по проверке расчетной методики определения максимальной силы на схвате, подтвердившее ее применимость.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых изданиях, включенных в перечень ВАК РФ:

1. Исполлов Е.М., Ларюшкин П.А., Сеницына Ю.В. Скоростной и силовой анализ кинематически избыточного плоского механизма параллельной структуры с интегрированным схватом // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2025. №10 (787). С. 3–12.
2. Ларюшкин П.А., Исполлов Е.М., Долгих А.И. Решение задачи о положениях и исследование рабочей зоны плоского кинематически избыточного механизма параллельной структуры // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2023. №11 (764). С. 20-28.

В изданиях, индексируемых в базах Scopus и Web of Science:

3. Khrestina A., Ispolov E., Medovshchikov A., Laryushkin P. General Solution for the Inverse Kinematics of Parallel Robots with PRR Kinematic Chains // Advances in Mechanical Engineering. MMESE 2025. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2026. Pp. 85-93.
4. Laryushkin P., Antonov A., Ispolov E., Goncharova M., Aydil A.C. Novel Kinematically Redundant (3+1)-DOF Delta-type Parallel Mechanisms // Robotics. 2025. № 11(14). Article 170.

Другие публикации:

5. Исполлов Е.М., Ларюшкин П.А. К расчету усилий, связанных с избыточной подвижностью в механизмах параллельной структуры // XXXVII Международная инновационная конференция молодых ученых по современным проблемам машиноведения. 9-11 декабря, Москва. 2025. С. 159-162.
6. Исполлов Е. Решение обратной задачи о положениях механизма типа Delta с интегрированным схватом // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях (ИАМП-2025). Материалы XX юбилейной Всероссийской (с международным участием) научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. 22–24 октября, Бийск. 2025. С. 217–219.
7. Хрестина А.А., Исполлов Е.М., Ларюшкин П.А. Обобщенное решение обратной задачи о положениях параллельных механизмов n-PRR // Современное машиностроение. Наука и образование. 2025. № 14. С. 280-289.