

На правах рукописи



Хрестина Арина Артуровна

**СИНТЕЗ И АНАЛИЗ СФЕРИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ
СТРУКТУРЫ С ЛИНЕЙНЫМИ ПРИВОДАМИ**

Специальность 2.5.2. Машиноведение

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Москва, 2026

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук» (ИМАШ РАН)

Научный руководитель: **Ларюшкин Павел Андреевич**
доктор технических наук, доцент,
профессор кафедры основ конструирования
машин ФГАОУ ВО «МГТУ им. Н. Э. Баумана»,
г. Москва

Официальные оппоненты: **Несмиянов Иван Алексеевич**
доктор технических наук, профессор,
проректор по учебной работе ФГБОУ ВО
«Волгоградский государственный аграрный
университет»

Яцун Сергей Фёдорович
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой механики, мехатроники и
робототехники ФГБОУ ВО «Юго-Западный
государственный университет», г. Курск

Ведущая организация: **ФГАОУ ВО "МГТУ "СТАНКИН"**, г. Москва

Защита состоится «22» сентября 2026 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета 24.1.075.01 на базе федерального государственного бюджетного учреждения науки Института машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук (ИМАШ РАН) по адресу: 101000, Москва, М. Харитоньевский пер., д. 4.

Отзывы на автореферат, заверенные печатью учреждения (организации), просьба направлять по адресу: 101000, Москва, М. Харитоньевский пер., д. 4., ученому секретарю совета 24.1.075.01.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИМАШ РАН и на сайте <http://imash.ru/>

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, д.т.н.
Рашоян Гагик Володяевич



Актуальность темы диссертации

С конца второй половины XX века наблюдается рост научных исследований и практических применений механизмов параллельной структуры, то есть механизмов, с несколькими кинематическими цепями, соединяющими неподвижное основание и выходное звено. Такие механизмы обладают определенными преимуществами над традиционными роботами последовательной структуры, а именно: меньшей массой подвижных частей и, как следствие, лучшими показателями инерции и большими допустимыми скоростями работы; более высокой жесткостью за счет структуры пространственной фермы, позволяющей распределять нагрузки между цепями; более высокой грузоподъемностью относительно собственной массы манипулятора. Указанные преимущества обусловили широкое распространение механизмов параллельной структуры в различных отраслях производства. Так, широко известны такие представители данного класса механизмов, как платформа Гофа-Стюарта, применяющаяся в авиатренажерах, платформах стабилизации, медицинских устройствах и т.д., а также механизм Delta, используемый в линиях по сортировке и упаковке, 3D-принтерах, прототипах станков и тактильных устройствах.

Различные механизмы параллельной структуры также применяются в оптических устройствах, системах ориентации и стабилизации телескопов. Для подобных задач зачастую требуется обеспечение возможности изменения ориентации выходного звена при сохранении его положения в пространстве. Механизмы, реализующие такой тип движения, называют сферическими.

Как правило, в кинематических цепях сферических механизмов используется вращательный тип привода, а, соответственно, применение линейного привода является, скорее, исключением. В то же время, использование линейного привода в механизмах параллельной структуры имеет свои преимущества. Так, например, винтовые передачи, часто используемые в таких приводах, позволяют добиться большого передаточного отношения при отсутствии люфтов, что особенно важно в тех случаях, когда механизм предполагается эксплуатировать в широком диапазоне температур. Также данный тип привода наиболее удобен для реализации точных перемещений. Кроме того, использование линейной направляющей во многих случаях позволяет уменьшить длину входного звена механизма и, как следствие, уменьшить массу подвижных элементов, закрепленных консольно. Несмотря на указанные потенциальные преимущества, количество исследований, посвященных синтезу и анализу сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами относительно невелико. Данный факт может быть отчасти объяснен тем, что для механизмов подобного типа использование вращательного привода кажется наиболее естественным и позволяет минимизировать количество кинематических пар в цепи. Таким образом, настоящая работа, посвященная вопросам синтеза и анализа сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами, является актуальной.

Цель работы – разработка новых сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами и исследование их функциональных характеристик.

Задачи, решаемые в работе:

1. Структурный синтез возможных вариантов кинематических цепей с последовательно расположенными одноподвижными кинематическими парами, позволяющих реализовывать сферическое движение выходного звена механизма за счет приведения в движение активной призматической пары цепи;

2. Выбор наиболее подходящих для дальнейших теоретических исследований и потенциальных практических применений вариантов структуры кинематических цепей механизма из условия минимизации возможности его попадания в особые положения разных типов;

3. Вывод уравнений связи, аналитическое решение обратной задачи о положениях, задачи о скоростях, а также итерационное исследование формы и размеров рабочей зоны выбранного механизма, включая анализ особых положений и близости к ним;

4. Разработка конструкции, трехмерное моделирование, изготовление, сборка и отладка физического прототипа механизма, а также экспериментальная проверка его работоспособности.

Область исследования

Содержание диссертации соответствует пунктам 1, 2 и 3 паспорта научной специальности 2.5.2. Машиноведение: «Синтез структурных и кинематических схем механизмов и обобщенных структурных схем машин, оптимизация параметров»; «Теория и методы проектирования машин и механизмов, систем приводов, узлов и деталей машин»; «Методы кинематического и динамического анализа, в том числе математического моделирования, анимационного и экспериментального исследования механизмов».

Научная новизна:

1. Разработан оригинальный метод структурного синтеза, основанный на анализе винтовых уравнений скоростей, позволивший определить все возможные варианты кинематических цепей сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами;

2. С применением винтового исчисления впервые в общем виде решена задача определения геометрических условий попадания в особые положения сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами;

3. Разработана математическая модель механизма $3-(R\underline{P}R)R'R'$, основанная на аналитическом решении обратной задачи о положениях и задачи о скоростях, позволяющая проводить анализ кинематики механизма, а также исследовать его рабочую зону и особые положения.

Практическая значимость:

1. Определены схемы сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами, наиболее подходящие для практической реализации ввиду минимизации возможности попадания в особые положения различных типов;

2. Разработаны прикладные программы, реализующие аналитические алгоритмы расчета кинематики и итерационные алгоритмы анализа и визуализации

рабочей зоны и особых положений механизма $3-(RPR)R'R'$, в том числе с учетом конструктивных ограничений;

3. Создан физический прототип механизма $3-(RPR)R'R'$, который может служить модельным объектом для различных экспериментальных исследований и отработки алгоритмов управления сферическими механизмами параллельной структуры с линейными приводами.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод структурного синтеза кинематических цепей, основанный на анализе винтовых уравнений скоростей, и новые структурные схемы сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами, полученные с использованием данного метода;

2. Результаты анализа по определению в общем виде геометрических условий попадания сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами в особые положения различных типов;

3. Математическая модель и результаты анализа кинематики, рабочей зоны и особых положений механизма $3-(RPR)R'R'$, а также результаты натурального эксперимента по проверке работоспособности указанного механизма.

Обоснованность и достоверность полученных результатов

Обоснованность и достоверность научных результатов подтверждается использованием общепринятых в области теоретической механики и теории механизмов и машин расчетных методик и допущений, применением современного программного обеспечения, а также проверкой теоретических результатов компьютерным моделированием и натурным экспериментом.

Реализация результатов работы

Научные результаты, полученные в диссертации, приняты к использованию в АО «Концерн «Моринсис-Агат» и в учебном процессе МГТУ им. Н. Э. Баумана, что подтверждено соответствующими актами.

Соответствие работы тематике НИР организации

Работа выполнена в рамках государственного задания, код (шифр) научной темы, присвоенной учредителем (организацией) FFGU-2024-0022.

Апробация работы

Основные результаты работы прошли положительную апробацию на 14-й международной научной конференции «Современное машиностроение: наука и образование» (MMESE 2025), Санкт-Петербург, 2025; 20-й всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях» (ИАМП-2025), Бийск, 2025; 37-й международной инновационной конференции молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения (МИКМУС-2025), Москва, 2025.

Публикации

Основные научные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 8 научных работах, в том числе 3 статьях в журналах, включенных в перечень ВАК

РФ, 2 статья в изданиях, индексируемых в базах Scopus и Web of Science, 3 работах, индексируемых в РИНЦ.

Объем и структура работы

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 112 наименований и приложения. Объем диссертации составляет 122 страницы, включая 63 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель работы и решаемые в ней задачи, научная новизна, практическая значимость и положения, выносимые на защиту.

В главе 1 проведен обзор научных исследований и практических применений механизмов параллельной структуры, основное внимание уделено механизмам, реализующим сферический тип движения выходного звена.

Механизмы роботов-манипуляторов по типу кинематической структуры можно разделить на параллельные и последовательные (большинство из них имеют антропоморфную структуру). Главное отличие механизмов параллельной структуры состоит в том, что выходное звено (рабочий орган) соединено с основанием несколькими кинематическими цепями, а не одной.

Механизмы параллельной структуры со сферическим типом движения выходного звена имеют широкое практическое применение в оптической технике, экзоскелетах и элементах гуманоидной робототехники, медицинских роботах (Рис. 1а), устройствах для реализации микроперемещений, системах ориентации камер (Рис. 1б) и тарелок телескопов, авиатренажерах.



Рис. 1а. Устройство для проведения дистанционных операций

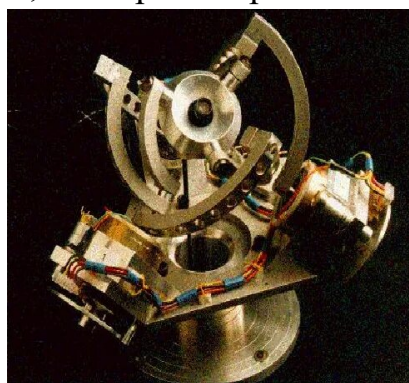


Рис. 1б. Механизм Agile Eye

При этом в большинстве сферических механизмов используется вращательный тип привода, что представляется наиболее естественным решением, так как позволяет минимизировать количество шарниров в кинематических цепях, что, безусловно, имеет свои преимущества. Так, меньшее количество шарниров позволяет уменьшить накопление погрешности при передаче движения на выходное звено, но при этом существует необходимость повышения требований по точности изготовления шарниров и промежуточных звеньев.

В тоже время, использование линейных приводов в механизмах параллельной структуры также имеет определенные преимущества. Так, например,

линейный привод является наиболее удобным при необходимости реализации точных перемещений за счет возможности получения большого передаточного отношения. Как следствие, данный тип привода также позволяет получить значительный выигрыш в силе. Еще одним преимуществом линейного привода является относительная простота обеспечения отсутствия люфтов в передаче в том числе при эксплуатации в широком диапазоне температур, чего крайне сложно добиться при использовании вращательного привода с редуктором.



Рис. 2. Механизм «Omni-Wrist»

Несмотря на наличие перечисленных потенциальных преимуществ линейного привода над вращательным, в сферических механизмах параллельной структуры линейный привод не нашел широкого распространения. Наиболее известным механизмом с данным типом привода, реально применяемым на практике, является OmniWrist (Рис. 2). Однако стоит отметить, что кинематически основная часть структуры данного механизма включает только вращательные пары, а линейные приводы расположены в отдельных рычагах, «качающих» входное звено относительно первого вращательного шарнира цепи, закрепленного на основании.

В главе 2 предложен метод структурного синтеза кинематических цепей, реализующих сферическое движение выходного звена за счет приведения в движение активной призматической пары, основанный на анализе винтовых уравнений скоростей. С применением винтового исчисления проведен анализ условий попадания синтезированных цепей и механизмов в различные типы особых положений, что позволило определить наиболее подходящую для дальнейших исследований структурную схему.

Синтез сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями подвижности и линейными приводами необходимо начать с одной кинематической цепи, состоящей только из неподвижных пар. Кинематическая цепь такого механизма должна включать минимум одну приводную призматическую пару (обозначаются «P») и три вращательные пары (обозначаются «R»). Все пары расположены последовательно. Сначала были рассмотрены варианты структуры 3R1P, которые представлены на Рис. 3.

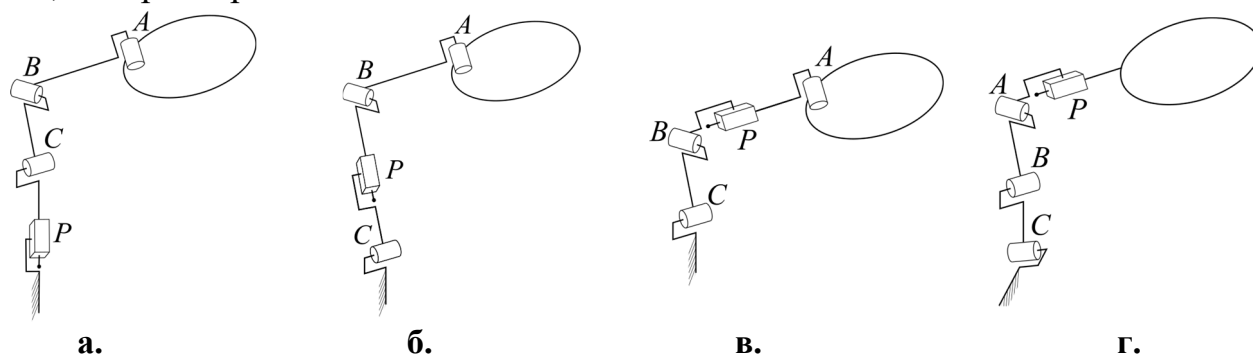


Рис. 3. Варианты цепей с тремя вращательными и одной призматической парами: а – $\underline{P}RRR$, б – $R\underline{P}RR$, в – $RR\underline{P}R$, г – $RRR\underline{P}$

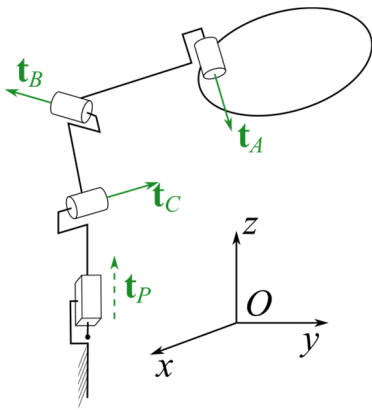


Рис. 4. Кинематические винты цепи

Сопоставим вращательным кинематическим парам A , B , C единичные кинематические винты нулевого параметра \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_B , \mathbf{t}_C , а призматической паре P – кинематический винт бесконечного параметра \mathbf{t}_P (Рис. 4):

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_A \\ \boldsymbol{\rho}_A \times \hat{\mathbf{s}}_A \end{bmatrix}, \mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_B \\ \boldsymbol{\rho}_B \times \hat{\mathbf{s}}_B \end{bmatrix}, \mathbf{t}_C = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_C \\ \boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C \end{bmatrix}, \mathbf{t}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{\mathbf{s}}_P \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\hat{\mathbf{s}}_A$, $\hat{\mathbf{s}}_B$, $\hat{\mathbf{s}}_C$, $\hat{\mathbf{s}}_P$ – трехмерные векторы, задающие направление осей соответствующих кинематических пар, $\boldsymbol{\rho}_A$, $\boldsymbol{\rho}_B$, $\boldsymbol{\rho}_C$ – трехмерные векторы, проведенные из начала координат (точки O) до центров соответствующих кинематических пар.

Рассмотрим винтовое уравнение скоростей, включающее винты (1) и вектор угловой скорости выходного звена $\boldsymbol{\omega}$. Запишем данное для векторных и моментных частей винтов по отдельности в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{q}_A \hat{\mathbf{s}}_A + \dot{q}_B \hat{\mathbf{s}}_B + \dot{q}_C \hat{\mathbf{s}}_C = \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{q}_A \boldsymbol{\rho}_A \times \hat{\mathbf{s}}_A + \dot{q}_B \boldsymbol{\rho}_B \times \hat{\mathbf{s}}_B + \dot{q}_C \boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C + \dot{q}_P \hat{\mathbf{s}}_P = \mathbf{0}_3. \end{cases} \quad (2)$$

Из уравнения для векторных частей (верхняя строка системы) следует, что скорости \dot{q}_A , \dot{q}_B , \dot{q}_C в соответствующих парах однозначно определяются вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Значит для произвольного вектора $\boldsymbol{\omega}$ сумма моментных частей винтов \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_B и \mathbf{t}_C представляет собой некоторый конкретный вектор, также однозначно определяемый вектором $\boldsymbol{\omega}$. Уравнение скоростей для моментных частей винтов, очевидно, совместно только тогда, когда этот вектор совпадает по направлению с вектором $\hat{\mathbf{s}}_P$ (нижняя строка системы), что в общем случае невозможно. Из этого следует, что из кинематических цепей с тремя вращательными и одной призматической приводной парой невозможно собрать механизм, удовлетворяющий поставленным условиям.

Далее рассматривались возможные варианты структуры кинематических цепей с одной призматической и четырьмя вращательными парами (4R1P), представленные на Рис. 5.

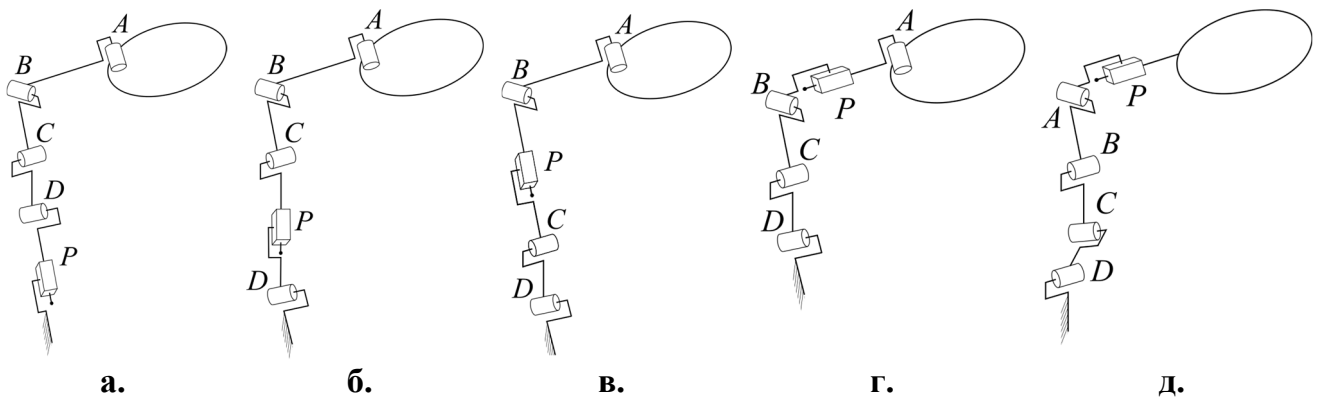


Рис. 5. Варианты цепей с четырьмя вращательными и одной призматической парами: а – PRRRR, б – RPRRR, в – RRPRR, г – RRRPR, д – RRRRP

Винтовое уравнение скоростей для данных цепей может быть записано аналогично уравнению (2) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{q}_A \hat{\mathbf{s}}_A + \dot{q}_B \hat{\mathbf{s}}_B + \dot{q}_C \hat{\mathbf{s}}_C + \dot{q}_D \hat{\mathbf{s}}_D = \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{q}_A \boldsymbol{\rho}_A \times \hat{\mathbf{s}}_A + \dot{q}_B \boldsymbol{\rho}_B \times \hat{\mathbf{s}}_B + \dot{q}_C \boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C + \dot{q}_D \boldsymbol{\rho}_D \times \hat{\mathbf{s}}_D + \dot{q}_P \hat{\mathbf{s}}_P = \mathbf{0}_3. \end{cases} \quad (3)$$

В данной системе первое уравнение представляет собой сумму четырех трехмерных векторов, то есть данные векторы будут линейно зависимы, а значит направление одной из осей может быть выбрано любым. В таком случае, пусть оси двух пар (C и D) будут параллельны. Тогда из уравнения для векторных частей винтов (верхняя строка системы) будет однозначно определяться только сумма скоростей $\dot{q}_C + \dot{q}_D$, а не сами указанные скорости. Пусть также оси пар A и B проходят через точку O . При этом соответствующие слагаемые исчезают из уравнения для моментных частей (нижняя строка системы), то есть система (3) приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{q}_A \hat{\mathbf{s}}_A + \dot{q}_D \hat{\mathbf{s}}_D + (\dot{q}_C + \dot{q}_D) \hat{\mathbf{s}}_C = \boldsymbol{\omega}. \\ \dot{q}_C \boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C + \dot{q}_D \boldsymbol{\rho}_D \times \hat{\mathbf{s}}_C = -\dot{q}_P \hat{\mathbf{s}}_P. \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) совместна, если пары C , D , P образуют плоскую диаду. Кинематические цепи, удовлетворяющие данному условию, могут иметь следующую структуру: $(RPR)R'R'$, $R'(RPR)R'$, $R'R'(RPR)$, $(\underline{PRR})R'R'$, $R'(\underline{PRR})R'$, $R'R'(\underline{PRR})$, $(RRP)R'R'$, $R'(RRP)R'$, $R'R'(RRP)$, где обозначены штрихом пары, оси которых пересекают точку O , а с помощью скобок выделены пары, формирующие плоскую диаду.

Для того, чтобы определить, какая из схем является наиболее подходящей для практического применения, целесообразно проанализировать условия, при которых цепи и составленные из них механизмы оказываются в особых положениях различных типов, что приводит к нежелательному изменению подвижности механизма. Так, при попадании в особое положение типа «ПС» происходит потеря степени свободы выходным звеном механизма, в особом положении типа «ПУ» выходное звено приобретает неконтролируемую подвижность в рамках имеющихся степеней свободы, особое положение типа «ВС» характеризуется появлением новой неконтролируемой степени свободы выходного звена, и, наконец, при попадании в особое положение типа «ПП» при неподвижных выходном и приводном звеньях в кинематической цепи возможна локальная подвижность.

В сферическом механизме попадание в особое положение типа «ПС» будет означать, что пространство, порождаемое векторными частями кинематических винтов цепи, будет иметь размерность, меньшую, чем три. Для рассматриваемых вариантов структуры цепи координаты указанных винтов будут следующими:

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_A \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_B \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_C = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_C \\ \boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C \end{bmatrix}, \mathbf{t}_D = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_C \\ \boldsymbol{\rho}_D \times \hat{\mathbf{s}}_C \end{bmatrix}, \mathbf{t}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{\mathbf{s}}_P \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Оси пар A , B , C , D при работе механизма будут перемещаться, то есть в общем случае особых положений данного типа избежать невозможно. Однако, если диада

располагается между парами A и B , то возможна ситуация, при которой $\hat{s}_A = -\hat{s}_B$, и механизм будет одновременно находиться в особых положениях типов «ПС» и «ПП», так как вся цепь сможет вращаться вокруг общей оси этих пар (Рис. 6а).

Для исследования особых положений типов «ПУ» и «ВС» необходимо для каждой цепи механизма вычислить силовой винт связи w_{cb} , взаимный всем кинематическим винтам (5), и приводной силовой винт $w_{пр}$, взаимный только пассивным винтам цепи. Координаты данных винтов в общем виде следующие:

$$w_{cb} = \begin{bmatrix} \hat{s}_C \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, \quad w_{пр} = \begin{bmatrix} \hat{s}_{CD} \\ -\frac{(\rho_C \times \hat{s}_C) \cdot \hat{s}_{CD}}{(\hat{s}_A \times \hat{s}_B) \cdot \hat{s}_C} \hat{s}_A \times \hat{s}_B \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Пусть механизм включает три одинаковых цепи ($i = 1 \dots 3$). При попадании в особое положение типа «ПУ» моментные части винтов $w_{пр}$, то есть векторы $\hat{s}_{Ai} \times \hat{s}_{Bi}$, будут линейно зависимы (Рис. 6б). Соответственно, при попадании в особое положения типа «ВС» линейная зависимость будет возникать между векторными частями винтов w_{cb} , то есть векторами \hat{s}_{Ci} (Рис. 6в).

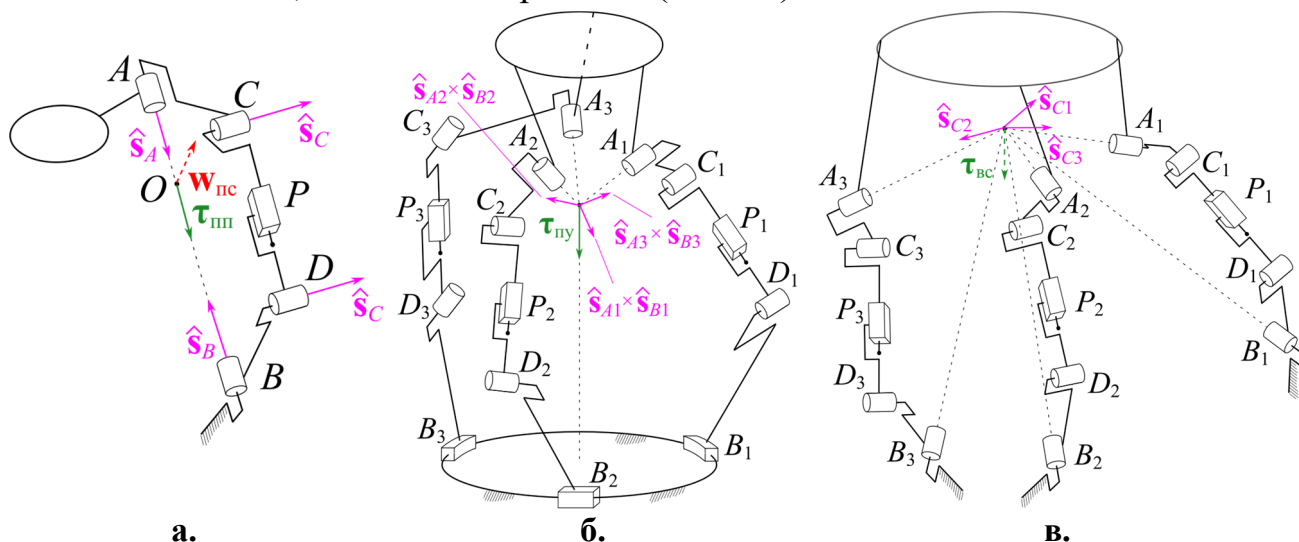


Рис. 6. Примеры особых положений цепи и механизмов с диадой RPR:
а – «ПС» и «ПП» одновременно, б – «ПУ», в – «ВС»

После изучения возможных вариантов вырождения винтов (6), было установлено, что особых положений «ПУ» в общем случае избежать невозможно, а особое положение типа «ВС» можно полностью исключить, если выбрать структуру цепи, в которой диада закреплена на основании, то есть $(RPR)R'R'$, $(PRR)R'R'$ или $(RRP)R'R'$. При этом последний вариант наименее предпочтителен, поскольку привод располагается далеко от основания, что увеличивает массу подвижных частей, а значит ухудшает его динамические свойства. Оставшиеся два варианта имеют свои достоинства и недостатки. Для дальнейшей проработки из конструктивных соображений был выбран первый вариант.

В главе 3 были получены уравнения связи, аналитически решена обратная задача о положениях и задача о скоростях, что позволило создать математическую модель кинематики механизма в общем виде, с использованием которой проведен

итерационный анализ рабочей зоны с определением ее размеров и формы, скоростной и силовой анализ, и исследование особых положений.

Для анализа была выбрана схема механизма, представленная на Рис.7. Плоскости диад выбраны взаимно ортогональными. Такой вариант является наиболее целесообразным, поскольку силовые винты связей цепей всегда будут оставаться взаимно ортогональными, что делает любую конфигурацию механизма наиболее «далекой» от особого положения типа «ВС».

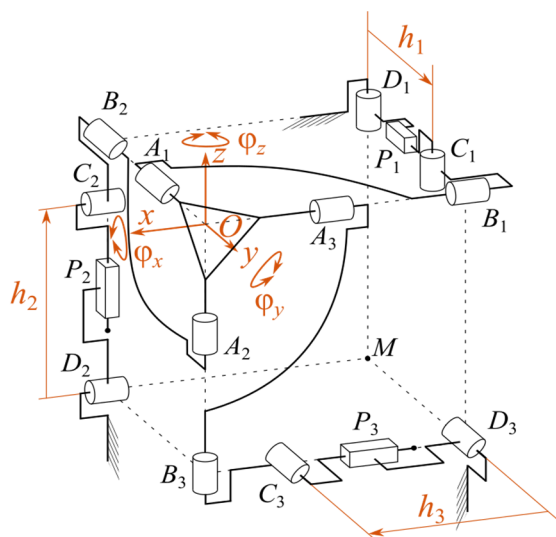


Рис. 7. Схема сферического механизма 3-(RPR)R'R'

последовательности, обратной последовательности поворотов:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

При решении обратной задачи о положениях значения углов поворота задано, а матрица \mathbf{R} легко вычисляется согласно (7) и тоже может считаться известной. Используя данную матрицу, можно вычислить координаты шарниров A_i кинематических цепей:

$$\mathbf{p}_{Ai} = \mathbf{R} \mathbf{p}_{0Ai}, \quad (8)$$

где \mathbf{p}_{0Ai} задает положение точки A_i в начальном положении механизма.

Шарниры A_i и B_i соединены жестким промежуточным звеном, расстояние между ними будет всегда оставаться постоянным:

$$(x_{Bi} - x_{Ai})^2 + (y_{Bi} - y_{Ai})^2 + (z_{Bi} - z_{Ai})^2 = l_{ABi}^2, \quad (9)$$

где l_{ABi} – длина звена AB в i -й цепи.

Далее рассмотрим только первую цепь. С учетом того, что $z_{B1} = 0$, раскрывая скобки и преобразовывая уравнение (9), получим:

$$x_{A1}x_{B1} + y_{A1}y_{B1} = 0,5(l_{OA1}^2 + l_{OB1}^2 - l_{AB1}^2), \quad (10)$$

где l_{OB1} – расстояние между точками O и B_1 , l_{OA1} – расстояние между точками O и A_1 .

Выражение (10) представляет собой скалярное произведение двух двумерных векторов $\mathbf{p}'_{OA1} = [x_{A1}, y_{A1}]^T$ и $\mathbf{p}'_{OB1} = [x_{B1}, y_{B1}]^T$ то есть:

$$\mathbf{p}'_{OB1} \cdot \mathbf{p}'_{OA1} = \|\mathbf{p}_{OB1}\| \|\mathbf{p}_{OA1}\| \cos \alpha_1 = l_{OB1} \sqrt{x_{A1}^2 + y_{A1}^2} \cos \alpha_1 = 0,5 (l_{OA1}^2 + l_{OB1}^2 - l_{AB1}^2). \quad (11)$$

Поскольку координаты x_{A1} , y_{A1} могут быть вычислены с использованием формулы (8), выражение (11) может быть использовано для расчета угла α_1 :

$$\alpha_1 = \pm \arccos \left(\frac{0,5 (l_{OA1}^2 + l_{OB1}^2 - l_{AB1}^2)}{l_{OB1} \sqrt{x_{A1}^2 + y_{A1}^2}} \right). \quad (12)$$

Можно видеть (Рис. 8), что вектор \mathbf{p}'_{OB1} может быть получен поворотом на угол α_1 некоторого вектора длиной l_{OB1} , направленного вдоль вектора \mathbf{p}'_{OA1} .

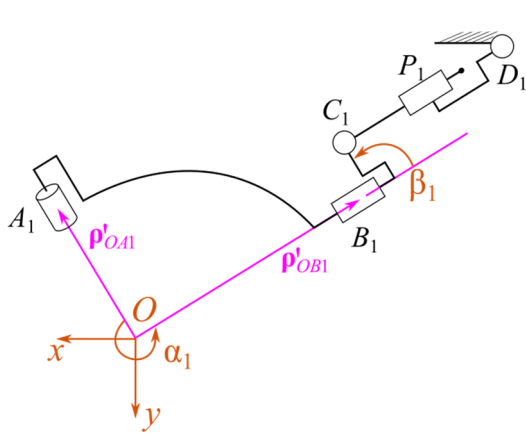


Рис. 8. Вид на плоскость первой кинематической цепи

Аналогично, координаты x_{C1} и y_{C1} могут быть получены поворотом на угол β_1 (определяется геометрией механизма) некоторого вектора длиной l_{BC1} с началом в точке B_1 и коллинеарного вектору \mathbf{p}_{OB1} . Так как $z_{C1} = 0$, получим:

$$\begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \frac{l_{OB1}}{\sqrt{x_{A1}^2 + y_{A1}^2}} \begin{bmatrix} x_{A1} \\ y_{A1} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} x_{C1} \\ y_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{bmatrix} \frac{l_{BC1}}{l_{OB1}} \begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \end{bmatrix}.$$

Наконец, вычислив координаты x_{C1} и y_{C1} точки C_1 , используя выражения (12) и (13), а также зная координаты x_{D1} , y_{D1} точки D_1 ($z_{D1} = 0$), запишем уравнение связи первой цепи:

$$(x_{D1} - x_{C1})^2 + (y_{D1} - y_{C1})^2 - h_1^2 = 0. \quad (14)$$

Вывод уравнений связи второй и третьей кинематических цепей будет аналогичен с той разницей, что необходимо циклично сдвигать координаты в последовательности « x , y , z ». Наконец, из выражения (14), может быть легко получено решение обратной задачи о положениях:

$$h_1 = \sqrt{(x_{D1} - x_{C1})^2 + (y_{D1} - y_{C1})^2}, \quad h_2 = \sqrt{(y_{D2} - y_{C2})^2 + (z_{D2} - z_{C2})^2}, \quad (15)$$

$$h_3 = \sqrt{(z_{D3} - z_{C3})^2 + (x_{D3} - x_{C3})^2}.$$

После решения обратной задачи о положениях становится возможной оценка формы и размеров рабочей зоны: точка принадлежит рабочей зоне, если в ней обратная задача о положениях может быть решена в действительных числах с использованием формулы (15). В качестве примера рассматривался механизм со следующими параметрами: $l_{OAi} = 0,4$ м; $l_{OBi} = 1$ м; $l_{ABi} = 1,077$ м; $l_{BCi} = 0,25$ м; $\beta_i = 90^\circ$; координаты точек D_i (м): $D_1 = [-1 \ -1 \ 0]$, $D_2 = [0 \ -1 \ -1]$, $D_3 = [-1 \ 0 \ -1]$; координаты точек A_i в начальном положении (м): $A_{01} = [0 \ -0,4 \ 0]$, $A_{02} = [0 \ 0 \ -0,4]$, $A_{03} = [-0,4 \ 0 \ 0]$. Расстояния от точки O до углов подвижной платформы равны $0,25$ м. Расстояние от точки D_i до условного центра шарнира P_i при визуализации $l_{DPi} = 0,2$ м.

Для анализа рабочей зоны был использован итерационный подход: для каждого из углов поворота задавались пределы изменения его значения, а затем проводится перебор значений с заданным шагом. Ориентации выходного звена описывалась с использованием углов φ_a , φ_n , φ_c (Рис. 9).

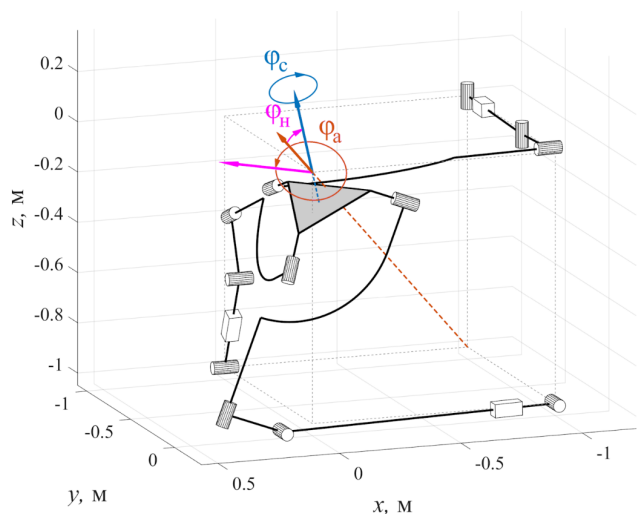


Рис. 9. Оси симметрии, наклона и собственного вращения механизма, а также соответствующие углы

угол собственного вращения принимался постоянным и равным нулю $\varphi_c = 0^\circ$. Цветом на Рис. 11 показаны значения максимальных приводных скоростей, рост которых наблюдается при приближении к особому положению типа «ПС».

На Рис. 10 представлена рабочая зона механизма, визуализированная на сфере, т.е. показаны точки, в которых может находиться конец отрезка постоянной длины, проведенного от центра выходного звена через центр вращения механизма. Максимальное значение угла φ_c в каждой точке показано цветом. Далее было снято ограничение на величину h_i , и построена теоретическая рабочая зона. С применением винтового исчисления проведен скоростной анализ механизма – решены прямая и обратная задача о скоростях, исследованы особые положения типа «ПС». В данном случае

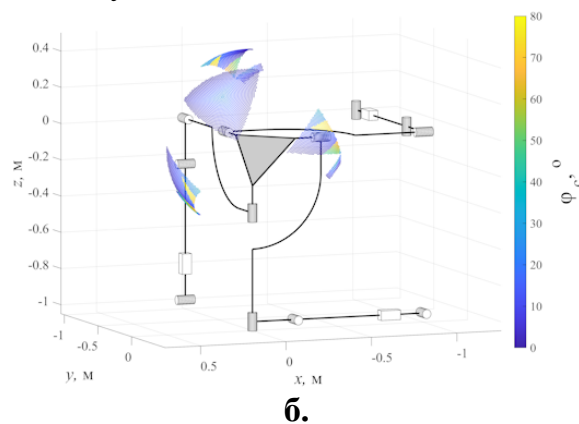
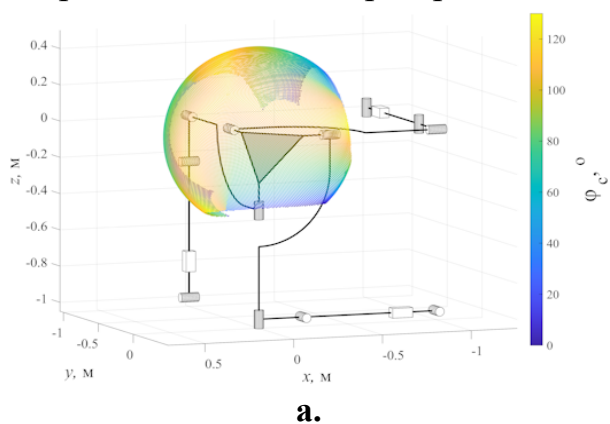


Рис. 10. Рабочая зона механизма: **а** – для $h_i = 0 \dots 2$ м, **б** – для $h_i = 0,5 \dots 1,5$ м

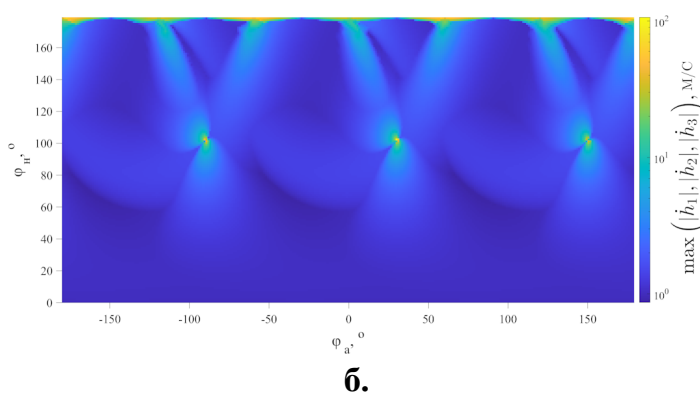
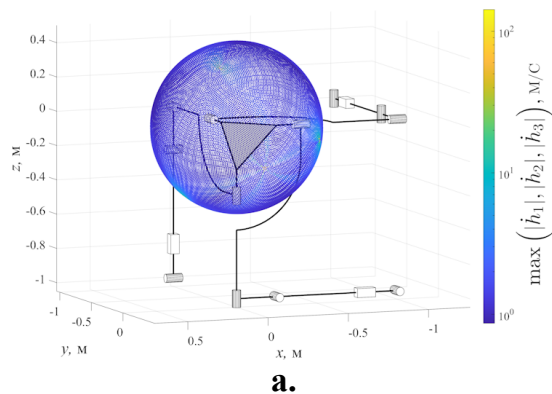


Рис. 11. Абсолютное значение максимальной приводной скорости для $\|\omega\| = 1$ рад/с: **а** – визуализация на поверхности сферы, **б** – визуализация в виде плоской карты

Далее был проведен силовой анализ механизма. Была установлена зависимость между внешней нагрузкой (моментом) и усилиями в приводах. Также был проведен анализ особых положений типа «ПУ». В каждой из точек была рассчитана максимальная нагрузка на привод для величины внешнего момента, равной 1 Н·м при $\varphi_c = 0^\circ$, что представлено цветом на Рис. 12. Возрастание нагрузки на приводы соответствует приближению к особым положениям типа «ПУ».

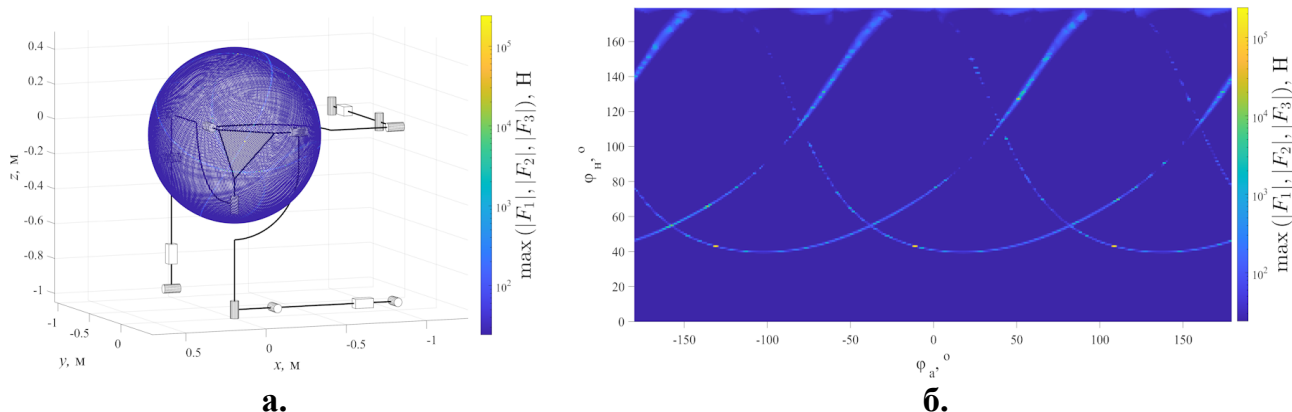


Рис. 12. Абсолютное значение максимального приводного усилия для $\|P\| = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$:
а – визуализация на поверхности сферы, **б** – визуализация в виде плоской карты

Для подтверждения того, что данные линии действительно соответствуют особым положениям типа «ПУ» был проведен анализ изменения определителя матрицы, составленной из координат силовых винтов механизма:

$$W = \begin{bmatrix} w_{\text{пр1}} & w_{\text{пр2}} & w_{\text{пр3}} & w_{\text{св1}} & w_{\text{св2}} & w_{\text{св3}} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Определитель матрицы (16) равен нулю в особом положении типа «ПУ».

На Рис.13 красным показаны зоны, в которых определитель матрицы W положителен, а синим – отрицателен. При переходе из одной зоны в другую определитель меняет знак, а значит переходит через ноль. Границы красных и синих зон совпадают с линиями, показывающими увеличение приводных усилий.

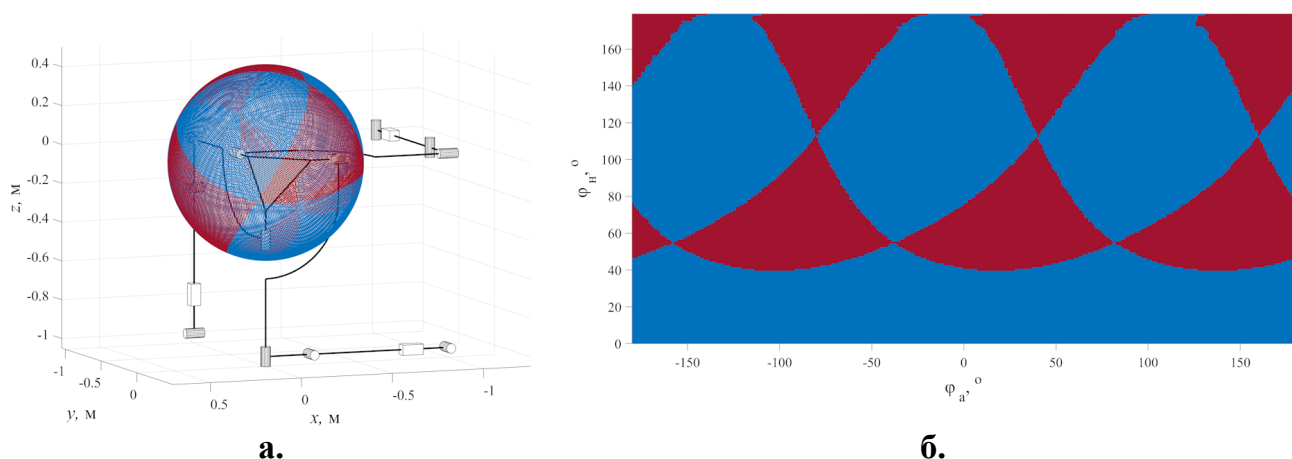


Рис. 13. Знак определителя матрицы W : «+» – красный, «-» – синий:

а – визуализация на поверхности сферы, **б** – визуализация в виде плоской карты

В главе 4 описывается разработка твердотельной модели механизма в КОМПАС-3D, сборка и отладка физического прототипа, проведен эксперимент, подтвердивший принципиальную работоспособность синтезированного механизма.

После проведения всех расчетов была разработана конструкция механизма. Для ускорения процесса физического прототипирования и с целью снижения итоговой стоимости прототипа нестандартные детали проектировались из соображений, изготовления посредством печати на 3D-принтере из пластика PLA. В качестве привода используется линейный актуатор (готовое изделие), реализованный с использованием передачи винт-гайка скольжения.

Отличительной особенностью прототипа является нулевая длина второго звена цепи B_iC_i (Рис. 14). Использование такого конструктивного решения основано на результатах анализа влияния длины l_{BCi} на размер рабочей зоны механизма (Рис.15), проведенного с использованием разработанных ранее программ.

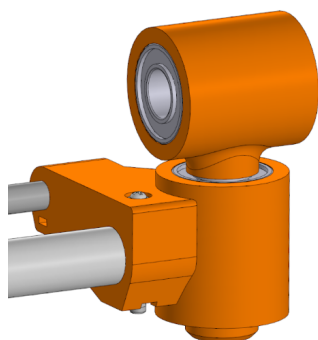


Рис. 14. Второе звено механизма

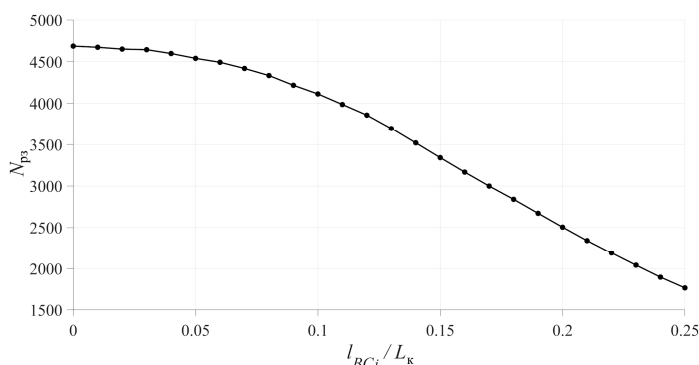


Рис. 15. Зависимость размера рабочей зоны от относительной длины звена B_iC_i

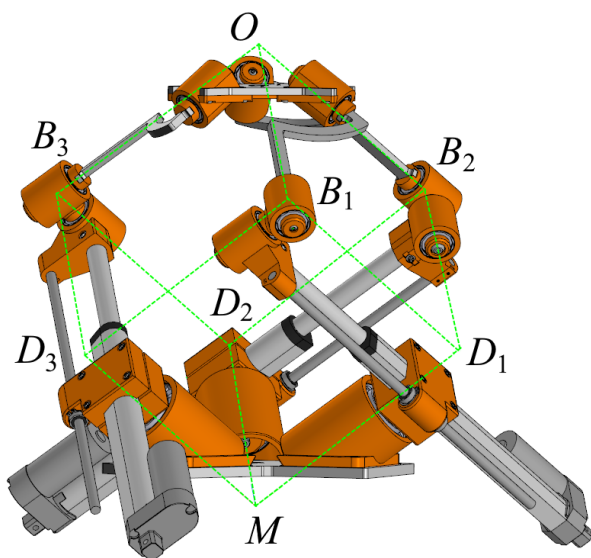


Рис. 16. Модель механизма и «куб» со стороной 260 мм

Размеры и геометрия конструктивных элементов подбирались таким образом, чтобы в начальном положении механизма, соответствующем ходу штока актуатора, равному 125 мм (половине максимального хода), центр сферического движения механизма (точка O), точка пересечения осей опорных стаканов диад (точка M) и геометрические центры стаканов вторых звеньев цепей (точки B_i) находились в вершинах условного куба с длиной стороны 260 мм, Рис. 16. При моделировании кинематики механизма можно считать, что точки D_i также расположены в вершинах условного куба. Для реализации в виде физического прототипа был выбран описанный вариант.

После моделирования механизма на основе созданных трехмерных моделей были изготовлены необходимые детали, закуплены готовые компоненты и собран прототип. Для обеспечения возможности свободного вращения корпусов актуаторов прототип механизма был размещен на специальном утяжеленном пьедестале, что позволило обеспечить достаточную устойчивость конструкции и в

то же время возможность перемещения сборки по лаборатории силами одного человека. Для физического прототипа начальное положение соответствует конфигурации с максимально втянутыми штоками (Рис. 17).



Рис. 17. Прототип механизма со втянутыми штоками

С целью проверки соответствия типа движения выходного звена прототипа заданному, в режиме ручного управления в случайном порядке приводились в движение приводы механизма. Визуально наблюдение за работой механизма показало, что тип движения данного звена действительно является сферическим, однако, имеет место некоторое смещение центра вращения. Для оценки величины данного смещения был проведен дополнительный эксперимент.

Для проведения указанного эксперимента был изготовлен контрольный шар, представляющий собой шарик для подшипника качения, размещенный на специальном пластиковом основании (Рис. 18). Шарик помещен в ответное сферическое углубление на

подставке и закреплен в нем с помощью клея.



Рис. 18. Контрольный шар



Рис. 19. Размещение шара и индикатора на выходном звене

После закрепления шара на выходном звене механизма к нему подводился цифровой индикатор часового типа (Рис. 19), закрепленный на жестком основании при помощи магнитной стойки. Далее приводы механизма поочередно приводились в движение, и записывались показания индикатора. Измерения проводились в трех различных положениях оси индикатора, являющихся взаимно ортогональными, что позволило оценить примерное отклонение центра контрольного шара от его теоретического положения. Полученные в результате эксперимента максимальные значения отклонений $\Delta_1 = 3,89$ мм, $\Delta_2 = 3,40$ мм $\Delta_3 = 2,90$ мм являются существенными, но приемлемыми, например, для различных тренажеров-симуляторов и устройств для медицинской реабилитации (Рис. 20).

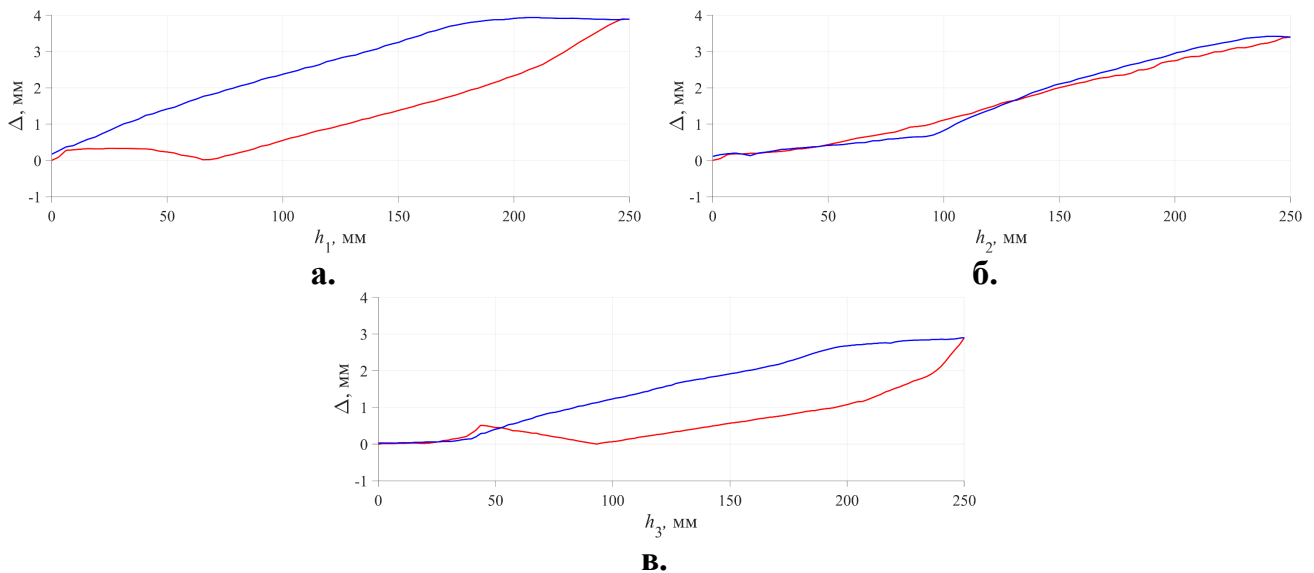


Рис. 20. Измеренное отклонение (красный – выдвижение штока, синий – втягивание) при работе только первого (а), только второго (б), или только третьего (в) привода

Основные результаты и выводы:

1. Разработан метод структурного синтеза кинематических цепей сферических механизмов параллельной структуры, основанный на анализе винтовых уравнений скоростей. С использованием предложенного метода выявлено девять вариантов структуры кинематической цепи, удовлетворяющих заданным требованиям. При этом установлено, что при условии последовательного расположения кинематических пар, цепь должна включать четыре вращательных и одну призматическую пару, причем две вращательных пары совместно с призматической должны образовывать плоскую диаду, а оси оставшихся двух вращательных пар должны проходить через центр сферического движения;

2. С применением винтового исчисления получены в общем виде геометрические условия возникновения особых положений различных типов для рассматриваемых кинематических цепей и механизмов, составленных из таких цепей. По результатам анализа указанных условий установлено, что предпочтительными являются те варианты структуры кинематической цепи, у которых плоская диада присоединяется непосредственно к основанию, так как в таком случае становится возможным избежать попадания механизма в особые положения типов «ВС» и «ПП»;

3. Для механизма $3-(RPR)R'R'$ выведены уравнения связи, а также аналитически решены обратная задача о положениях и задача о скоростях, что позволило создать математическую модель кинематики механизма. С применением данной модели проведен итерационный анализ рабочей зоны с определением ее формы и размеров с учетом конструктивных ограничений, а также анализ особых положений и близости к ним с использованием силовых и скоростных критериев. Расчетные алгоритмы реализованы в виде прикладных программ в среде компьютерной алгебры MATLAB, позволяющих гибко изменять геометрические параметры анализируемого механизма;

4. С применением САД-системы КОМПАС 3D разработана конструкция механизма $3-(RPR)R'R'$ и создана его твердотельная модель в трех исполнениях,

для которых средствами САД проведена проверка соответствия подвижности механизма теоретической. При этом установлено, что оптимальная длина второго промежуточного звена механизма из условия максимизации рабочей зоны равна нулю, что учтено в предложенной конструкции. На базе созданной трехмерной модели изготовлены необходимые детали (в том числе посредством 3D-печати), проведена сборка и отладка физического прототипа механизма. Проведен натурный эксперимент, также подтвердивший работоспособность предложенной структурной схемы.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых изданиях, включенных в перечень ВАК РФ:

1. Захаров М.Н., Ларюшкин П.А., Сеницына Ю.В., Семенихин А.С., Хрестина А.А. Решение обратной задачи о положениях сферического параллельного манипулятора 3-PRUR // Вестник машиностроения. 2025. Т. 104, № 11. С. 927-931.
2. Ларюшкин П.А., Хрестина А.А., Сеницына Ю.В., Цыганова А.С. Анализ особых положений кинематических цепей сферических параллельных манипуляторов с линейными приводами // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2025. №7 (784). С. 15-25.
3. Хрестина А.А., Ларюшкин П.А., Сеницына Ю.В., Антонов А.В. Решение обратной задачи о положениях сферического механизма параллельной структуры с линейными приводами // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2025. №12 (789). С. 12-19.

В изданиях, индексируемых в базах Scopus и Web of Science:

4. Khrestina A., Ispolov E., Medovshchikov A., Laryushkin P. General Solution for the Inverse Kinematics of Parallel Robots with PRR Kinematic Chains // Advances in Mechanical Engineering. MMESE 2025. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2026. Pp. 85-93.
5. Laryushkin P.A., Khrestina A.A., Sinitsyna Yu.V., Semenov A.V. The Issue of Type Synthesis of Kinematic Chains of Spherical Parallel Mechanisms with Linear Drives // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2025. Vol. 54, № 2. Pp. 125-132.

Другие публикации:

6. Хрестина А.А. Разработка сферического механизма с линейными приводами для использования в системах ориентации // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях (ИАМП-2025). Материалы XX юбилейной Всероссийской (с международным участием) научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. 22-24 октября, Бийск. 2025. С. 215–217.
7. Хрестина А.А., Исполов Е.М., Ларюшкин П.А. Обобщенное решение обратной задачи о положениях параллельных механизмов n-PRR // Современное машиностроение. Наука и образование. 2025. № 14. С. 280-289.
8. Хрестина А.А., Ларюшкин П.А. Исследование рабочей зоны сферического механизма параллельной структуры с линейными приводами // XXXVII Международная инновационная конференция молодых ученых по современным проблемам машиноведения. Москва. 2025. С. 195-198.