



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •  
• МОСКВА •  
• КРАСНОДАР •  
2012





В. Г. ЖУКОВ

# МЕХАНИКА СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*РЕКОМЕНДОВАНО*

*Учебно-методическим объединением вузов России  
по образованию в области технологии сырья  
и продуктов животного происхождения в качестве  
учебного пособия для студентов,  
обучающихся по направлению 260200 —  
«Продукты питания животного происхождения»*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР  
2012



ББК 30.121я73

Ж 86

**Жуков В. Г.**

**Ж 86** Механика. Сопротивление материалов: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2012. — 416 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1244-0**

Данное учебное пособие содержит подробные текстовые пояснения, выводы формул и примеры решения типовых задач. Темы, важные для формирования инженерного мышления, но не имеющие аналитического решения в рамках данного курса, представлены кратким изложением существа задач. При этом даны общие сведения о вводимых допущениях и пределах применимости представленных конечных формул. Их можно рассматривать как ознакомительные.

Книга предназначена для студентов заочной, вечерней и дневной форм обучения немашиностроительных направлений. Она также может быть полезной для восстановления инженерами общих представлений о задачах дисциплины.

**ББК 30.121я73**

**Рецензенты:**

**А. О. ХАРИТОНОВ** — д. т. н., профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика и инженерная графика» Московского государственного университета технологий и управления;  
**Ю. Ф. БЕЛОКРЫЛОВ** — к. т. н., профессор, заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, теоретическая и прикладная механика» Московского государственного университета пищевых производств.

**Обложка**

**Е. А. ВЛАСОВА**

*Охраняется законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.*

*Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2012

© В. Г. Жуков, 2012

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2012



---

## ВВЕДЕНИЕ

Заглянув в Интернет на сайт объявлений о вакансиях на инженерные должности технологов довольно часто можно встретить текст такого типа:

«Работа: главный технолог.  
Участвует в сообществах профессии  
«Главный технолог»: Топ-менеджеры  
Организует... выполнение работ (услуг), обеспечивающих повышение уровня технологической подготовки и технического перевооружения производства... Принимает меры по ускорению освоения в производстве прогрессивных... научно-технических достижений...»

Это сокращенная перепечатка из интернет-объявления. Аналогична направленность работы и у рядовых инженеров-технологов.

Прогрессивное перевооружение производства требует от инженера-технолога понимания принципов работы оборудования с точки зрения не только происходящих в нем технологических процессов, но и возможностей их осуществления. Понимание этих возможностей в значительной степени закладывается изучением общепрофессиональной дисциплины «Механика». Она дает «знания законов механики, а на их основе — принципов механических расчетов и проектирования... умения и навыки для последующего их использования при изучении специальных инженерных дисциплин, а также в самостоятельной практической деятельности инженера-технолога



при составлении планов, заявок на материалы и оборудование, технических заданий на проектирование средств малой механизации и автоматизации, модернизации оборудования и его безопасной эксплуатации, внедрении технических решений и проектов».

Эта цитата взята из примерной программы дисциплины. В ней отражен весьма сложный комплекс технических знаний. Однако ее раздел «Соппротивление материалов» не направлен на подготовку прочнистов-расчетчиков хотя бы уже потому, что в учебных планах на это отводится всего 36–70 аудиторных часов занятий и такое же количество часов самостоятельной работы. К тому же для студента-технолога данная дисциплина является практически единственной, формирующей его базовый технический кругозор в течение процесса обучения. Поэтому изучение указанных в программе тем должно быть направлено на воспитание у студентов осмысленного понимания принципов прочностных особенностей работы оборудования, а также на знакомство с основными методами расчета его деталей.

Учебников и учебных пособий по сопротивлению материалов (в том числе для инженерно-технологических специальностей) имеется уже довольно много. Тем не менее появляются новые издания, и причины здесь разные. Создание данного учебного пособия определялось тремя важными (но недостаточно учитываемыми) особенностями, которые желательно учитывать в нынешних условиях преподавания и обучения.

Первая — это весьма низкая школьная база начальных технических знаний у студентов, требующая от учебных материалов довольно подробного изложения и объяснения. Учащиеся не только плохо ориентируются в простых технических терминах и явлениях, но часто не имеют зрительного представления о реальных особенностях простых конструкций. Вместе с тем содержание учебных материалов традиционно ориентировано на определенную техническую подготовленность студентов. Поэтому данное пособие открывается довольно объемным разделом «Общие сведения», в котором даны опре-

деления и объяснения основным терминам и особенностям курса «Механика. Сопротивление материалов». В темах сделан акцент на ознакомительной вводной части, которая ориентирует на общее понимание особенностей темы.

Вторая причина — весьма ощутимый крен в сторону снижения отводимых аудиторных часов на дисциплины и перевод обучения на применение интерактивного самостоятельного характера его освоения. Поэтому нужны методические материалы с разными подходами к формам и методикам.

Третья причина — тематический набор материала. Студентам немашиностроительных инженерно-технологических специальностей необходимо, хотя бы в ознакомительном виде, иметь представление об условиях работы основного вида деталей, что важно для понимания работы оборудования в целом. В связи с этим в данном учебном пособии нашли отражение отдельные темы, обычно изучаемые в специальных курсах и отсутствующие в учебных планах будущих инженеров-технологов. Темы, важные для формирования инженерного мышления, но не имеющие аналитического решения в рамках дисциплины, представлены в пособии кратким изложением задач. При этом даны общие сведения о вводимых допущениях и пределах применимости представленных формул. Их можно рассматривать как ознакомительные, вырабатывающие общее понимание конструкторских задач. Каждая тема поясняется примерами, объем которых составляет около 30%. В конце каждой темы — контрольные вопросы. Развернутые примеры в пособии следует рассматривать как последовательные решения нескольких задач. Их объединение здесь в один пример дает дополнительные, сравнительные представления о существе темы, нацеливает на обобщенные выводы по ней.

В рамках рабочей программы дисциплины именно от лектора зависит выбор глубины изучения студентами конкретных тем.

В программе дисциплины нет указаний на обязательную оценку знаний студента, основываясь лишь на его

памяти. Поэтому можно ставить задачу перед студентами на понимание существенных особенностей темы и их конкретного применения на основе тестов либо с использованием методической литературы, поскольку в данном контексте курс «Соппротивление материалов» направлен прежде всего на выработку у изучающих его студентов общетехнического мировоззрения.

Изложение тем сопровождается подробными иллюстрациями.

Данное учебное пособие «Соппротивление материалов», являясь разделом курса «Механика», составлено в соответствии с программой ГОС ВПО и предназначено в значительной степени для самостоятельного освоения материала студентами немашиностроительных специальностей заочной и очной форм обучения.

Примерной программой дисциплины очерчен для изучения достаточно широкий объем материала. Для его освоения необходим целостный технический подход в понимании и решении практических задач. В работающем оборудовании пищевых производств выявляется определенный набор видов нагрузок и возникающих при этом технических задач. К наиболее часто встречающимся случаям относятся:

- растяжение или сжатие (в штоках передаточных механизмов, стержнях, подвесных тросах);
- сдвиг (в заклепочных, сварных, шпоночных соединениях деталей);
- изгиб, включая изгиб в двух плоскостях (балки, рамы, рычаги в передаточных механизмах и манипуляторах);
- изгиб с кручением (мешалки, валы редукторов);
- изгиб с кручением и растяжением–сжатием (валы шнековых машин, редукторов);
- нагружение, связанное с возможной потерей устойчивости (стойки, емкостное оборудование с рубашкой, валы шнеков);
- динамические нагрузки во вращающихся системах и системах, использующих ударные усилия (роторы центрифуг и сепараторов, подъемники, молотковые дробилки, вибрационная техника);



- механические колебания (валы мешалок, центрифугальная техника и ее детали, виброизоляция оборудования);
- циклические нагрузки (в редукторах, конвейерах — везде, где возникают повторно-переменные нагрузки);
- контактные нагрузки (в зубчатых зацеплениях, подшипниках, кулачковых механизмах).

Именно этот набор тем отражен в учебном пособии. Тема «Механические колебания упругих систем» представлена в общем виде и является логическим дополнением для создания достаточно полного понимания технических особенностей работы производственного оборудования.

Особенность курса «Механика. Сопротивление материалов» — один из разделов, состоит в том, что для студентов-технологов он является не главным в их специальности и единственным, где ими изучаются вопросы инженерной механики. Поэтому для развития общего технического кругозора, выработки инженерного мышления при решении вопросов технологических процессов в пищевых производствах инженеру-технологу необходимо иметь представление о возможностях работающего оборудования. Часто определяющая роль в этом остается за прочностными вопросами.

Учебное пособие формировалось по принципу знакомства студента — будущего инженера-технолога — с общим кругом прочностных особенностей работающего оборудования в соответствии с перечисленными видами встречающихся в практике нагрузок. При этом не ставилась задача изучения вопросов дисциплины «Сопротивление материалов». Ряд задач, решение которых выходит за рамки методов анализа, принятых в курсе, даны с той долей детализации, которая позволяет сформировать техническое представление об их сути и общем пути решения. К таковым относятся задачи разрушения при трещинообразовании, устойчивости оболочек, работы в условиях динамических нагрузок, виброизоляции, контактных напряжений, краевого эффекта. Они изложены кратко, «для сведения». Ссылки на более глубокий анализ тем



и задач можно найти в прилагаемом библиографическом списке. В соответствии с конкретными рабочими программами некоторые темы или их части можно опустить. Однако при этом цельность дисциплины, заключающаяся в изложении последующего на основе предыдущего, не должна быть потеряна. Объем изучаемого материала, детализация рассматриваемых разделов полностью определяется рабочей программой и поставленными лектором целями.

Ограниченное представление в учебном пособии справочных (табличных) материалов по необходимым в расчетах физическим и геометрическим характеристикам материалов и конструкционных элементов не случайно. Автор считает поиск в технической справочной литературе, в том числе и в Интернете, необходимой составляющей обучения, приучающей к самостоятельности в работе с литературой.

# СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

## ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

- $A_0, d_0$  — площадь и диаметр поперечного сечения рабочей части образца перед нагружением, м<sup>2</sup>
- $A$  — площадь, м<sup>2</sup>; также работа силовой нагрузки, Нм
- $a, b, c, h, l, s$  — линейные геометрические параметры системы, м
- $a, g$  — ускорение и ускорение свободного падения соответственно, м/с<sup>2</sup>
- $A_{ш.р}$  — истинная площадь поперечного сечения шейки в момент разрыва образца, м<sup>2</sup>
- $B, b, H, h$  — ширина, высота прямоугольного сечения, м
- $C$  — отношение внутреннего диаметра кольцевого сечения к наружному, б/р; также жесткость пружины, Н/м
- $C, D$  — произвольные постоянные для функции угла поворота (рад или Нм<sup>2</sup>·рад) и прогибов балки (м или Нм<sup>3</sup>) соответственно
- $D, d$  — диаметры, м
- $[D_0], [D_c]$  — допускаемое значение диаметра бруса по условию жесткости, прочности соответственно, м
- $E, E_{np}$  — модуль упругости первого рода (его также называют модулем продольной упругости или модулем Юнга), его приведенная величина, Па = Н/м<sup>2</sup>
- $F, J, N, Q, X, Y, Z$  — сосредоточенные силы, Н
- $F_{max}$  — наибольшее усилие, которое возникает в образце из пластичного материала при растяжении, Н
- $F_{кр}$  — критическая сила при расчетах на устойчивость, Н
- $F_{пц}$  — усилие, до которого в образце выполняется закон Гука, Н
- $F_p$  — усилие, при котором разрушается образец из пластичного материала при растяжении, Н

- $F_T$  — усилие, при котором в образце возникает площадка текучести, Н  
 $F_y$  — усилие, до которого в образце практически можно не учитывать пластические деформации, Н  
 $G$  — модуль упругости второго рода (его также называют модулем сдвига), Па = Н/м<sup>2</sup>  
 $H$  — высота падения груза при расчете на удар, м  
 $i$  ( $i_x$ ) — радиус инерции сечения (радиус инерции относительно оси  $x$ ), м; также  $i$ -й элемент, б/р  
 $I_P$  — полярный момент инерции сечения, м<sup>4</sup>  
 $I_{x0}, I_{y0}$  — осевые моменты инерции сечения относительно его собственных центральных осей  $x_0$  и  $y_0$  соответственно, м<sup>4</sup>  
 $I_x, I_y$  — осевые моменты инерции сечения относительно осей всего сечения  $x$  и  $y$  соответственно, м<sup>4</sup>  
 $I_{xy}$  — центробежный момент инерции сечения, м<sup>4</sup>  
 $I_K$  — момент инерции при кручении бруса некруглого поперечного сечения, м<sup>4</sup>  
 $J$  — инерционная сила, Н  
 $K$  — коэффициент пропорциональности; также коэффициент концентрации напряжений, б/р  
 $k$  — величина отношения предела прочности материала на растяжение к пределу прочности на сжатие, б/р; также ширина поверхности разрушения в сварном шве, м  
 $K_F$  — коэффициент при силе на эпюре  $N$ , б/р  
 $k_{\sigma(t)}$  — эффективный коэффициент концентрации напряжений для конкретного вида концентратора, б/р  
 $l, l_0$  — длина участка, длина рабочей части ненагруженного образца, м  
 $M_e$  и  $T_e$  — внешние моменты: изгибающий вокруг осей  $x$  или  $y$  и крутящий вокруг оси  $z$  соответственно, Н·м  
 $M_x, M_y$  — сосредоточенные изгибающие моменты как внутренние силовые факторы вокруг оси  $x$  и  $y$  соответственно, Н·м  
 $N$  — продольная сила (вдоль оси  $z$ ) как продольный внутренний силовой фактор, Н  
 $n$  — нормаль к произвольной площадке; также количество элементов в составном сечении, б/р, или коэффициент затухания колебательного движения, с<sup>-1</sup>  
 $n_T, n_B, n_{пч}, n_{\sigma}, n_{\tau}$  — коэффициент запаса прочности по пределу текучести, временному сопротивлению, по пределу прочности соответственно; также по нормальным или касательным напряжениям, б/р  
 $P$  — силы, распределенные по поверхности (давление), Н/м<sup>2</sup>  
 $p$  — полное напряжение, Н/м<sup>2</sup>  
 $q$  — силы, распределенные по линии (погонные), Н/м

- $Q_x, Q_y$  — поперечные силы по осям  $x$  и  $y$  соответственно как поперечные внутренние силовые факторы, Н  
 $R$  — радиус срединной поверхности оболочки, м  
 $r$  — коэффициент (показатель) асимметрии цикла, б/р, также текущее значение радиуса, м  
 $s$  — толщина тонкостенного элемента, м  
 $S_x, S_y$  — статические моменты сечения относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно, м<sup>3</sup>  
 $T$  — крутящий момент (вокруг оси  $z$ ) как внутренний силовой фактор, Нм  
 $U$  — накопленная потенциальная энергия упругой деформации системы, Нм  
 $V$  — объем, м<sup>3</sup>  
 $v$  — скорость, м/с  
 $W_x, W_y, W_p$  — моменты сопротивления относительно осей  $x, y$  и полярный момент сопротивления, м<sup>3</sup>  
 $W_k$  — момент сопротивления при кручении бруса некруглого поперечного сечения, м<sup>3</sup>  
 $x, y, z$  — оси координат, также координаты, м  
 $x_0, y_0$  — координаты центра тяжести бесконечно малой площадки сечения относительно центральных осей, м  
 $x_c, y_c$  — координаты центра тяжести сечения в рассматриваемых осях, м  
 $X_i$  — реакция отброшенной «лишней» связи в статически неопределимых системах  
 $y$  — прогиб балки, м  
 $z$  — продольная ось, м

### ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

- $\alpha, \beta$  — углы, рад  
 $\alpha, \beta, \gamma$  — коэффициенты для определения параметров свободного кручения брусьев некруглого поперечного сечения, б/р  
 $\alpha_0$  — угол наклона площадки, при котором напряжения или моменты инерции сечения приобретают экстремальные значения, рад  
 $\beta_{\sigma(t)}$  — коэффициент качества поверхности детали при циклической нагрузке, б/р  
 $\beta_d$  — коэффициент динамичности (динамический коэффициент), б/р  
 $\gamma$  — угол сдвига, б/р  
 $\Delta$  — перемещение конца участка бруса, м; также обобщенное перемещение  
 $\delta$  — относительное удлинение образца после разрыва, %  
 $\Delta b, \Delta c$  — поперечное сужение бруса; также абсолютный сдвиг, м  
 $\delta_{ij}$  — единичное перемещение, м/Н, или 1/Н, или 1/Нм

- $\Delta l$  — удлинение или укорочение участка, м  
 $\varepsilon, \varepsilon_d$  — линейная деформация, ее динамическая составляющая, б/р  
 $\varepsilon_{\sigma(t)}$  — масштабный коэффициент (фактор) детали при циклической нагрузке, б/р  
 $\varepsilon_{ост}$  — остаточная (пластическая) деформация образца после разрыва, б/р;  
 $\varepsilon_{y.p}$  — упругая деформация образца в момент его разрушения, б/р  
 $\theta$  — относительный угол закручивания бруса,  $m^{-1}$   
 $[\theta]$  — допускаемое значение относительного угла закручивания бруса,  $m^{-1}$   
 $\lambda$  — осадка пружины, м; гибкость стержня, б/р  
 $\mu$  — коэффициент Пуассона, б/р  
 $\rho, \rho_{пр}$  — радиус кривизны, его приведенная величина, а также расстояние от начала координат до элементарной площадки, м  
 $\sigma, \tau$  — напряжения нормальное и касательное соответственно,  $H/m^2$   
 $\sigma_{0,2}$  — условный предел текучести,  $H/m^2$   
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные нормальные напряжения, действующие по трем взаимно перпендикулярным площадкам,  $H/m^2$   
 $\sigma_a, \sigma_m$  — амплитудное и среднее значение циклических нормальных напряжений,  $H/m^2$   
 $\sigma_N, \sigma_{M_x}, \sigma_{M_y}$  — доля нормальных напряжений, создающих продольную силу, изгибающий момент  $M_x$  и момент  $M_y$  соответственно,  $H/m^2$   
 $\sigma_r$  — предел выносливости материала при  $r$ -й асимметрии цикла,  $H/m^2$   
 $\sigma_v$  — временное сопротивление,  $H/m^2$   
 $\sigma_H$  — номинальное напряжение,  $H/m^2$   
 $\sigma_{пц}$  — предел пропорциональности,  $H/m^2$   
 $\sigma_{пч}$  — предел прочности материала,  $H/m^2$   
 $\sigma_{пч.p}$  — предел прочности на растяжение хрупкого материала,  $H/m^2$   
 $\sigma_{пч.c}$  — предел прочности на сжатие хрупкого материала,  $H/m^2$   
 $\sigma_p$  — условное напряжение, при котором происходит разрыв образца,  $H/m^2$   
 $\sigma_{ст}, \sigma_d$  — статическая и динамическая составляющие напряжения в динамическом нагружении,  $H/m^2$   
 $\sigma_T$  — предел текучести,  $H/m^2$   
 $\sigma_{эkv}$  — эквивалентное нормальное напряжение,  $H/m^2$   
 $[\sigma], [\tau]$  — допускаемые нормальное и касательное напряжения соответственно,  $H/m^2$   
 $[\sigma_p], [\sigma_c]$  — допускаемое нормальное напряжение растяжения, сжатия соответственно,  $H/m^2$   
 $\tau_Q, \tau_{кр}$  — касательное напряжение, определяющее поперечную силу, крутящий момент соответственно,  $H/m^2$

- $\tau_{\text{щ}}, \tau_y, \tau_T$  — касательное напряжение, соответствующее пределу пропорциональности, упругости, текучести соответственно, Н/м<sup>2</sup>
- $[\tau']$  — допускаемое касательное напряжение с учетом ослабления материала шва сваркой, Н/м<sup>2</sup>
- $\varphi$  — коэффициент снижения допускаемых напряжений в сварном шве и при продольном изгибе, также сдвиг фаз в колебаниях, б/р
- $\varphi, \Delta\varphi$  — угол закручивания бруса, участка соответственно, б/р
- $\psi$  — относительное сужение образца после разрыва, %
- $\psi_\sigma, \psi_\tau$  — коэффициенты при средних напряжениях, учитывающие асимметрию цикла, т. е. влияние среднего напряжения на снижение предела выносливости симметричного цикла, по нормальным и касательным напряжениям соответственно, б/р
- $\Omega, \omega$  — частота колебаний вынужденная, собственная соответственно, 1/с
- $\omega_i$  — площадь  $i$ -й фигуры на эпюре моментов, Нм<sup>2</sup>, или м<sup>2</sup>, или м
- $\Omega_{\text{кр}}$  — критическая скорость вращения, 1/с

---

## ГЛАВА 1

# ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИСЦИПЛИНЕ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

### 1.1. ДИСЦИПЛИНА «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Сопротивление материалов — это наука, позволяющая достаточно простыми средствами анализа устанавливать особенности сопротивления элементов конструкций нагрузкам и вычислять рациональные размеры элементов конструкций или величины допускаемых нагрузок. Здесь уместно вспомнить эмоциональную и в то же время точную оценку, данную создателем современного полного курса В. И. Феодосьевым, по которой сопротивление материалов — «это введение в высокое общество прикладных наук прочностного цикла, дающих углубленную проработку вопросов, связанных с конкретными техническими направлениями». Значит, сопротивление материалов — это лишь введение в прочностные науки для инженера-конструктора. Дисциплина основывается на знаниях разделов физики, материаловедения, высшей математики, теоретической механики. При этом в теоретической механике и сопротивлении материалов изображения конструкции и приложенной к ней нагрузки внешне похожи. Существенное различие заключается в том, что в теоретической механике изучают абсолютно твердые тела, а в сопротивлении материалов деформируемые. Учет деформируемости тел в сопротивлении материалов позволяет проводить конструкторские расчеты. Таким образом, предметом изучения дисциплины «Сопротивление материалов» являются деформируемые твердые тела.

Объектами анализа и расчетов в сопротивлении материалов являются элементы (детали) конструкции, нахо-



дящиеся под нагрузкой. Нагрузка воздействует на деталь со стороны контактирующих с ней тел или за счет возникающих сил инерции, температурных эффектов. Элемент конструкции и действующая на него нагрузка рассматриваются в упрощенном, схематизированном виде. Реальная конструкция под нагрузкой, освобожденная от несущественных особенностей и представленная схематично, служит **расчетной схемой**. Освобождение конструкции и нагрузки от несущественных особенностей, т. е. ее идеализация, приводит к упрощению расчетов в сопротивлении материалов. Средствами инженерной теории с привлечением экспериментальных методов проводится анализ расчетной схемы для выявления ее прочностных и деформационных закономерностей.

Расчетная схема должна определять **работоспособность элемента конструкции**, т. е. его способность выполнять заданную рабочую функцию в соответствии с требованиями технической документации. Работоспособность определяется параметрами рассматриваемого элемента конструкции. Ее нарушение происходит при **параметрах (критериях), называемых предельными**.

Работоспособность в сопротивлении материалов рассматривается с точки зрения способности надежно удерживать нагрузку в заданном месте ее приложения по заданному направлению. При этом понятие надежности здесь ограничено условием того, что значение рабочего параметра в элементе конструкции должно быть меньше предельного в определенное число раз. Это число называется **коэффициентом запаса**. Его величина определяется статистическими данными отказов в работе.

С широким распространением вычислительной техники появилась и возможность весьма точного решения сложных задач с применением методов расчета с помощью ЭВМ. Однако вследствие некоторого разброса табличных значений свойств конструкционных материалов и назначаемых коэффициентов запаса точность решений задач в сопротивлении материалов ограничивается допускаемой погрешностью  $\pm 5\%$ , что дает возможность вести расчет не реальной нагруженной детали, а ее упрощенного варианта

в виде схематизированного (идеализированного) объекта, названного расчетной схемой. Осмысленное приведение реальной нагруженной детали к расчетной схеме вносит некоторую погрешность, но при этом упрощает задачу настолько, что позволяет простыми аналитическими методами получать результаты, наглядно иллюстрирующие возможности по повышению работоспособности детали.

В дисциплине «Соппротивление материалов» рассматривают три основных вида оценочных расчетно-конструкторских задач по обеспечению детали работоспособностью в условиях действия различного рода нагрузок:

- **задачи прочности**, заключающиеся в оценке способности элемента конструкции сопротивляться создаваемым нагрузкам, не разрушаясь;
- **задачи жесткости**, заключающиеся в оценке способности элемента конструкции сопротивляться создаваемым нагрузкам, не претерпевая значительных деформаций;
- **задачи устойчивости**, заключающиеся в оценке способности элемента конструкции сопротивляться создаваемым нагрузкам, сохраняя свою первоначальную равновесную форму.

## 1.2. СОСТАВЛЯЮЩИЕ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ

Расчетная схема составляется из представленных по свойствам схематично: материала, геометрии конструкции, видов опор и силовой нагрузки.

Материал считают: непрерывным (сплошным), однородным и изотропным (с одинаковыми свойствами по всем направлениям), идеально упругим (без остаточных деформаций после снятия нагрузки).

Размеры всех исследуемых объектов, включая понятия бесконечно малых объемов, используемые в аналитических решениях, считаются несоизмеримо большими по сравнению с размерами структурных составляющих материала — его кристаллических зерен, молекул, микропор и т. д. На этом основании атомарная или молекулярная микроструктура материала не учитывается и вводится понятие **непре-**

**рывности, или сплошности, материала.** Оно означает, что материал, заполняет занимаемый им объем без промежутков в каждой сколь угодно малой точке тела. Такая схематизация дает возможность применять классический математический аппарат механики сплошной среды.

**Однородность** означает абсолютную схожесть свойств материала во всем его объеме. Представление материала однородным довольно точно соответствует объектам расчетов в сопротивлении материалов.

**Изотропность** означает абсолютную схожесть свойств материала по любому направлению. Понятие изотропности может распространяться не на все материалы. Так, дерево, композиты, волокнистые материалы могут иметь существенную анизотропию, т. е. различие свойств материала в зависимости от выбранного направления. Поэтому вводимая идеализация должна быть обоснована в конкретных случаях. Для рассматриваемых в курсе материалов (в основном это металлы) анизотропией можно пренебречь.

Применение к материалу понятия **идеальной упругости** означает пропорциональность между нагрузкой и вызываемыми ею деформациями. Такая идеализация не вносит существенных погрешностей в задачи, которые рассматриваются в курсе, поскольку в рассматриваемых задачах деформации весьма малы и материал нагружается в области действия закона Гука.

Однородность, изотропность и идеальная упругость существенно упрощают математический аппарат анализа.

Схематизированные элементы конструкций представляют в виде бруса, оболочки или массива (рис. 1.1).

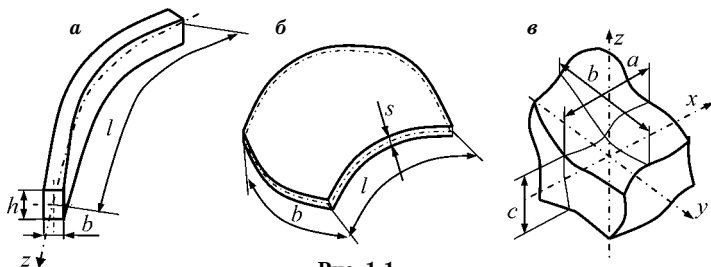


Рис. 1.1  
Схематизированные элементы

**Брусом** называют тело, у которого из трех ( $b$ ,  $h$ ,  $l$ ) характерных размеров один ( $l$ ) много больше двух других ( $b$ ,  $h$ ) (рис. 1.1а). Брус может быть прямолинейным или криволинейным. **Осью бруса  $z$**  называют линию, направленную вдоль наибольшего размера бруса и соединяющую точки центров тяжести его поперечных сечений. Ее называют **центральной**. Плоскость сечения бруса, перпендикулярная оси  $z$ , называется **поперечной плоскостью**. Брус, работающий на растяжение–сжатие, называют **стержнем**. Брус, передающий крутящий момент и вращаемый вокруг своей оси  $z$ , называют **валом**. Брус, подвергаемый изгибу, называют **балкой**. Систему неподвижно (жестко) соединенных между собой брусьев называют **рамой**.

**Пластиной**, оболочкой называют тело, у которого один ( $s$  — толщина; может обозначаться символом  $\delta$ ) из трех ( $s$ ,  $l$ ,  $b$ ) взаимоперпендикулярных характерных размеров много меньше двух ( $b$ ,  $l$ ) других (рис. 1.1б). Штрихпунктирная линия на этом рисунке показывает след **срединной поверхности** — геометрического места точек, равноудаленных от поверхностей пластины (оболочки).

**Массив** — это тело, у которого все три взаимоперпендикулярных характерных размера ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) соизмеримы друг с другом (рис. 1.1в).

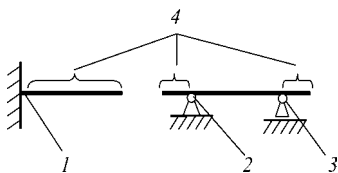
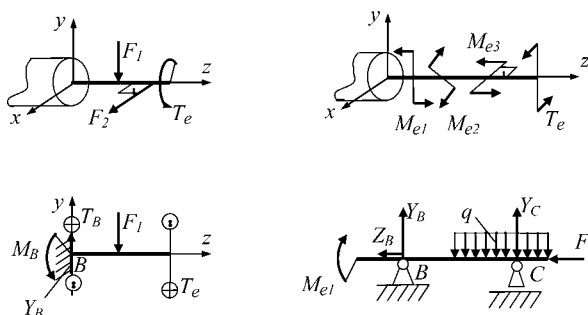


Рис. 1.2  
Схемы опор

Крепление тел представляют в виде неподвижной опоры, называемой «заделкой» 1 (рис. 1.2), шарнирной неподвижной 2 и шарнирной подвижной 3 опор.

Опора, препятствующая любым перемещениям стержня в месте ее расположения, называется **жесткой заделкой** или просто **заделкой**. Стержень, укрепленный только одним своим концом в заделке, или свободная часть стержня, выступающая за пределы шарнирной опоры 4, называется **консолью**.

Опора, препятствующая линейным перемещениям конструкции в сечении, где она установлена, и не препятствующая повороту вокруг своей оси, называется **шарнир-**



**Рис. 1.3**  
Виды изображения нагрузок и опорных реакций

**ной неподвижной опорой.** Опора, препятствующая линейному поперечному перемещению тела в сечении, где она установлена, и не препятствующая повороту тела вокруг оси шарнира и перемещению вдоль оси стержня, называется **шарнирной подвижной опорой.**

Понятием «нагрузка» будем определять внешнее воздействие на рассматриваемую конструкцию (рис. 1.3). Приложенную нагрузку (далее — нагрузка) рассматривают в виде: сил и пар сил, характеризующихся их моментом; сосредоточенных и распределенных (погонных — распределенных по оси тела, поверхностных, объемных); активных и реактивных; статических, динамических, циклических.

*Схематизированные нагрузки в виде сосредоточенных и распределенных сил и моментов.* Сосредоточенные силы обозначаются символами  $F, N, Q, X, Y, Z, R$  с размерностью Н, распределенные по линии (погонные) —  $q$  с размерностью Н/м, распределенные по поверхности (давление) —  $P$  с размерностью Н/м<sup>2</sup>. Силы, действующие вдоль оси  $z$ , называют продольными и обозначают символами  $F, Z, N$ . Силы, действующие перпендикулярно оси  $z$ , называют поперечными и обозначают символами  $F, Q, X, Y, R$ .

Сосредоточенные моменты обозначают как  $M$  и  $T$  с размерностью Н·м. Символом  $M_i$  обозначают моменты, изгибающие тело вокруг оси  $i$  ( $x$  или  $y$ ), символом  $T$  — моменты, скручивающие тело вокруг оси  $z$ . Приложенные к телу

внешние моменты могут обозначаться как  $M_e$  и  $T_e$  (external — внешний).

Нагрузка подразделяется на активную ( $F, q, M_e, T_e$ ) и реактивную ( $X_k, Y_k, Z_k, R_k, M_k, T_k$ ) для  $k$ -й опоры. Реактивной нагрузкой называют опорные реакции.

На рис. 1.3а, б нагрузка в расчетных схемах показана в пространственном изображении, на рис. 1.3в, г — в плоском. Сила  $F_2$ , момент  $M_{e3}$  расположены в горизонтальной плоскости, моменты  $M_{e1}$  и  $M_{e2}$  — в вертикальной (в плоскости листа), момент  $T_e$  — в плоскости, перпендикулярной оси бруса.

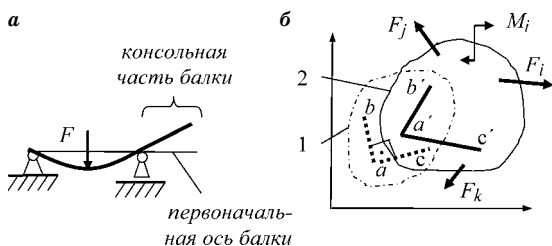
**Статические нагрузки** постоянны или медленно изменяются во времени. Они могут изменяться настолько медленно, что можно пренебречь возникающими инерционными составляющими или снижением прочности материала за счет цикличности нагрузки в пределах срока службы детали.

**Динамические нагрузки** отличаются от статических тем, что создаваемые ими инерционные эффекты существенны и ими нельзя пренебрегать.

**Циклические нагрузки** — это периодические нагрузки, приводящие в пределах срока службы детали к снижению прочностных свойств материала детали. В задачах курса рассматриваются циклические нагрузки, не создающие существенных инерционных эффектов.

### 1.3. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ. ИЗМЕНЕНИЯ РАЗМЕРОВ. ДЕФОРМАЦИИ

Под действием нагрузки тело деформируется, меняет свои размеры и форму. Изменение положения, т. е. координат точек деформируемого тела, в пространстве под действием нагрузки соответствует их линейным или угловым **перемещениям**. Перемещение может сопровождаться изменением размеров или формы тела или его части. Так, балка без нагрузки с прямолинейной осью изгибается между опорами, изменяя форму после приложения силы  $F$  (рис. 1.4а). Ненагруженная консольная часть балки лишь



**Рис. 1.4**  
Виды деформирования тел

поворачивается вокруг правой опоры, изменяя свои координаты, но оставаясь прямолинейной.

На рис. 1.4б показано плоское тело, которое под действием нагрузки из формы 1 приняло под нагрузкой форму 2. При этом произошло перемещение точки  $a$  в точку  $a'$  и изменились ее координаты. Отрезок  $ab$  стал отрезком  $a'b'$ , т. е. изменились его размеры на величину

$$\Delta ab = a'b' - ab. \quad (1.1)$$

Разность между конечной и начальной величинами первоначально прямого угла  $\angle cab$  выразится как

$$\angle c'a'b' - \angle cab = \theta. \quad (1.2)$$

Формула (1.1) указывает на линейное изменение размеров участка тела вдоль отрезка  $ab$ , формула (1.2) — на угловое изменение размеров (формы) тела.

Предел относительного изменения линейных размеров и формы тела будем называть **относительной деформацией** (далее — **деформацией**), которая является безразмерной величиной. Часто термином «деформация» определяют любое изменение положения или размеров тела.

Предел относительного изменения линейного размера отрезка тела в данной точке по выбранному направлению при стремлении величины отрезка к нулю называют **линейной деформацией**  $\epsilon$ :

$$\lim_{ab \rightarrow 0} \frac{\Delta ab}{ab} = \epsilon_{ab}. \quad (1.3)$$

Выбирая различные направления отрезков  $ab$  и  $ac$ , будем получать различные линейные деформации.



Деформацию вдоль линии действия нагрузки называют **продольной линейной деформацией**. Продольную деформацию вдоль оси  $z$  обозначают как  $\varepsilon_z$ . Деформацию, перпендикулярную нагрузке, называют **поперечной линейной деформацией** и обозначают по отношению к продольной  $\varepsilon_z$  как  $\varepsilon_x$  или  $\varepsilon_y$ .

Предел изменения угловых размеров в некоторой точке тела в выбранной плоскости называют **угловой деформацией**, **углом сдвига**  $\gamma$  в точке  $a$  в плоскости  $bac$ :

$$\lim_{ab \rightarrow 0, ac \rightarrow 0} (\angle b'a'c' - \angle bac) = \gamma_{bac}. \quad (1.4)$$

Выбирая различные ориентации плоскости, где размещаем отрезки  $ab$  и  $ac$ , будем получать различные угловые деформации. В координатных плоскостях угловые деформации прямых углов бесконечно малого кубика обозначают как  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ ,  $\gamma_{xy}$ . В этих обозначениях подстрочные индексы соответствуют координатной плоскости, в которой происходит угловая деформация.

Линейная и угловая деформации могут меняться в точке тела в зависимости от направлений координатных осей, проводимых через выбранную точку, а также от точки к точке тела.

Совокупность линейных деформаций и углов сдвига для всевозможных направлений координатных осей, проводимых через выбранную точку, образует **деформированное состояние материала в точке**.

Деформации, исчезающие после снятия нагрузки, называют упругими. Деформации, остающиеся в теле после снятия нагрузки, называют **пластическими**.

## 1.4. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ УПРУГОСТИ. НАПРЯЖЕНИЯ

До приложения нагрузки между частицами твердого тела действуют внутренние силы упругости, сохраняющие форму тела. После приложения нагрузки тело деформируется, расстояния между частицами меняются, и потому меняются внутренние силы упругости. Решение задач сопротивления материалов связано с определением не абсо-



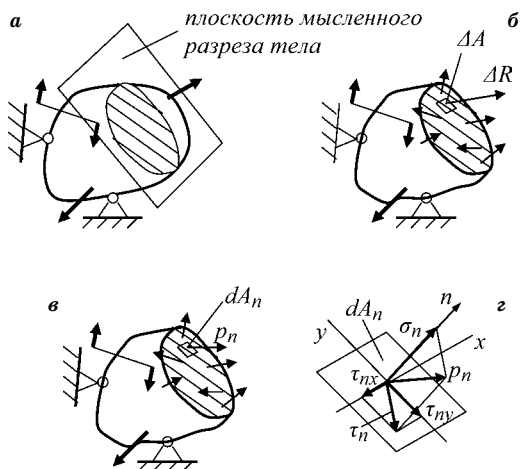


Рис. 1.5  
 Полное, нормальное и касательные напряжения

лютой величины сил упругости, а лишь с величиной их изменения. Именно величину изменения внутренних сил при упругой деформации называют в сопротивлении материалов **внутренними силами упругости**. Поэтому в дальнейшем, говоря о внутренних силах упругости, будем иметь в виду лишь величину их изменения под действием приложенной к телу нагрузки (внешней).

Для иллюстрации сил упругости представим себе закрепленное в пространстве нагруженное тело (рис. 1.5а). Мысленно разрежем его плоскостью и отбросим одну из частей. Внутренние силы упругости распределяются непрерывно и в общем случае неравномерно в объеме тела. По каждой мысленно выделенной площадке ΔA действует их некоторая величина (векторная) ΔR (рис. 1.5б). Стягивая площадку ΔA к бесконечно малой (элементарной), получим предел отношения внутренних сил упругости, действующих на элементарной площадке, к ее величине, называемый **полным напряжением**:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} = \frac{dR}{dA_n} = p_n. \quad (1.5)$$

При этом важна ориентация площадки dA, определяемая положением нормали n к ней. Поэтому в обозначении



самой элементарной площадке и полного напряжения имеется подстрочный индекс:  $dA_n$  и  $p_n$ .

Полное напряжение  $p_n$  на выбранной элементарной площадке  $dA_n$  представляет собой вектор, некоторым образом ориентированный в пространстве (рис. 1.5в). Полное напряжение в общем случае зависит от выбора места (точки) и ориентации площадки и будет другим в ином месте или при ином наклоне площадки (иной нормали  $n$ ).

В дальнейшем аналитическом исследовании используют не само полное напряжение  $p_n$ , а его проекции на нормаль и касательную к выбранной элементарной площадке. Проекцию полного напряжения на нормаль называют **нормальным напряжением** и обозначают  $\sigma_n$ . Проекцию полного напряжения на касательную к поверхности называют **касательным напряжением** и обозначают  $\tau_n$ . Касательное напряжение также представляют в виде проекций на оси  $x$  и  $y$ , лежащие в касательной плоскости, как  $\tau_{nx}$  и  $\tau_{ny}$  соответственно. При этом очевидна связь

$$\tau_n^2 = \tau_{nx}^2 + \tau_{ny}^2. \quad (1.6)$$

Между полным, нормальным и касательным напряжениями имеется зависимость (рис. 1.5з)

$$p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_{nx}^2 + \tau_{ny}^2. \quad (1.7)$$

Обратим внимание на то, что реально существует лишь полное напряжение на выбранной бесконечно малой площадке в конкретной точке нагруженного тела. Нормальное и касательное напряжения введены для удобства дальнейших расчетов.

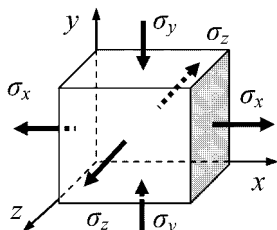


Рис. 1.6  
Условно выделенный кубик в некоторой точке материала тела

В рамках рассматриваемого объема дисциплины «Соппротивление материалов» выбор знака важен лишь для нормальных напряжений  $\sigma$ . Если они направлены от площадки, что соответствует растяжению, то им присваивают положительный знак; если направлены в сторону площадки, что соответствует сжатию, то —

отрицательный. На рис. 1.6 показан нагруженный кубик в статическом состоянии, для которого на правой и левой, передней и задней площадках действуют нормальные напряжения растяжения ( $\sigma_x > 0$ ,  $\sigma_z > 0$ ), на верхней и нижней — нормальные напряжения сжатия ( $\sigma_y < 0$ ).

Заметим, что выделенный до нагружения прямоугольный кубик деформируется под действием нормальных напряжений, оставаясь прямоугольным. При этом линейные деформации определяют изменение его объема. Под действием касательных напряжений прямоугольный кубик деформируется, превращаясь за счет угловых деформаций в скошенный параллелепипед. При этом величина его объема остается неизменной вследствие малых углов сдвига. Значит, угловые деформации связаны с изменением формы.

### 1.5. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ. ВИДЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Пусть имеется брус с пространственной произвольной нагрузкой (рис. 1.7а). Мысленно рассечем брус поперечной (перпендикулярной оси  $z$ ) плоскостью  $B$  и отбросим его правую часть. В сечении  $B$  действуют внутренние силы упругости в виде полных напряжений, в общем случае меняющихся от точки к точке сечения. Полное напряжение представим нормальным  $\sigma$  и касательным  $\tau$  напряжениями (рис. 1.7б). При этом дополнительно разложим  $\tau$  на составляющие вдоль осей  $x$  и  $y$  (рис. 1.7в).

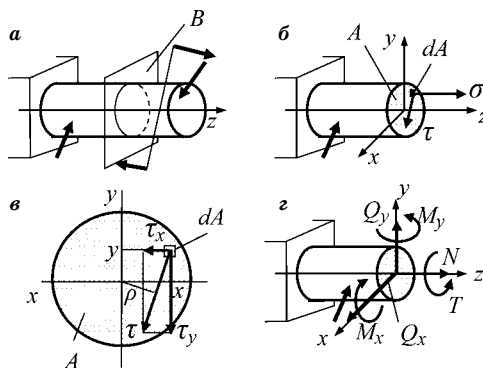


Рис. 1.7  
Формирование  
внутренних силовых  
факторов

Их результирующее (интегральное) по всему сечению действие, приведенное к центру тяжести сечения, образует в общем случае главный вектор-силу системы и главный момент системы относительно центра тяжести. Проекции главного вектора сил упругости на оси  $xuz$  и их главного момента вокруг этих осей, соответствующие трем силам и трем моментам, будем называть **внутренними силовыми факторами**.

Итак, составляющие полного напряжения  $p$ , т. е. нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения, могут быть представлены внутренними силовыми факторами. Внутренние силовые факторы определяются интегрированием нормальных и касательных напряжений по всему сечению площади  $A$  (рис. 1.7z).

В результате получаем вдоль оси  $z$  продольную силу:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA. \quad (1.8)$$

А вдоль осей  $x$  и  $y$  — поперечные силы соответственно:

$$Q_x = \int_A \tau_x \cdot dA, \quad (1.9)$$

$$Q_y = \int_A \tau_y \cdot dA. \quad (1.10)$$

Вокруг осей  $x$  и  $y$  изгибающие моменты:

$$M_x = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA, \quad (1.11)$$

$$M_y = \int_A \sigma \cdot x \cdot dA. \quad (1.12)$$

Вокруг оси  $z$  крутящий момент:

$$T = M_z = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = \int_A (\tau_x \cdot y - \tau_y \cdot x) \cdot dA. \quad (1.13)$$

Из формул (1.8)...(1.13) следует то, что внутренние силовые факторы — это форма представления изменения внутренних сил упругости, выраженная интегральным (результирующим) по всему поперечному сечению действием нормальных и касательных напряжений. Иначе мож-

но сказать так: результирующее по всей площади поперечного сечения действие полных напряжений, представленное в виде проекций сил на оси и моментов вокруг осей, образует внутренние силовые факторы.

Наличие в поперечном сечении того или иного внутреннего силового фактора или их комбинации определяет вид сопротивления и соответствующий ему вид деформаций, а также дает возможность судить о характере распределения напряжений в поперечном сечении.

В конкретных задачах вид и распределение напряжений в поперечном сечении могут быть различными. В следующих разделах будут описаны формулы, связывающие напряжения и характер их распределения в поперечном сечении с конкретными внутренними силовыми факторами.

В задачах дисциплины «Сопротивление материалов» оказалось проще вначале определять внутренние силовые факторы, их величину и уже по ним — вид, величину и характер распределения действующих напряжений, деформаций и других параметров расчетной схемы. Такая последовательность обусловлена простотой определения внутренних силовых факторов и по ним — напряжений и деформаций, по которым производят окончательный расчет.

В зависимости от количества возникающих в сечении внутренних силовых факторов различают простое и сложное сопротивление. Иногда вид сопротивления могут называть видом нагружения. Однако мы будем оперировать понятием «вид сопротивления» как более устоявшимся и соответствующим названию дисциплины. Термин «нагружение» будет относиться к приложенной к телу нагрузке.

**Простым сопротивлением** называют такое условие, при котором в поперечном сечении действует лишь один из внутренних силовых факторов. Он связан с соответствующими ему напряжениями и деформациями.

При наличии только продольной силы  $N$  вид сопротивления называют **растяжением—сжатием**. Происходит продольное смещение сечений бруса по направлению его оси  $z$ .

При наличии только поперечной силы  $Q_x$  или  $Q_y$  вид сопротивления называют **сдвигом, чистым сдвигом**. Происходит поперечное смещение сечений бруса, т. е. перпендикулярно оси  $z$ .

При наличии только изгибающего момента  $M_x$  или  $M_y$  вид сопротивления называют **чистым изгибом**. Сопротивление, при котором в поперечном сечении возникают момент  $M_x$  и сила  $Q_y$  или  $M_y$  и  $Q_x$ , соответствует **поперечному изгибу**. Происходит поперечное смещение и поворот оси бруса в плоскости действия нагрузки.

Поперечное смещение называют прогибом, поворот — углом поворота.

При наличии только крутящего момента  $T$  вид сопротивления называют **кручением**. Происходит поворот сечений бруса вокруг его оси  $z$ , называемый углом закручивания бруса.

Умение определять напряжения, линейные и угловые деформации, перемещения понадобится в дальнейшем в расчетах на прочность, жесткость, в расчетах статически неопределимых систем, систем в условиях динамического и циклического нагружения, систем на устойчивость, а также в расчетах систем, подверженных колебаниям.

Если в поперечном сечении действуют два и более внутренних силовых фактора, то такой вид сопротивления относят к **сложному сопротивлению**. Это правило не будет распространяться в дальнейшем на два обоснованных исключения. Так, возникновение в поперечном сечении цилиндрической пружины одновременно поперечной силы и крутящего момента, а в балке одновременно поперечной силы и изгибающего момента позволяет, как правило, рассматривать такие виды сопротивления как простые. О причинах этих исключений будет сказано в главах 6 и 7.

Ознакомившись с материалом данного подраздела, можно сделать вывод: названием дисциплины «Сопротивление материалов» выражается роль внутренних силовых факторов, выявляемых при нагружении тела. Их количество и вид влияют на характер дальнейших расчетов.

## 1.6. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Для определения внутренних силовых факторов используется метод сечений. Он состоит из четырех последовательных действий (рис. 1.7а, з):

- разрезаем мысленно тело на две части поперечной (перпендикулярной оси  $z$ ) плоскостью  $B$  (рис. 1.7а);
- отбрасываем одну из частей тела (как правило, более сложную);
- заменяем действие отброшенной части на оставшуюся реакциями, действующими в поперечном сечении, т. е. являющимися в данном случае внутренними силовыми факторами (рис. 1.7з);
- записываем для остающейся (рассматриваемой) неподвижной части тела уравнения статики, по которым определяем значения внутренних силовых факторов.

Величина внутренних силовых факторов может меняться по длине расчетной схемы детали. Поэтому расчетную схему мысленно делят на участки, где вид функций, описывающих каждый внутренний силовой фактор, неизменен. При этом сами внутренние силовые факторы могут меняться внутри участка в соответствии с видом описывающей их зависимости и изменением аргумента (координаты  $z$ ). Внутренние силовые факторы определяют методом сечений последовательно на каждом участке расчетной схемы.

Для решения задач нам также придется находить напряжения, которые могут меняться по длине конструкции, поскольку зависят от геометрических параметров поперечных сечений. Поэтому при определении количества участков нам также придется учитывать изменения в геометрии поперечных сечений, включая изменение направления оси  $z$ .

Функции изменения внутреннего силового фактора по участкам представляют в виде графика под расчетной схемой с осью абсцисс  $z$ , параллельной оси бруса, и осью ординат искомого параметра, например внутреннего силового фактора. Положительные значения искомого пара-



метра принято откладывать в сторону направления оси  $y$  или  $x$ . Площадь под эюрой имеет равномерную штриховку, перпендикулярную оси  $z$ . Этот график называют в дисциплине «Сопротивление материалов» эюрой.

## 1.7. ЗАКОН ГУКА

В данном изложении дисциплины «Сопротивление материалов» рассматриваются в основном такие системы, в которых нагрузка и вызываемые ею деформации находятся в пропорциональной зависимости, т. е. исследуются упругие линейно деформируемые системы. Это наблюдение было сформулировано и высказано Гуком:

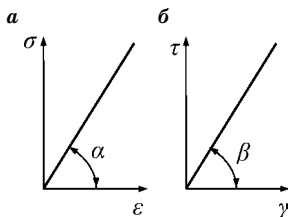


Рис. 1.8  
Графическое проявление  
закона Гука

$$F = K \cdot \Delta l, \quad (1.14)$$

где  $F$  — нагрузка,  $K$  — размерный коэффициент пропорциональности,  $\Delta l$  — изменение размеров тела. Оно получило название закона Гука.

В сопротивлении материалов закон Гука представляют в координатах «деформация–напряжение» (рис. 1.8). При таком представлении нагрузка как внешний параметр заменяется составляющими сил упругости в виде нормальных или касательных напряжений. Так, закон Гука при растяжении–сжатии имеет вид

$$\sigma = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha = E \varepsilon, \quad (1.15)$$

где  $E = \operatorname{tg} \alpha$  — **модуль упругости первого рода** (его также называют модулем продольной упругости или модулем Юнга) с размерностью  $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$ .

Закон Гука при сдвиге имеет вид

$$\tau = \gamma \operatorname{tg} \beta = G \gamma. \quad (1.16)$$

где  $G = \operatorname{tg} \beta$  — **модуль упругости второго рода** (его также называют модулем сдвига) с размерностью  $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$ .

Формулы (1.15) и (1.16) являются функциями наклонных прямых, указывающими на пропорциональную связь

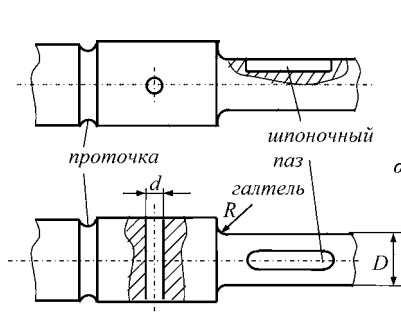


между деформациями и напряжениями в области действия закона Гука. Модули упругости первого ( $E$ ) и второго ( $G$ ) рода характеризуют жесткость материала и равны тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс.

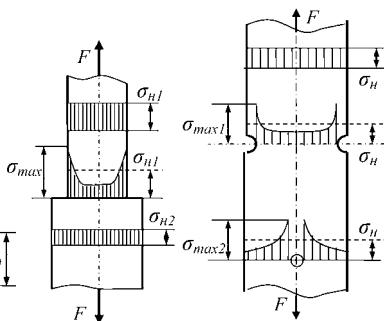
### 1.8. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ. КОНЦЕНТРАТОРЫ НАПРЯЖЕНИЙ

Каждый внутренний силовой фактор соответствует определенному распределению напряжений по сечению. Простые виды нагружения (сопротивления) соответствуют простым видам распределения напряжений в поперечном сечении. Однако это справедливо для той части детали, где ее форма является регулярной, т. е. не имеет резких изменений. Если в детали имеется выточка, резкое изменение формы или величины поперечного сечения, направления оси  $z$ , появляются проточка, паз, имеется грубая обработка поверхности и др. (рис. 1.9), то в этом месте происходит резкое изменение условий деформирования детали.

В результате характер изменения напряжений нарушается, величина максимальных напряжений в местах, непосредственно примыкающих к таким конструкционным особенностям, резко возрастает (напряжения  $\sigma_{\max}$  на рис. 1.10). Изменяется также вид напряженного состояния: простое превращается в сложное (виды напряженного



**Рис. 1.9**  
Виды концентраторов напряжений



**Рис. 1.10**  
Изменения распределения напряжений в зоне концентратора напряжений

состояния рассмотрены далее в главах 8...11). Имеет место так называемая стесненная деформация, т. е. деформация, отличная от той, которая имела бы место при отсутствии концентратора напряжений. Место резкого изменения деформационных свойств детали является **концентратором напряжений**.

Однако изменение распределения напряжений является локальным и ограничено зоной непосредственной близости к вызвавшей их конструкционной особенности детали. Вне этой зоны концентратор не оказывает влияния на напряжения. Они становятся соответствующими виду внутреннего силового фактора и называются номинальными (напряжения  $\sigma_n$  на рис. 1.10).

Напряжение, вычисленное на основе предположений об отсутствии концентрации напряжений, называют **номинальным напряжением** и обозначают как  $\sigma_n$ . Местный рост напряжений от концентратора учитывается при необходимости введением коэффициентов, увеличивающих номинальное напряжение до некоторого максимального  $\sigma_{max}$ . Оно может превышать номинальное в 2–3 раза и более.

В зоне концентрации напряжений возникают пластические деформации, сглаживающие эффект стесненной деформации. Принято считать, что при статической нагрузке пластичные материалы слабо чувствительны к концентрации напряжений. При ударных или циклических нагрузках влияние концентраторов напряжений учитывается введением коэффициентов концентрации напряжений. Хрупкие материалы весьма чувствительны к влиянию концентраторов напряжений. Понятия пластичных и хрупких материалов даны в главе 3.

## 1.9. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ В МЕТОДИКАХ РАСЧЕТА ДИСЦИПЛИНЫ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Для упрощения методов аналитического исследования, т. е. расчета, кроме упрощения конструкции детали и ее нагрузки до расчетной схемы в задачах сопротивления материалов применяют следующие принципы.

**Принцип начальной ненагруженности тела:** в теле до приложения нагрузки отсутствуют напряжения, образующие внутренние силовые факторы. Принцип позволяет не учитывать напряжения, возникшие до приложения нагрузки.

**Принцип начальных размеров тела:** перемещение точек тела под действием приложенной нагрузки мало по сравнению с размерами тела и им можно пренебречь. Принцип позволяет записывать уравнения статики без учета изменений размеров тела (деформаций), происходящих под действием нагрузки.

**Принцип независимости распределения напряжений от способа приложения нагрузки** (но не от вида самой нагрузки) — **принцип Сен-Венана:** в точках тела, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки, характер распределения напряжений по сечению не зависит от способа приложения этих нагрузок и зависит от вида нагружения. Принцип позволяет вести расчеты без учета концентраторов напряжений. В необходимых случаях местное повышение напряжений учитывается введением поправочных коэффициентов.

**Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции):** результат воздействия на тело системы сил не зависит от последовательности их приложения и равен сумме результатов воздействий на это тело отдельно приложенных сил. Этот принцип справедлив лишь для линейно деформируемых систем, т. е. таких, у которых деформации пропорциональны прилагаемой нагрузке (см. раздел 1.7). Возможность использования этого принципа позволяет решать статически неопределимые системы, вести расчеты при сложном сопротивлении.

### 1.10. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ НАГРУЖЕННОГО ТЕЛА

В сопротивлении материалов рассматриваются простые тела в условиях равновесия. Для решения задач используют уравнения статики. При динамических нагрузках в эти уравнения вводят инерционные составляющие

по принципу д'Аламбера. Их добавление означает, что нагрузка, действующая на рассматриваемое тело или его часть, уравновешена и можно составлять уравнения статики. Реакции рассматривают в виде их проекций на выбранную систему осей (силы) и вокруг них (моменты). Реакции являются следствием ограничения перемещений тела в направлении, определяемом действующей системой сил. Каждое ограничение называют наложенной связью или просто связью. Сколько ограничено направлений перемещений вдоль осей и вокруг них, столько связей наложено на систему и столько реакций в ней возникает. Для рамных систем, которые в данном изложении не рассматриваются, понятие связи потребует уточнения.

Для равновесного состояния тела необходимо некоторое наименьшее число определенных связей в опорах, которое зависит от вида и размещения нагрузки. Если связей недостаточно, система превращается в механизм, элементы которого могут двигаться. Наименьшее необходимое для равновесия системы число связей в опорах, т. е. число возникающих опорных реакций, равно числу уравнений статики, которое можно записать для данной системы. То есть число возникающих опорных реакций равно числу уравнений статики, которое можно записать для данной системы. Такие системы называют **статически определенными** (рис. 1.11а, б, в). В статически определенных систе-

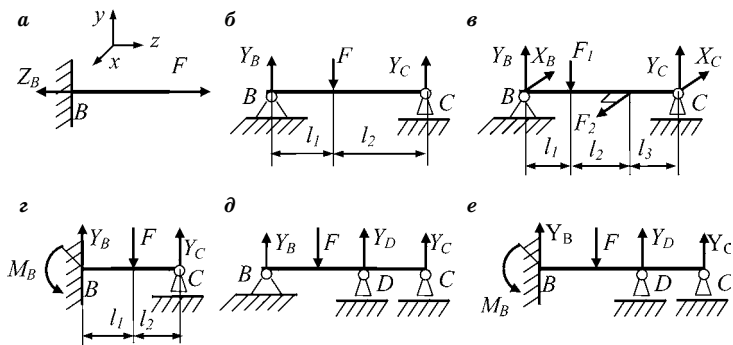


Рис. 1.11

Примеры статически определенных и статически неопределенных задач

мах все опорные реакции могут быть определены из равного их количеству числа уравнений статики. Если число связей (реакций) превышает число уравнений статики, нетривиальных для данной системы, то она называется **статически неопределимой** (рис. 1.11г, д, е). Это означает невозможность определения реакций системы лишь с помощью уравнений статики для системы в целом.

В теоретической механике показано: систему сил, действующих на тело, можно привести относительно некоторой точки к двум результирующим: к главному вектору-силе и главному моменту. Каждый из них имеет по три проекции относительно координатных осей. Для равновесия системы необходимо равенство нулю всех проекций. Значит, количество уравнений статики равно количеству возможных проекций главного вектора сил и главного момента, к которым можно привести действующие на конструкцию нагрузки.

В общем случае пространственного расположения этих векторов имеем шесть проекций: три проекции сил на оси *x*, *y* и *z* и три проекции моментов вокруг осей. Чтобы система находилась в равновесии, необходимо равенство нулю главного вектора сил и главного момента, а значит, равенство нулю всех шести их проекций. Для плоской системы непараллельных сил могут появиться лишь три проекции, для плоской системы параллельных сил — лишь две, для линейной системы сил — одна. Значит, для пространственной системы сил имеем шесть независимых уравнений статики, для плоской системы непараллельных сил — три, для плоской системы параллельных сил — два, для одноосной — одно.

Число опорных связей сверх необходимого для статичности системы называют **числом «лишних» связей**. Таким образом, «лишними» являются те связи, без которых система остается неподвижной для заданной нагрузки.

Число «лишних» связей также называют **степенью статической неопределимости системы**, которая соответствует числу дополнительных уравнений (к уравнениям статики), необходимых для определения неизвестных реакций и внутренних силовых факторов.

Первоначально направления реакций (сил и моментов) выбираются произвольно. Правила знаков в каждом уравнении статики также выбираются произвольно при соблюдении в каждом отдельном уравнении для всех его слагаемых выбранного правила. Если в результате расчета связь оказывается отрицательной, значит, она действует в обратном направлении.

**Пример 1.1.**

*Дано:* расчетная схема по рис. 1.11а.

*Требуется:* определить реакции в опорах.

*Решение.* Для одноосной системы сил по рис. 1.11а имеем лишь одно уравнение статики  $\sum Z_i = 0$ , по которому  $-Z_B + F = 0$ , откуда  $Z_B = F$ .

Любые другие уравнения статики для данной системы окажутся тривиальными, т. е. их левая часть будет иметь единственный член — саму реакцию. Значит, она тождественно будет равна нулю. Так, в уравнении

$$\sum M_{xB} = 0$$

левая часть раскрывается лишь как  $M_{xB} = 0$ , что тривиально. Поэтому такие уравнения не записывают.

**Пример 1.2.**

*Дано:* расчетная схема по рис. 1.11б.

*Требуется:* определить реакции в опорах.

*Решение.* Для системы плоских параллельных сил по рис. 1.11б имеем только два уравнения статики  $\sum M_{xB} = 0$  и  $\sum M_{xC} = 0$ , по которым  $Y_C(l_1 + l_2) - Fl_1 = 0$  и  $Y_B(l_1 + l_2) - Fl_2 = 0$ , откуда

$$Y_C = F \frac{l_1}{l_1 + l_2} \quad \text{и} \quad Y_B = F \frac{l_2}{l_1 + l_2}.$$

**Пример 1.3.**

*Дано:* расчетная схема по рис. 1.11в.

*Требуется:* определить реакции в опорах.

*Решение.* Для системы параллельных сил в двух плоскостях по рис. 1.11в имеем по два уравнения статики в каждой плоскости. Первое — для сил, действующих в вертикальной плоскости (плоскости рисунка),  $\sum M_{xB} = 0$  и  $\sum M_{xC} = 0$ , по которым  $Y_C(l_1 + l_2 + l_3) - F_1 l_1 = 0$  и  $Y_B(l_1 + l_2 + l_3) - F_1(l_2 + l_3) = 0$ , откуда



$$Y_C = F_1 \frac{l_1}{l_1 + l_2 + l_3} \text{ и } Y_B = F_1 \frac{l_2 + l_3}{l_1 + l_2 + l_3}.$$

Второе — для сил, действующих в горизонтальной плоскости,  $\sum M_{yB} = 0$  и  $\sum M_{yC} = 0$ , по которым  $X_C(l_1 + l_2 + l_3) - F_2(l_1 + l_2) = 0$  и  $X_B(l_1 + l_2 + l_3) - F_2 l_3 = 0$ , откуда

$$Y_C = F_2 \frac{l_1 + l_2}{l_1 + l_2 + l_3} \text{ и } Y_B = F_2 \frac{l_3}{l_1 + l_2 + l_3}.$$

#### Пример 1.4.

Д а н о: расчетная схема по рис. 1.11г.

Т р е б у е т с я: определить реакции в опорах.

*Решение.* Для системы плоских параллельных сил по рис. 1.11г имеем два уравнения статики  $\sum M_{xB} = 0$  и  $\sum M_{xC} = 0$ , по которым  $Y_C(l_1 + l_2) - Fl_1 + M_B = 0$  и  $Y_B(l_1 + l_2) - M_B - Fl_2 = 0$ . Здесь три неизвестные и лишь два уравнения статики. Поэтому задача является статически неопределимой. То же получаем для примеров по рис. 1.11д, е.

### 1.11. О РАСЧЕТАХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НА ЭВМ

Традиционные задачи сопротивления материалов достаточно просты и относятся к инженерным расчетам, не претендующим на точность выше  $\pm 5\%$ , о чем было сказано в разделе 1.1. Для ответственных и сложных элементов конструкций механические характеристики материала могут экспериментально устанавливаться для каждой изготавливаемой детали, например для каждого корпуса роторов жидкостных сепараторов. В этом случае целесообразна повышенная точность расчетов. Ответственность работы и сложность конфигурации реальных деталей, с одной стороны, и разработка машинных методов для вычислительной техники — с другой, привели к качественному более точным методам расчета.

Для достаточно простых, но трудоемких в вычислениях задач сопротивления материалов могут разрабатываться частные машинные методики расчетов. Главным в этих методиках является выбор наиболее общего элемента (участка).



Так, в задачах растяжения и сжатия прямолинейного бруса наиболее общим будет участок, содержащий все возможные нагрузки в виде моментов и сил сосредоточенных и распределенных, свой модуль продольной упругости и параметры поперечного сечения. Здесь также может быть учтен полный набор концентраторов напряжений.

В более сложных конструкциях требуется применение современных методов, таких как метод конечных элементов. Они основаны на результатах более точных прочностных дисциплин, и их рассмотрение не входит в программу дисциплины «Соппротивление материалов».

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИСЦИПЛИНЕ»

1. Перечислить три типа задач дисциплины сопротивления материалов.
2. Что называют расчетной схемой?
3. Дать пояснения свойствам идеализированного (схематизированного) материала: непрерывности, однородности, изотропности, идеальной упругости.
4. Дать пояснения разновидностям геометрических тел, исследуемых в дисциплине «Соппротивление материалов»: брус, оболочка или пластина, массив.
5. Какую ось называют центральной?
6. Что такое консоль?
7. Что такое деформация в точке тела и какие деформации рассматриваются в дисциплине «Соппротивление материалов»?
8. Что такое деформированное состояние в точке?
9. Какие деформации называют упругими?
10. Какие деформации называют пластическими?
11. Какие силы называют внутренними силами упругости?
12. Что называют полным напряжением?
13. Какое напряжение называют нормальным, какое — касательным?
14. Какова взаимосвязь между полным, нормальным и касательным напряжениями?
15. Что называют напряженным состоянием в точке?
16. Что называют внутренними силовыми факторами?
17. Какие внутренние силовые факторы в общем виде могут возникнуть в сечении?
18. Какой смысл вкладывают в понятие «вид сопротивления»?
19. Чем отличаются простые виды сопротивления от сложных?



20. Какой вид сопротивления называют растяжением–сжатием?
21. Какой вид сопротивления называют сдвигом?
22. Какой вид сопротивления называют изгибом?
23. Для чего применяют метод сечений?
24. Какова последовательность четырех действий в применении метода сечений?
25. Как записывается закон Гука при действии нормальных напряжений?
26. Как записывается закон Гука при действии касательных напряжений?
27. В чем заключается принцип начальной ненагруженности тела?
28. В чем заключается принцип начальных размеров тела?
29. В чем заключается принцип независимости распределения напряжений от способа приложения нагрузки (принцип Сен-Венана)?
30. В чем заключается принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции)? Для каких систем он применим?
31. Какую систему называют линейной, какую – нелинейной?
32. Создает ли момент проекцию силы на какую-нибудь ось?
33. Входит ли момент в уравнение суммы проекций сил на ось?
34. Входит ли момент в уравнение суммы моментов относительно оси, проходящей через точку, где расположен этот момент?
35. Входит ли сила в уравнение суммы моментов относительно оси, проходящей через точку, где расположена эта сила?
36. Назовите виды концентраторов напряжений.
37. Что называют связью тела в пространстве?
38. Какие системы называют статически определимыми?
39. Какие системы называют статически неопределимыми?
40. Что называют степенью статической неопределимости?
41. Что называют «лишней» связью?

---

## ГЛАВА 2

# НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИАЛА В ТОЧКЕ

В главе 1 было показано, что в материале нагруженного элемента возникают полные напряжения, которые в задачах сопротивления материалов представляют их проекциями, перпендикулярными к выделенной площадке или лежащими в ее плоскости. Напряжения, перпендикулярные к площадке, называют нормальными и обозначают как  $\sigma$ , а лежащие в ее плоскости — касательными и обозначают как  $\tau$ .

### 2.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Мысленно выделим в некоторой точке нагруженного тела произвольно ориентированный бесконечно малый объем в виде кубика. В общем случае на его гранях действуют и нормальные, и касательные напряжения. Иным образом ориентированный кубик в той же точке тела может иметь на своих гранях иные значения полных напряжений и их проекций — нормальных и касательных напряжений. Совокупность напряжений, действующих на всем многообразии площадок, которые можно провести через данную точку тела, называется **напряженным состоянием**. Напряженное состояние в общем случае меняется от точки к точке тела. Поэтому правильно говорить о напряженном состоянии в некоторой точке тела.

Оказывается, при любом напряженном состоянии можно найти такую ориентацию кубика, при которой полные напряжения будут перпендикулярны его площадкам, т. е.



на них будут действовать лишь нормальные напряжения. Доказательство этого утверждения дано в разделе 2.3. Площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют, называются **главными площадками**. Действующие на них нормальные напряжения называются **главными напряжениями**. Подчеркивать то, что главными напряжениями являются нормальные, не имеет смысла, поскольку в этом случае касательные равны нулю по условию. При отсутствии касательных напряжений площадки остаются главными и в случае равенства нулю на них нормальных напряжений.

**Исследовать напряженное состояние** — значит получить зависимости, позволяющие в данной точке тела определить напряжения на площадке, ориентированной произвольным образом.

Поскольку кубик бесконечно мал, можем считать, что изменения напряжений по поверхности площадок не происходит. В связи с этим для равновесия главные нормальные напряжения на противоположных параллельных площадках должны быть равны друг другу и противоположны по направлению.

Главные напряжения, действующие по трем взаимно перпендикулярным площадкам, обозначаются с подстрочными индексами:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Индексы присваиваются таким образом, чтобы с учетом знака (растягивающие — положительны, сжимающие — отрицательны) выполнялись неравенства

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (2.1)$$

**Вид напряженного состояния в точке** в зависимости от количества главных напряжений называется трехосным (или объемным), двухосным (плоским), одноосным (линейным). Двухосное напряженное состояние можно считать частным случаем трехосного, у которого на одной паре параллельных главных площадок напряжение равно нулю. Аналогично можно оценивать одноосное напряженное состояние. Примеры обозначения главных напряжений приведены на рис. 2.1: *a* — трехосное (объемное); *b* — двухосное (плоское); *v* — одноосное (линейное).



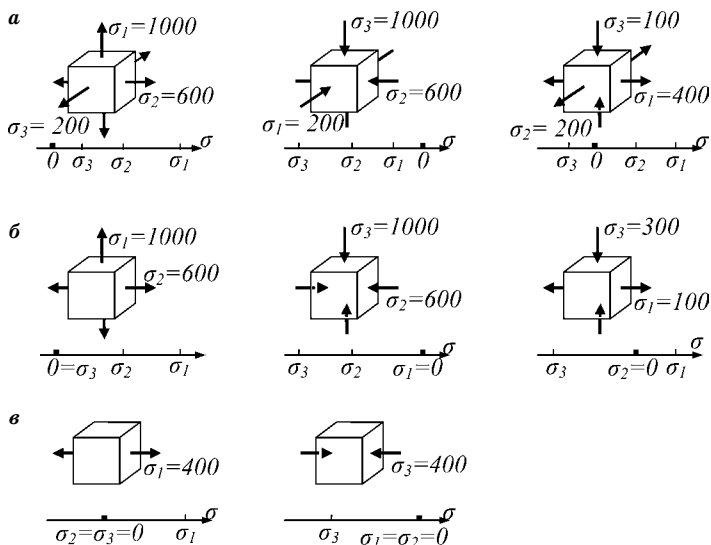


Рис. 2.1

Примеры напряженного состояния материала

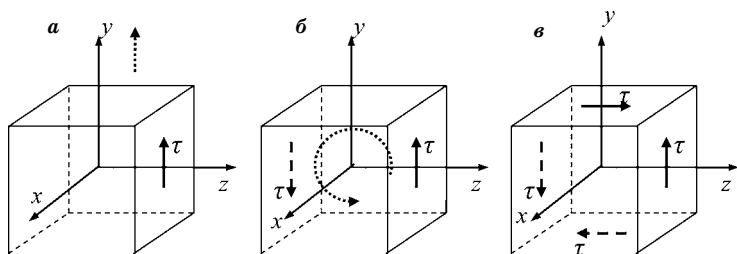


Рис. 2.2

Обоснование закона парности касательных напряжений

Отметим особенность касательных напряжений. Представим себе неподвижный кубик, по правой площадке которого действуют только касательные напряжения. Тогда он должен двигаться вверх (на рис. 2.2а пунктирной стрелкой показано направление вертикального движения). Значит, для равновесия кубика (проекция сил на вертикальную ось) по левой площадке (такой же площади, что и правая) должны действовать такие же, но противоположно направленные касательные напряжения (рис. 2.2б).

Теперь на кубик действует момент от касательных напряжений по двум площадкам. Тогда кубик должен вращаться против движения часовой стрелки (на рис. 2.2б пунктирной дуговой стрелкой показано направление вращательного движения). Для равновесия должен действовать такой же по величине, но противоположно направленный момент со стороны сил, действующих на двух других площадках (верхней и нижней). Значит, и по этим двум площадкам кубика действуют такие же по величине и направленные в противоположные стороны касательные напряжения (неподвижный кубик на рис. 2.2в). Получили систему, иллюстрирующую закон парности касательных напряжений: на каждой площадке действуют равные по величине касательные напряжения, при этом на взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения, перпендикулярные общему ребру, направлены таким образом, что стремятся поворачивать кубик в противоположные стороны. Далее мы получим аналитическое подтверждение этому выводу. Напряженное состояние, при котором элементарный объем можно выделить таким образом, что по его площадкам будут действовать лишь касательные напряжения, называют **чистым сдвигом**.

## 2.2. НАПРЯЖЕНИЯ НА НАКЛОННЫХ ПЛОЩАДКАХ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Представим себе выделенный в нагруженном теле бесконечно малый кубик, который находится в плоском напряженном состоянии (см. рис. 2.3а). Тогда в общем случае имеем  $\sigma_y \neq \sigma_z$  и одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по направлению  $\tau$ . Примем показанное направление напряжений положительным.

Мысленно разрежем кубик сечением, которое перпендикулярно плоскости « $y - z$ » и расположено под углом  $\alpha$  к вертикальной площадке. Отбросим его правую часть (рис. 2.3б). Угол  $\alpha$  считаем положительным, если он направлен от оси  $z$  к оси  $y$  по кратчайшему расстоянию (как показано на рисунке) против движения часовой стрелки.

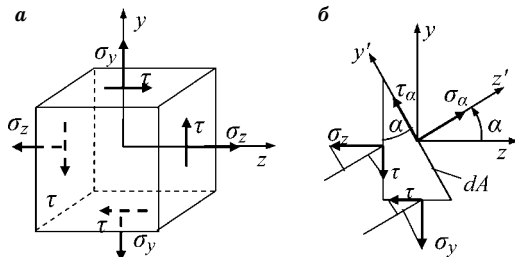


Рис. 2.3

Иллюстрация к исследованию плоского напряженного состояния

Для оставшегося элемента составим уравнения равновесия проекций сил на оси  $y'$  и  $z'$ :

$$\sum Z'_i = 0 \text{ и } \sum Y'_i = 0. \quad (2.2)$$

Первое из этих уравнений дает

$$\sigma_\alpha dA - \sigma_z \cos\alpha dA \cos\alpha - \tau \sin\alpha dA \cos\alpha - \sigma_y \sin\alpha dA \sin\alpha - \tau \cos\alpha dA \sin\alpha = 0,$$

откуда

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau \sin 2\alpha. \quad (2.3)$$

Иная форма записи (2.3) в виде

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha \quad (2.4)$$

получается подстановкой в (2.3) тригонометрических выражений

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Нормальное напряжение на перпендикулярной площадке (вместо  $\alpha$  берем  $\alpha + 90^\circ$ ) получаем из (2.4):

$$\sigma_{\alpha + 90^\circ} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \tau \sin 2\alpha. \quad (2.6)$$

Теперь, сложив (2.4) с (2.6), получим

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + 90^\circ} = \sigma_z + \sigma_y = \text{const}. \quad (2.7)$$

Как видим, сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках постоянна при любом значении угла наклона осей « $y$  —  $z$ », т. е. не зависит от величины  $\alpha$ .

Второе из уравнений (2.2) дает

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha} dA + \sigma_z \sin \alpha dA \cos \alpha - \tau \cos \alpha dA \cos \alpha - \\ - \sigma_y \cos \alpha dA \sin \alpha + \tau \sin \alpha dA \sin \alpha = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

откуда

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha. \quad (2.9)$$

**Следствие.**

Подставив известные тригонометрические выражения

$$\begin{aligned} \sin 2(\alpha + 90^{\circ}) &= -\sin 2\alpha, \\ \cos 2(\alpha + 90^{\circ}) &= -\cos 2\alpha \end{aligned} \quad (2.10)$$

в (2.9), получим

$$\tau_{\alpha} + 90^{\circ} = -\tau_{\alpha}. \quad (2.11)$$

Последовательно увеличивая угол на  $90^{\circ}$ , будем получать неизменное по модулю и противоположное по направлению  $\tau$ . Таким образом, аналитически подтвержден **закон парности касательных напряжений**. Он может формулироваться и таким образом: на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения, перпендикулярные общему ребру, равны по величине и направлены оба либо к ребру, либо от ребра.

### 2.3. ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ И ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Напряжения  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$  являются тригонометрическими периодическими непрерывными функциями. Поэтому при определенных величинах угла  $\alpha$  напряжения приобретают экстремальные, т. е. максимальные или минимальные, значения.

Найдем этот угол, обозначив его как  $\alpha_0$ . Для этого в (2.3) возьмем первую производную от  $\sigma_{\alpha}$  по углу  $\alpha$ :



$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2 \left( -\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha \right), \quad (2.12)$$

приравняем ее к нулю и после преобразований выразим как

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_z - \sigma_y}. \quad (2.13)$$

Формула (2.13) предполагает два угла:  $\alpha_0' = \alpha_0$  и  $\alpha_0'' = \alpha_0 + 90^\circ$ , т. е. углы взаимно перпендикулярных площадок.

Обратим внимание, в (2.12) стоящее в скобках выражение представляет собой формулу касательного напряжения по (2.9). Отсюда (2.12) можно записать в виде

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2\tau_\alpha. \quad (2.14)$$

Поэтому на площадке экстремального нормального напряжения, для которого левая часть (2.14) равна нулю, касательное напряжение также должно быть равно нулю:

$$\tau_{\alpha}|_{\alpha = \alpha_0} = \tau_{\alpha_0} = 0. \quad (2.15)$$

Значит, площадки, на которых нормальные напряжения приобретают экстремальные значения, являются главными, и сами экстремальные нормальные напряжения являются главными напряжениями.

Зная этот вывод, формулу (2.13) можно упростить, если непосредственно в (2.9) принять  $\tau_\alpha = 0$ . Заметим: с самого начала не ставилось ограничений на вид напряженного состояния (см. рис. 2.3). Это говорит о том, что, действительно, при любом напряженном состоянии можно таким образом сориентировать площадки кубика, что они станут главными ( $\tau_{\alpha_0} = 0$ ) и действующие на них нормальные напряжения окажутся главными, приобретя экстремальные значения.

Определим величины экстремальных (главных) напряжений. С этой целью преобразуем (2.4) с учетом  $\alpha = \alpha_0$ . В результате получим

$$\sigma_{\alpha_0} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \left( \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} + \tau \operatorname{tg} 2\alpha_0 \right) \cos 2\alpha_0. \quad (2.16)$$



Поскольку

$$\cos 2\alpha_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}, \quad (2.17)$$

то по (2.13) имеем

$$\cos 2\alpha_0 = \pm \frac{\sigma_z - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}}. \quad (2.18)$$

После подстановки (2.13) и (2.18) в (2.16) получаем

$$\sigma_{\max(\min)} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}. \quad (2.19)$$

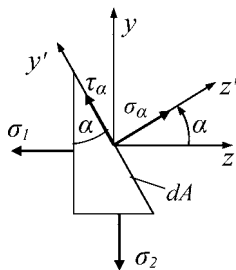
Наличие знака « $\pm$ » в (2.19) означает то, что на одной паре параллельных площадок кубика главные напряжения максимальны ( $\sigma_{\max} = \sigma_1$ ), а на другой — минимальны (если  $\sigma_{\min} > 0$ , то  $\sigma_{\min} = \sigma_2$ ; если  $\sigma_{\min} < 0$ , то  $\sigma_{\min} = \sigma_3$ ).

Если  $\sigma_y = 0$ , то, опуская за ненадобностью подстрочный индекс  $z$ , (2.19) упрощается до

$$\sigma_{\max(\min)} = \sigma_{1(3)} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (2.20)$$

## 2.4. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Совместим оси « $y - z$ » с направлениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , приняв ориентирование кубика по главным площадкам в качестве исходного. При этом обозначим  $\sigma_z = \sigma_1$  и  $\sigma_y = \sigma_2$ , а касательные напряжения на этих площадках должны быть приняты равными нулю (на главных гранях кубика  $\tau = 0$ ). Теперь угол наклона нормали к произвольной площадке будет откладываться от направления  $z$  (рис. 2.4).



**Рис. 2.4**  
Иллюстрация к определению экстремального касательного напряжения

Для наклонной грани кубика, ориентированного главными площадками, (2.4) и (2.9) будут иметь вид

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (2.21)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.22)$$

Экстремальные касательные напряжения получаем из (2.22) для  $\alpha = \pm 45^\circ$ , поскольку  $\sin[2(\pm 45^\circ)] = \pm 1$ :

$$\tau_\alpha = \tau_{\pm 45^\circ} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (2.23)$$

Таким образом, экстремальные касательные напряжения в точке равны полуразности главных напряжений и действуют на площадках, наклоненных к главным площадкам под углом  $45^\circ$ . При этом нормальные напряжения на той же площадке будут равны полусумме главных напряжений, поскольку  $\cos[2(\pm 45^\circ)] = 0$ :

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (2.24)$$

Отсюда следуют два частных случая.

**1-й частный случай.** Если  $\sigma_1 = \sigma$  и  $\sigma_3 = -\sigma$  (рис. 2.5а), то по (2.23) и (2.24) имеем  $\sigma_\alpha|_{\alpha = \pm 45^\circ} = 0$  и  $\tau_\alpha|_{\alpha = \pm 45^\circ} = \sigma$  — действуют лишь касательные напряжения (рис. 2.5б). В рассматриваемом случае  $\sigma_2$  должно писаться как  $\sigma_3$ , поскольку на второй паре площадок сжатие и третья пара не нагружена:  $\sigma_2 = 0$ . Значит, имеем чистый сдвиг.

**2-й частный случай.** Если  $\sigma_1 = \sigma$  и  $\sigma_2 = \sigma$ , то по (2.21) и (2.22) при любом  $\alpha$  имеем  $\tau_\alpha = 0$  и  $\sigma_\alpha = \sigma$ . Значит, любая площадка является главной с неизменными по величине главными напряжениями.

### Пример 2.1.

Д а н о: напряженное состояние в точке по рис. 2.2, где  $\sigma_z = -600$  МПа (сжатие),  $\sigma_y = 1100$  МПа,  $\tau = 400$  МПа.

Т р е б у е т с я: определить угол наклона главных площадок  $\alpha_0$  к исходным, а также величины главных напряжений и экстремальных касательных напряжений.

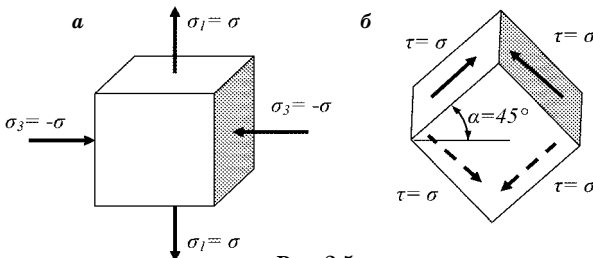


Рис. 2.5  
Напряженное состояние при чистом сдвиге

*Решение.* Тангенс двойного угла наклона главных площадок равен

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 400}{(-600) - 1100} = -0,471.$$

Следовательно,

$$\alpha_0 = -\frac{\arctg(-0,471)}{2} = -0,220 \text{ рад} = -0,220 \frac{180}{\pi} = -12,6^\circ$$

и главные площадки определяются поворотом осей по часовой стрелке на угол, равный  $12,6^\circ$ .

Экстремальные напряжения соответствуют

$$\begin{aligned} \sigma_{\max(\min)} &= \frac{(-600) + 1100}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{[(-600) + 1100]^2 + 4 \cdot 400^2} = \\ &= (250 \pm 472) \text{ МПа}, \end{aligned}$$

откуда главные напряжения равны  $\sigma_1 = 722 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_3 = -222 \text{ МПа}$ .

Экстремальные касательные напряжения, действующие по неглавным площадкам, наклоненным под некоторым углом  $\psi \neq \alpha_0$ , равны

$$\tau_\alpha^2 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{722 - (-222)}{2} = \pm 472 \text{ МПа}.$$

Для вычисления  $\tau_\alpha^3$  в (2.23) вместо  $\sigma_2$  указано напряжение  $\sigma_3$ , поскольку оно является наименьшим (сжатие) и  $\sigma_2 = 0$ . Знак « $\pm$ » указывает на различие направлений  $\tau_\alpha^3$  на перпендикулярных площадках.

## 2.5.

### КРУГОВАЯ ДИАГРАММА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ (КРУГ МОРА)

Формулам (2.21) и (2.22) может быть дана геометрическая интерпретация, предложенная Мором.

Обозначим в (2.21) и (2.22)

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = a; \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = R. \quad (2.25)$$

Тогда (2.21) и (2.22) примут вид выражений

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= a + R \cos 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= -R \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (2.26)$$



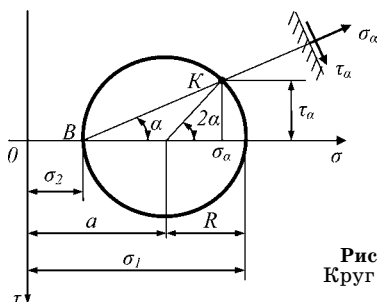


Рис. 2.6  
Круг Мора

которые в координатах  $\sigma$ - $\tau$  (ось  $\sigma$  направлена вправо, ось  $\tau$  — вниз) являются уравнениями окружности радиуса  $R$  в параметрической форме (рис. 2.6). Эта окружность называется круговой диаграммой напряженного состояния в данной точке или **кругом Мора**.

Круг Мора дает представление о величине и знаке напряжений на площадке, наклоненной под углом  $\alpha$  к оси  $\sigma$ . Для этого из точки  $B$  проводят линию под углом  $\alpha$ . Ее пересечение с окружностью дает точку  $K$ . Наклон площадки соответствует линии, перпендикулярной  $BK$ . А действующие по этой площадке напряжения соответствуют координатам точки  $K$ , т. е.  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ . В правом верхнем углу круговой диаграммы напряженного состояния (рис. 2.6) показано направление площадки в точке  $K$  и действующие на ней напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ . Максимальное касательное напряжение соответствует углу  $2\alpha = 90^\circ$ .

Уравнение окружности, описывающей круг Мора, можно получить и иным способом.

С этой целью в (2.21) перенесем  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  в его левую часть и полученное выражение возведем в квадрат. Также возведем в квадрат выражение (2.22). Сложим их правые и левые части. С учетом того, что  $\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1$ , в результате получим

$$\left( \sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2. \quad (2.27)$$

Это и есть уравнение окружности в координатах  $\sigma$ - $\tau$ , с центром на расстоянии  $a$  от начала координат и радиусом  $R$  по (2.25).

## 2.6. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА. ОБЛАСТЬ ЧИСЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА

Установим общие зависимости между нормальными напряжениями и линейными деформациями по направлениям действия этих напряжений.

Выделим в объекте, нагруженном произвольной нагрузкой, бесконечно малый элемент, по граням которого действуют главные напряжения (рис. 2.7).

Далее введем понятие продольной и поперечной деформаций. Деформацию по направлению той нагрузки, которая ее вызывает, назовем **продольной**. Ее обозначают как  $\varepsilon$ . Деформацию, перпендикулярную вызвавшей ее нагрузке, назовем **поперечной**. Ее обозначают как  $\varepsilon'$ . Они связаны друг с другом соотношением

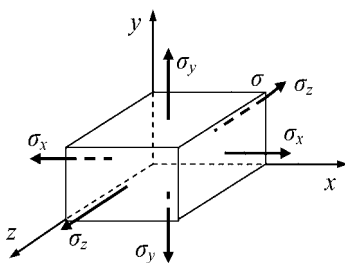


Рис. 2.7

Выделенный в нагруженном теле элемент при трехосном напряженном состоянии

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon. \tag{2.28}$$

Применим принцип суперпозиции, дающий возможность изолированно рассматривать действие каждого напряжения и путем суммирования их результатов находить конечный.

В направлении оси  $x$  действующее  $\sigma_x$  создает продольную деформацию  $\frac{\sigma_x}{E}$ , а два других напряжения ( $\sigma_y, \sigma_z$ ) — поперечные  $\left(-\mu\frac{\sigma_y}{E}, -\mu\frac{\sigma_z}{E}\right)$ . Сложив три деформации от трех напряжений, получим результирующую деформацию в направлении оси  $x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E}. \tag{2.29}$$

Точно так же получаем результирующие деформации в направлении двух других осей. В результате имеем три формулы:



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)],\end{aligned}\tag{2.30}$$

которые являются **аналитическим выражением обобщенного закона Гука** для изотропного тела. Значения напряжений подставляют со знаком: растягивающие — с плюсом, сжимающие — с минусом.

Определим величину объемной деформации кубика, имеющего до нагружения ребра единичной длины и объем, равный  $V = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ . После нагружения его объем изменится до  $V + \Delta V = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)$ . Тогда его объемная деформация будет равна

$$\begin{aligned}\varepsilon_V &= \frac{\Delta V}{V} = \frac{(V + \Delta V) - V}{V} = \\ &= \frac{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.\end{aligned}\tag{2.31}$$

В (2.31) произведения  $\varepsilon_x \varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_x \varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_y \varepsilon_z$  и  $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$  много меньше  $\varepsilon_i$  и ими пренебрегли.

Если в (2.31) подставить (2.30), то получим

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).\tag{2.32}$$

Проанализируем (2.32).

Если все напряжения положительны (всестороннее растяжение), то объемная деформация должна быть положительной, если отрицательные (всестороннее сжатие), то объемная деформация должна быть отрицательной. Значит, знак объемной деформации определяет выражение в скобках, а коэффициент перед скобками должен быть больше нуля (в предельном случае — равен нулю):

$$\frac{1 - 2\mu}{E} \geq 0.\tag{2.33}$$

Поскольку модуль продольной упругости  $E$  является физической величиной, которая всегда больше нуля, то для



выполнения этого неравенства числитель должен быть больше нуля. Значит, должно выполняться условие

$$0 \leq \mu \leq 0,5. \quad (2.34)$$

Именно в этих пределах лежат экспериментальные значения коэффициента Пуассона, представленные в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Значения коэффициента Пуассона для различных материалов

$\mu$	0	0,05	0,25...0,30	0,31...0,4	0,5
Материал	Пробка	Бериллий	Сталь	Медь, латунь, алюминий	Латексная резина

Если  $\mu = 0,5$ , то по (2.32)  $\varepsilon_V = 0$ , т. е. изменения объема не происходит.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ

##### «НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИАЛА В ТОЧКЕ»

1. Какие площадки называются главными?
2. Какие напряжения называются главными?
3. Что называют напряженным состоянием в точке тела?
4. Что означают подстрочные индексы 1, 2 и 3 у главных нормальных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ ?
5. Если на трех главных площадках действуют напряжения в 10 МПа, 0 МПа и 100 МПа, то как следует обозначить эти главные напряжения?
6. Что означают названия: одноосное, двухосное, трехосное напряженное состояние?
7. В чем суть закона парности касательных напряжений?
8. Из какой формулы аналитически подтверждается закон парности касательных напряжений?
9. На основании какого рассуждения следует утверждение наличия экстремальности величин главных напряжений?
10. Какой вид нагружения иллюстрирует кубик с главными нормальными напряжениями, равными  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = 0$  и  $\sigma_3 = -\sigma$ ?
11. Что можно сказать о напряжениях на произвольном образом наклоненных площадках, если имеется кубик с главными нормальными напряжениями, равными  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = 0$  и  $\sigma_3 = \sigma$ ?
12. Что иллюстрирует круговая диаграмма напряженного состояния в точке, т. е. круг Мора?
13. В каком диапазоне лежат значения коэффициента Пуассона для любого конструкционного материала?



## РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

### 3.1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

Определим, какие внутренние силовые факторы в брус вызываются направленными по оси  $z$  бруса нагрузками — внешними продольными силами.

Пусть имеется прямой брус, нагруженный продольной силой  $F$  (рис. 3.1*a*). В заделке действует неизвестная реакция  $Z_B$ . Ее направление выбирается произвольно.

Для определения внутренних силовых факторов применяют метод сечений, состоящий из четырех действий (см. раздел 1.6).

1. Мысленно рассекаем брус плоскостью, перпендикулярной оси бруса.

2. Отбросим левую часть бруса, поскольку на нее действует неизвестная реакция  $Z_B$ .

3. Приложим к оставшейся правой части внутренние силовые факторы, которые должны действовать в сечении, чтобы уравновесить внешние продольные силы. Для уравновешивания нагрузки  $F$  необходимо приложить в сечении внутренний силовой фактор — действующую вдоль оси

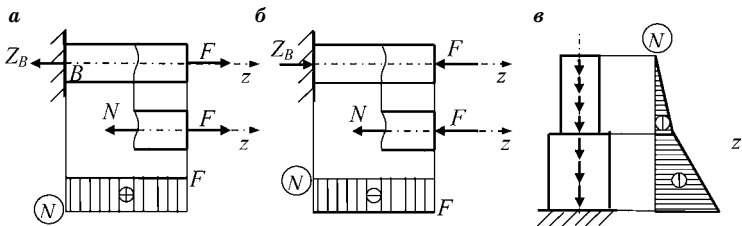


Рис. 3.1

Эпюры продольной силы  $N$  при растяжении и сжатии



$z$  силу  $N$ . Произвольно будем принимать ее всегда направленной от сечения. Другие внутренние силовые факторы в сечении не действуют, поскольку им нечего уравновешивать. Так как обе силы ( $N$  и  $F$ ) растягивают рассматриваемую часть бруса, значит, имеет место растяжение. **Растяжением—сжатием** называют вид простого сопротивления, при котором в поперечных сечениях бруса возникают только продольные силы  $N$ .

4. Далее записываем уравнение статики, которое в этом случае будет иметь вид

$$\sum Z_i = 0 \rightarrow -N + F = 0 \rightarrow N = F.$$

В уравнении сила  $N$  со знаком минус, так как она оказалась направленной противоположно направлению  $z$ . Выражая ее в явном виде, получаем продольную силу  $N$  положительной, что говорит о правильном первоначальном выборе ее направления.

С учетом того, что на рис. 3.1а она направлена от сечения, имеет место растяжение — ее эпюра положительна и постоянна по всему участку, поскольку не зависит от  $z$ .

Для бруса по рис. 3.1б те же действия приведут к результату

$$N = -F.$$

Эта сила  $N$  оказалась противоположна заранее выбранному направлению. Значит, она направлена к сечению, т. е. сжимает рассматриваемую часть. Поэтому эпюра  $N$  будет отрицательной, означающей сжатие бруса.

Чтобы специально не вычерчивать рассматриваемую отделенную часть бруса с пока неизвестным, но изначально выбранным положительным направлением силы  $N$ , вводят правило знаков при растяжении—сжатии: продольная сила  $N$  в сечении считается положительной, если, глядя со стороны сечения на отсеченную часть, видим нагрузку направленной от сечения (растяжение участка); в противном случае сила  $N$  отрицательна (сжатие участка).

Закон изменения искомого параметра может меняться по длине тела. Так, если на брус действует несколько нагрузок в разных сечениях, то вначале брус мысленно делят на участки. Под участком будем подразумевать



протяженность бруса вдоль оси  $z$ , на которой нет изменений ни в выражении функции нагрузки, ни в характере изменения площади поперечного сечения или направления оси  $z$ .

Внутренний силовой фактор (силу  $N$ ) определяют на каждом участке, применяя метод сечений, и строят его эпюру по всей длине бруса. Сила  $N$  равна алгебраической сумме сил, действующих на оставленную для рассмотрения часть бруса.

Для дальнейшего расчета на прочность или жесткость необходимо выявить наиболее опасное место, где параметры наиболее близки к предельным. С этой целью определяемые внутренние силовые факторы, напряжения, перемещения представляют в графической форме, которую в сопротивлении материалов называют эпюрой найденного параметра. Осью абсцисс эпюры является ось  $z$ , а осью ординат — определяемый параметр. Ось абсцисс проводят параллельно оси бруса под расчетной схемой, при вертикальном расположении бруса на расчетной схеме — справа от нее. Ось ординат для параметра направляют в сторону положительного направления оси  $y$ . Справа или слева от оси абсцисс проставляют параметр эпюры и обводят его окружностью. На рис. 3.1*а* эпюра положительна, на рис. 3.1*б* — отрицательна. При построении эпюр соблюдают произвольно выбираемые масштабы длины участков по оси  $z$  и вычисляемого параметра.

Особенности эпюр продольной силы  $N$  при растяжении–сжатии определяются следующими правилами:

- при действии лишь сосредоточенных внешних сил эпюра продольных сил окажется составленной из прямых, параллельных оси абсцисс (оси  $z$ );
- в координате приложения сосредоточенной силы на эпюре продольных сил появится скачок величиной, равной этой сосредоточенной силе;
- на участке действия постоянной погонной продольной нагрузки на эпюре продольных сил появится прямая наклонная линия;
- при изменении величины погонной нагрузки одного знака на эпюре продольных сил появится излом без

изменения ее общей тенденции к возрастанию или убыванию (рис. 3.1в);

- при изменении знака погонной продольной нагрузки в этом сечении на эпюре продольных сил убывание  $N$  меняется на ее увеличение, либо наоборот — увеличение на убывание.

Все отмеченные особенности проиллюстрированы в приведенных в конце темы примерах.

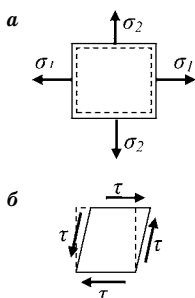
### 3.2. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ

Вначале уточним вид деформации элемента, возникающей в зависимости от вида напряжений на его площадках.

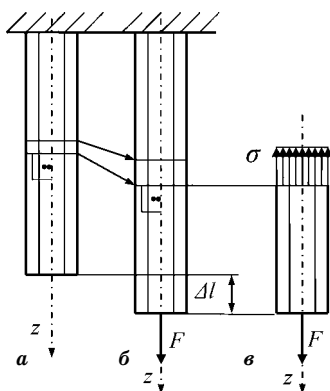
На рис. 3.2 штрихом показана форма тела до нагружения, а сплошным контуром — после нагружения. Из этого примера следует, что нормальные напряжения соответствуют изменению объема (рис. 3.2а), касательные — изменению формы (рис. 3.2б).

Рассмотрим простой эксперимент.

Пусть имеется брусок, по всем поверхностным граням которого проведены до его нагружения параллельные линии вдоль оси  $z$  и поперек нее (рис. 3.3а). При этом



**Рис. 3.2**  
Различия в деформации бесконечно малого элемента нормальными и касательными напряжениями



**Рис. 3.3**  
Иллюстрация эксперимента при нагружении прямолинейного бруса продольной силой

поперечные прямые на всех поверхностях (гранях) бруса образуют замкнутые фигуры, лежащие каждая в своей поперечной плоскости. Эти плоскости перпендикулярны оси  $z$ .

Наблюдения показывают, что после нагружения продольной силой  $F$  в пределах упругих деформаций брус удлинится (см. рис. 3.3б). При этом все прямые линии сохранятся: продольные прямые останутся продольными прямыми, поперечные линии также останутся прямыми, перпендикулярными оси  $z$ , но переместившимися вдоль оси  $z$  на некоторую величину, а весь брус — удлинившимся на  $\Delta l$ . Из этого эксперимента следует весьма важное предположение: поскольку поверхностные поперечные линии, образующие замкнутую плоскую фигуру, остались поперечными прямыми, лежащими в поперечной плоскости, то очевидно, что и все внутренние точки сечения переместились на то же расстояние. Это предположение приводит к выводу о перемещении поперечных сечений как жесткого целого — гипотезе Бернулли: поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные его продольной оси  $z$  до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными оси после деформации, сдвигаясь вдоль оси как жесткое целое. Гипотезу Бернулли называют также гипотезой плоских сечений.

Из этих практических наблюдений за поперечными и продольными линиями на поверхности бруса следует:

- поскольку прямоугольники, образованные пересечением взаимно перпендикулярных линий, остались прямоугольниками, то в поперечных сечениях не действуют касательные напряжения ( $\tau = 0$ );
- поскольку поперечные линии сместились вдоль оси  $z$ , т. е. расстояния между ними в данном случае увеличились (растяжение), то в поперечных сечениях действуют нормальные напряжения ( $\sigma_z \neq 0$ );
- поскольку расстояние между продольными линиями не изменилось, то в продольных сечениях нормальные напряжения отсутствуют ( $\sigma_y = 0$ );
- поскольку поперечные линии остались параллельными друг другу, т. е. изменившиеся между ними расстояния остались одинаковыми, то по закону Гука

(1.15) и нормальные напряжения имеют одинаковую величину по всему периметру поперечного сечения.

С учетом гипотезы Бернулли можно распространить сделанные выводы на все поперечное сечение бруса (рис. 3.3в). Тогда напряжения постоянны по всему поперечному сечению и интегральная форма  $N$  по (1.7) дает весьма простую формулу определения величины нормальных напряжений

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (3.1)$$

Отсюда видно, как лишь на основании простого эксперимента, без аналитических выкладок была получена формула для дальнейших расчетов. Весь объем знаний изучаемой дисциплины основан на наблюдениях из нашего жизненного опыта. В этом же мы будем убеждаться, рассматривая в дальнейшем другие виды сопротивления. Их формулы, получаемые на основе эксперимента, будут так же просты, но расшифровка входящих в них констант потребует некоторых аналитических выкладок.

### 3.3. НАПРЯЖЕНИЯ НА НАКЛОННЫХ ПЛОЩАДКАХ

Пусть имеется брус поперечного сечения  $A$ , нагруженный продольной силой  $F$  (рис. 3.4а). Как было показано выше, в его поперечных сечениях действуют лишь нормальные напряжения  $\sigma_z$ .

В бесконечно малом элементе объемом  $dV$  с величиной площади  $dA$  вертикальной грани мысленно сделаем сечение под некоторым углом  $\alpha$  к поперечному сечению (рис. 3.4б).

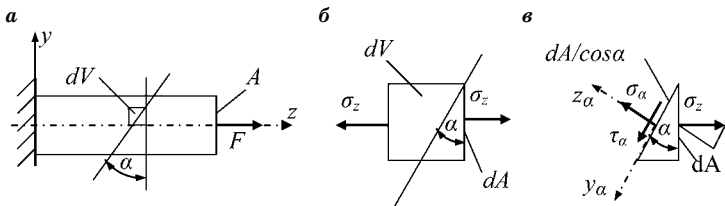


Рис. 3.4

К исследованию напряженного состояния при растяжении

По вертикальным граням кубика  $dV$ , как уже выяснили, будут действовать напряжения

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}, \quad (3.2)$$

поскольку  $N = F$ .

По наклонной грани будут действовать  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  (рис. 3.4в).  
Запишем уравнение равновесия всех сил на ось  $z_\alpha$ :

$$\sum Z_i = 0 \rightarrow \sigma_\alpha dA / \cos\alpha - \sigma_z \cos\alpha dA = 0,$$

откуда с учетом (3.1)

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha = \frac{F}{A} \cos^2 \alpha. \quad (3.3)$$

Запишем уравнение равновесия всех сил на ось  $y_\alpha$ :

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow \tau_\alpha dA / \cos\alpha - \sigma_z \sin\alpha dA = 0, \quad (3.4)$$

откуда с учетом (3.1)

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_z \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} \sin 2\alpha. \quad (3.5)$$

Проанализируем (3.3) и (3.5):

$$\text{при } \alpha = 0 \rightarrow \sigma_{\alpha|0} = \frac{F}{A} = \sigma_{\max} \text{ и } \tau_{\alpha|0} = 0;$$

$$\text{при } \alpha = 45^\circ \rightarrow \sigma_{\alpha|45^\circ} = \tau_{\alpha|45^\circ} = \tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} = \frac{\sigma_{\max}}{2}. \quad (3.6)$$

Формулы (3.6) свидетельствуют о том, что при растяжении или сжатии:

- наибольшие напряжения возникают в поперечных сечениях бруса, и они являются максимальными главными напряжениями  $\sigma_{\max} = \sigma_1$ , так как на этих сечениях касательные равны нулю (то же следует из (2.4));
- наибольшие касательные напряжения возникают в сечениях, наклоненных к оси  $z$  под углом  $45^\circ$ , и они равны половине нормальных напряжений, действующих в поперечных сечениях, т. е. половине  $\tau_{\max} = \sigma_{\max}/2$  (то же следует из (2.22)).

Итак, при растяжении или сжатии в поперечных сечениях бруса  $\tau = 0$  и пара площадок условно выделенного бесконечно малого кубика, перпендикулярных оси  $z$ , яв-

ляются главными, действующие по ним  $\sigma$  — максимальными по абсолютной величине главными напряжениями. По двум другим парам главных площадок кубика в рассмотренном примере напряжения равны нулю.

### 3.4. УДЛИНЕНИЕ–УКОРОЧЕНИЕ. ДЕФОРМАЦИИ. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Эксперименты показывают, что при растяжении–сжатии в пределах действия закона Гука наблюдаются лишь линейные изменения в брус (рис. 3.5 иллюстрирует растяжение): при растяжении брус удлиняется ( $\Delta l$ ) и сужается ( $-\Delta b$ ,  $-\Delta c$ ), а при сжатии укорачивается ( $-\Delta l$ ) и утолщается ( $\Delta b$ ,  $\Delta c$ ). Возникающие деформации определяются по (1.3) как

$$\varepsilon_z = \Delta l/l, \varepsilon_x = -\Delta c/c; \varepsilon_y = -\Delta b/b. \quad (3.7)$$

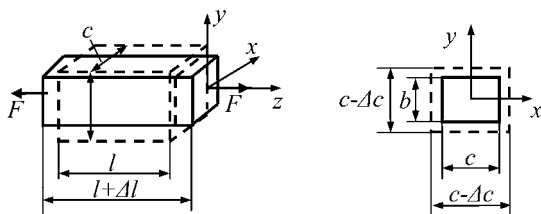


Рис. 3.5  
Деформации при растяжении

Здесь отрицательный знак указывает на уменьшение поперечных размеров ( $\Delta c$ ,  $\Delta b$ ) при увеличении продольных ( $\Delta l$ ).

Для бруса под нагрузкой (рис. 3.5) деформация  $\varepsilon_z$  является продольной и обозначается как  $\varepsilon$ , деформации  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  — поперечными и обозначаются как  $\varepsilon'$ . При этом между продольной и поперечными деформациями существует связь

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (3.8)$$

где безразмерный коэффициент  $\mu$  называется коэффициентом Пуассона, зависит от материала и его возможные значения находятся в интервале  $0 \dots 0,5$  (см. табл. 2.1).

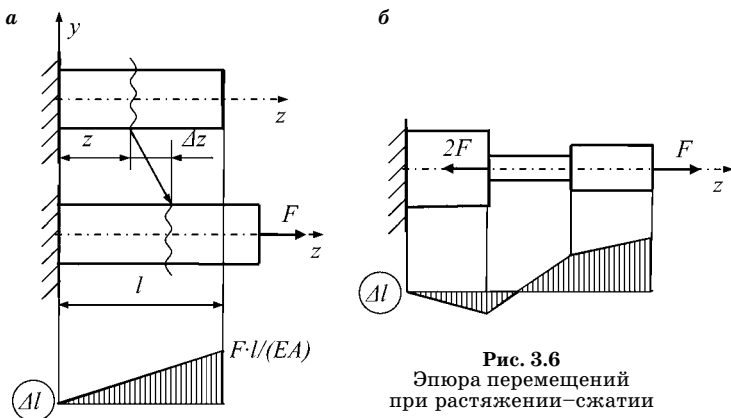


Рис. 3.6  
Эпюра перемещений  
при растяжении-сжатии

Отрицательный знак указывает на то, что продольная деформация растяжения приводит к поперечной деформации сжатия.

Пусть дан брус постоянного поперечного сечения (рис. 3.6а). Найдём формулу изменения участка длиной  $z$  при растяжении или сжатии бруса.

С учетом выполнения закона Гука при растяжении-сжатии (см. раздел 1.7) имеем по трем зависимостям (1.15), (3.2) и (3.7):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \sigma = \frac{N}{A}, \varepsilon = \frac{\Delta z}{z}. \quad (3.9)$$

Решая систему уравнений (3.9) совместно (подставляем первое и третье равенства во второе и выражаем в явном виде  $\Delta z$ ), получаем формулу изменения участка длиной  $z$  при растяжении или сжатии

$$\Delta z = \frac{Nz}{EA}, \quad (3.10)$$

где  $z$  — длина участка деформации; произведение  $EA$  называют жесткостью бруса при растяжении и сжатии.

При постоянных  $N$  и жесткости  $EA$  приращение длины бруса постоянного поперечного сечения по (3.10) представляет собой функцию наклонной прямой линии, показанную на эпюре  $\Delta$  (рис. 3.6). Удлинение всего участка  $\Delta l$  соответствует (3.10), где вместо  $z$  взята вся длина  $l$  участка  $\Delta l = Fl/(EA)$ . Вследствие малости фактических дефор-



маций по сравнению с длиной бруса эпюру  $\Delta$  строят в пределах длины исходной расчетной схемы.

Понятие перемещения связано с выбранным положением начала координат. Его обычно размещают в заделке. На рис. 3.6 показан брус с одним участком, начало координат размещено в заделке, и перемещение  $\Delta$  свободного конца бруса будет равно удлинению этого участка  $\Delta = \Delta l = Fl/(EA)$ .

При наличии нескольких участков перемещение конца  $i$ -го участка равно перемещению конца предыдущего  $i - 1$  участка плюс удлинение (укорочение)  $i$ -го участка:

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + \Delta l_i, \quad (3.11)$$

при этом удлинение (укорочение)  $i$ -го участка определяется по формуле

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}. \quad (3.12)$$

Заметим, что в брусѣ постоянного на каждом участке поперечного сечения с сосредоточенными продольными силами и несколькими участками эпюра перемещений  $\Delta$  представляет собой в общем случае ломаную непрерывную линию, составленную из прямых наклонных отрезков линий, стыкующихся по границам участков (рис. 3.6б). Эпюра перемещений  $\Delta$  не может иметь скачков (разрывов), поскольку наличие скачков будет указывать на разрыв бруса в этом месте.

### 3.5. ДИАГРАММЫ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ ПЛАСТИЧНЫХ СТАЛЕЙ

Конструкционные материалы обладают набором механических свойств, которые определяют способность сопротивляться действию нагрузок. Основными свойствами металлических материалов являются: прочность, пластичность, ударная вязкость, ползучесть и др. Количественно они выражаются своими механическими характеристиками, которые необходимо знать для решения задач СМ.

Механическими характеристиками называют численные значения прочностных и деформационных свойств



конструкционных материалов. В зависимости от характера действия нагрузки во времени испытания делятся на статические, динамические и повторно-переменные. Их численные значения получают экспериментально механическими испытаниями образцов на специальном лабораторном оборудовании. В зависимости от способа приложения внешних сил (нагрузок) различают испытания на растяжение, сжатие, изгиб, кручение, ударный изгиб и т. п.

Испытания стандартизированы и их проводят на образцах в специальных разрывных машинах. Машины позволяют автоматически записывать графическую взаимосвязь между прилагаемой нагрузкой и деформациями, возникающими в специально изготавливаемых образцах. Графическую запись в координатах «нагрузка–деформация» образца при его испытаниях до разрушения называют диаграммой механических испытаний.

В испытаниях на растяжение используют образцы цилиндрической формы (рис. 3.7а) или плоские (рис. 3.7б) с большим соотношением длины рабочей части образца ( $l_0$ ) к поперечному размеру, равным 5–15.

На рисунке показаны образцы для испытаний: на растяжение — рис. 3.7а, б; на сжатие — рис. 3.7в. Размеры образцов делают стандартными для сравнимости результатов испытаний. Так, диаметр цилиндрического образца ( $d_0$ ) на растяжение обычно делают равным 10 мм либо 5 мм.

Для снижения влияния условий захвата, искажающих равномерное распределение напряжений по поперечному

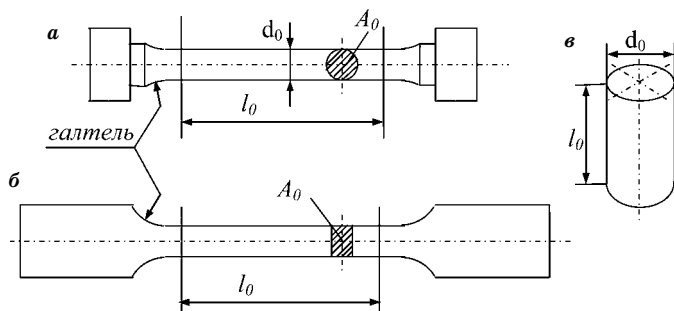
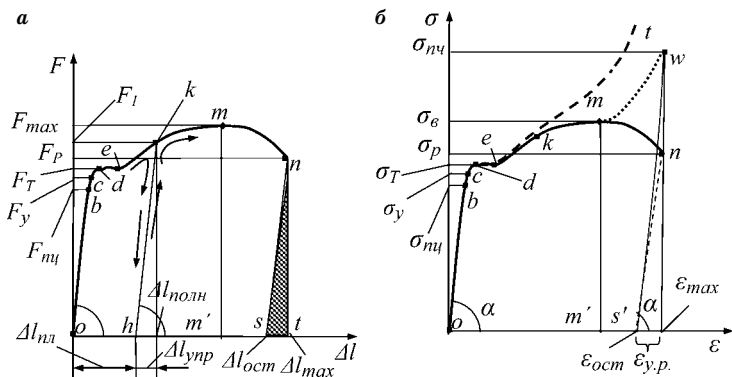


Рис. 3.7

Образцы для испытаний на растяжение (а, б), сжатие (в)



**Рис. 3.8**  
 Диаграммы растяжения пластичной стали в координатах  $\Delta l-F$  (а) и в координатах  $\epsilon-\sigma$  (б)

сечению, образец у краев часто делают с постепенным утолщением к зонам захвата в виде конического перехода к большему размеру либо выполняют место стыка с галтельным переходом. Галтелью называют скругление внешних и внутренних углов деталей.

Испытывая образец из низкоуглеродистой (пластичной) стали (например, стали Ст3) на растяжение и доводя его до разрушения, получают характерную запись диаграммы растяжения в координатах  $\Delta l-F$  в виде кривой *ocdekmpn* (рис. 3.8а). Диаграмма имеет несколько характерных зон и точек, отражающих прочностные, упругие и пластичные свойства материала образца.

Площадь замкнутой фигуры между диаграммой и осью абсцисс *obcdemntso* определяет общую работу по деформированию образца до момента разрушения (рис. 3.8а).

Затемненная площадь на рис. 3.8а количественно соответствует мгновенно высвобождающейся при разрыве накопленной потенциальной энергии упругой деформации. Разрушение образца с мгновенно высвобождающейся потенциальной энергией от разгружающихся образца и элементов установки производят характерный в таких испытаниях довольно сильный звук удара. Сила звука говорит о возникновении в момент разрушения значительных динамических нагрузок.



Диаграмма в координатах  $\Delta l - F$  характеризует конструкцию и материал образца, поскольку величина  $\Delta l$  зависит от длины рабочей части  $l_0$  образца, а функция  $F = f(\Delta l)$  — от материала ( $E$ ) и площади поперечного сечения ( $A$ ) образца. Чем длиннее образец, тем больше он удлиняется при том же усилии  $F$ . Чем больше поперечное сечение образца, тем большие значения усилия  $F$  покажет диаграмма в отмеченных характерных точках. Значит, эта диаграмма характеризует конструкцию, а не только материал. Чтобы получить характеристики собственно материала, диаграмму с координатами  $\Delta l - F$  превращают по (3.9) в диаграмму с координатами  $\varepsilon - \sigma$  (рис. 3.8б). С этой целью усилие  $F$  делят на первоначальную величину площади  $A_0$  поперечного сечения образца и получают напряжение  $\sigma$ , а удлинение  $\Delta l$  делят на первоначальную длину рабочей части образца  $l_0$  и получают продольную деформацию образца  $\varepsilon$ :

$$\sigma = \frac{F}{A_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (3.13)$$

Диаграмма в координатах  $\varepsilon - \sigma$  характеризует уже материал, а не конструкцию, поскольку не зависит от  $A_0$  и  $l_0$ .

Изначально возникающие деформации малы и практически полностью исчезают после снятия нагрузки. Такие деформации называют упругими. Поэтому область  $oc$  называется зоной упругости. В ней в интервале значений усилия от 0 до  $F_{\text{уп}}$  и напряжений от 0 до  $\sigma_{\text{уп}}$  (область  $ob$ ) существует пропорциональная связь между нагрузкой, а также напряжением и вызванными ими изменениями размеров и деформациями, т. е. выполняется закон Гука. На диаграмме в координатах  $\varepsilon - \sigma$  тангенс угла наклона прямой в зоне действия закона Гука равен продольному модулю упругости  $E$ . Его величина зависит от вида материала и до некоторой степени — от вида обработки.

Растягивающие усилия действуют вдоль прямолинейной оси бруса и создают одноосное напряженное состояние с одинаковыми нормальными напряжениями (3.1) по всему сечению. Деление силы  $F_{\text{уп}}$  на начальную площадь поперечного сечения образца  $A_0$  дает величину нор-

мального напряжения, называемого пределом пропорциональности:

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0}. \quad (3.14)$$

**Предел пропорциональности**  $\sigma_{\text{пц}}$  — это наибольшее напряжение, до которого присутствует пропорциональная связь между нагрузкой и вызываемой ею деформацией. До появления напряжения такой величины выполняется закон Гука.

Способность материала восстанавливать свои размеры после снятия внешней нагрузки называют **упругостью**. Зона упругости, т. е. почти полное отсутствие остаточных деформаций после снятия нагрузки, сохраняется до точки  $c$ , соответствующей усилию  $F_y$ . Однако пропорциональность между усилием и удлинением на отрезке  $bc$  уже не соблюдается. Сила  $F_y$  незначительно превышает  $F_{\text{пц}}$ , и по ней определяется напряжение, названное пределом упругости:

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}. \quad (3.15)$$

**Пределом упругости**  $\sigma_y$  называется максимальная величина напряжений, до которой в материале не возникает заметных пластических (остаточных, т. е. после снятия нагрузки) деформаций. Она незначительно превышает  $\sigma_{\text{пц}}$ .

Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к возникновению пластических деформаций. Способность материала иметь остаточные деформации называется **пластичностью**. На диаграмме появляется горизонтальный участок  $de$ , соответствующий усилию  $F_T$ . Он называется площадкой текучести. Этой площадке соответствует напряжение, называемое пределом текучести:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}. \quad (3.16)$$

**Пределом текучести**  $\sigma_T$  называют напряжение, при котором деформации растут в материале без видимого увеличения нагрузки. Это весьма важная характеристика материалов для расчетов на прочность. Если достигнутую нагрузку снять, то образец уже не вернется к исходным



размерам. В нем сохранится остаточная пластическая деформация.

При некоторой силе  $F_1$  общее удлинение ( $\Delta l_{\text{полн}}$ ) теперь состоит из упругой ( $\Delta l_{\text{упр}}$ ) и пластической ( $\Delta l_{\text{пл}}$ ) составляющих:

$$\Delta l_{\text{полн}} = \Delta l_{\text{упр}} + \Delta l_{\text{пл}}. \quad (3.17)$$

Это приводит к появлению так называемой зоны (деформационного) упрочнения (кривая  $em$ ), в которой горизонтальный участок  $de$  сменяется подъемом по кривой  $em$ . Считается, что в этой зоне с ростом внешней нагрузки пластическая составляющая деформации растет равномерно по всей длине. Участок подъема на диаграмме вслед за площадкой текучести, на котором пластические деформации распространяются равномерно по всему объему образца, называют зоной общей текучести.

Рост нагрузки происходит вплоть до  $F_{\text{max}}$ , дающей на диаграмме точку  $m$ . По ней вычисляется характерное напряжение, называемое **временным сопротивлением**:

$$\sigma_{\text{в}} = \frac{F_{\text{max}}}{A_0}. \quad (3.18)$$

Напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке в растягиваемом образце из пластичного материала на диаграмме растяжения, называется временным сопротивлением. Считается, что в диапазоне изменения напряжений  $0 \dots \sigma_{\text{в}}$  участок условной диаграммы растяжения образца из пластичного материала отражает одинаковые напряжения и деформации по всей рабочей длине образца.

Если в зоне упрочнения, например при силе  $F_1$  (точка  $k$  диаграммы на рис. 3.8а), начать снижать растягивающее усилие, то удлинение образца будет снижаться пропорционально до точки  $h$  (прямая  $kh$  диаграммы). Последующее увеличение силы вызовет пропорциональный рост удлинения от точки  $h$  вновь до точки  $k$ . Таким образом, в материале можно увеличивать диапазон выполнения закона Гука. Этот эффект довольно часто применяют в машиностроении. Явление увеличения диапазона упругих свойств материала (зоны упругости) в результате предва-

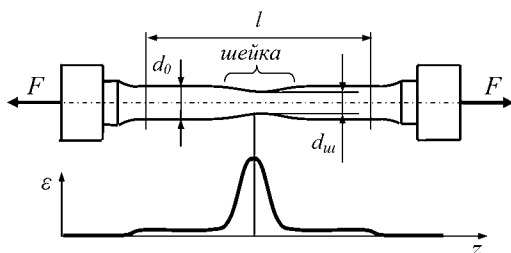


Рис. 3.9

Линейная деформация образца по его длине при  $F > F_{\max}$

рительного пластического деформирования называется **наклепом (нагартовкой)**.

В области параметров точки  $m$  в некотором сечении образца из пластичной стали появляется местное сужение, называемое шейкой (рис. 3.9). В шейке происходит существенный рост деформаций, значительно превышающих деформации в остальных частях образца.

С этого момента величина усилия, растягивающего образец, начинает падать. Шкала  $\varepsilon$  приобретает меняющийся масштаб, который отражает усредненное значение деформаций по рабочей длине образца. Точка  $n$  соответствует разрыву образца в самом тонком месте шейки. Напряжение, соответствующее точке разрыва, равно отношению

$$\sigma_p = \frac{F_p}{A_0}. \quad (3.19)$$

Напряжение, соответствующее точке разрыва образца и подсчитываемое по (3.19), условно называют **напряжением разрыва  $\sigma_p$** .

В период постепенного снижения нагрузки  $F$  напряжение в основной части образца падает до  $\sigma_p$ , но в зоне шейки фактически растет. Изменение деформаций на диаграмме теперь связано в основном с областью шейки и начинает отражать местную текучесть (только в шейке), а не общую (всего образца). Напряжение разрыва образца, вычисляемое по формуле

$$\sigma_{пч}^* = \frac{F_p}{A_{ш.р}}, \quad (3.20)$$

где  $A_{ш.р}$  — истинная площадь поперечного сечения шейки к моменту разрыва образца, может оказаться существенно больше  $\sigma_B$ .

Максимальное напряжение, ниже которого материал не разрушается, можно считать **пределом прочности**  $\sigma_{пч}$ .

Напряжение по (3.20) соответствует разрушению образца в предположении условий одноосного напряженного состояния. На самом деле в шейке возникает сложное напряженное состояние. Поэтому напряжение  $\sigma_{пч}^*$  по (3.20) характеризует прочность материала образца с некоторой условностью. Однако именно  $\sigma_{пч}^*$ , а не  $\sigma_B$  точнее соответствует пределу прочности материала как наибольшему напряжению, ниже которого материал не разрушается.

Хотя величина усилия падает, общая деформация образца продолжает расти. В шейке происходит интенсивный рост пластической деформации, а упругая деформация в остальной части образца даже несколько снижается. Поэтому шкала  $\varepsilon$  после точки  $m'$  начинает отражать некую усредненную деформацию, которая не соответствует истинной ни в одной точке образца.

К моменту разрыва общее приращение длины образца становится наибольшим и составляет

$$\Delta l_{\max} = \Delta l_{\text{ост}} + \Delta l_{y.p}, \quad (3.21)$$

где  $\Delta l_{\text{ост}}$  — остаточное (максимальное пластичное) удлинение рабочей длины разрушенного образца,  $\Delta l_{y.p}$  — осредненная по всей рабочей длине образца упругая составляющая удлинения в момент разрыва.

Точку, характеризующую  $\Delta l_{\text{ост}}$ , принято находить, проводя из точки  $n$  прямую, параллельную  $ob$ , что не совсем точно.

**Остаточным относительным удлинением после разрыва** ( $\delta\%$ ) называют отношение приращения расчетной длины образца к ее первоначальному значению, выраженное в процентах:

$$\delta = \frac{l - l_0}{l_0} 100\% = \frac{\Delta l_{\text{ост}}}{l_0} 100\%. \quad (3.22)$$

Это один из параметров, характеризующих пластичность материала. В зависимости от величины относитель-





ного удлинения после разрыва материалы условно делят на пластичные ( $\delta > 5\%$ ) и хрупкие ( $\delta < 5\%$ ). К пластичным материалам относятся малоуглеродистая сталь, медь, свинец и др., а к хрупким — закаленная сталь, чугун, стекло, камень, бетон и др.

**Остаточным относительным сужением образца после разрыва** ( $\psi\%$ ) называют выраженное в процентах отношение уменьшения площади поперечного сечения образца в месте разрыва к начальной площади его поперечного сечения:

$$\psi = \frac{A_0 - A_{\text{ш.р}}}{A_0} 100\%. \quad (3.23)$$

Точки  $o, b, c, d, e, m, n$  диаграммы в координатах  $\varepsilon$ – $\sigma$  (сплошная линия на рис. 3.8б) соответствуют характерным напряжениям  $\sigma_{\text{шц}}, \sigma_y, \sigma_T, \sigma_b, \sigma_p$ , отрезок  $os'$  соответствует остаточной деформации

$$\varepsilon_{\text{ост}} = \frac{\Delta l_{\text{ост}}}{l_0}. \quad (3.24)$$

В промежуточной точке  $k$  в соответствии с (3.17) деформация состоит из пластической и упругой частей:

$$\varepsilon_{\text{полн}} = \varepsilon_{\text{пл}} + \varepsilon_{\text{упр}}, \quad (3.25)$$

которые для точки разрыва  $n$  обозначаются как

$$\varepsilon_{\text{max}} = \varepsilon_{\text{ост}} + \varepsilon_{y.p.} \quad (3.26)$$

Здесь  $\varepsilon_{y.p.}$  соответствует упругой деформации в момент разрушения образца. Обычно полагают, что деформационная разгрузка образца в момент его разрыва происходит под тем же углом  $\alpha$  (тот же  $\text{tg}\alpha = E$ ) — штриховая прямая  $ns'$ .

Диаграмму растяжения в координатах  $\sigma$ – $\varepsilon$  (кривая  $obcde m n$  на рис. 3.8б) называют условной диаграммой. Причина заключается не столько в нелинейности оси  $\varepsilon$ , сколько в том, что полученная величина  $\sigma_p = F_p/A_0$  не соответствует тем напряжениям, которые материал испытывает к моменту разрыва. В этот момент напряжение в материале шейки образца точнее было бы определить по (3.20). Однако, как указано выше, и оно не является истинным. Диаграмму, соответствующую кривой  $obcde m u$ ,



построенную по результатам расчета по (3.20), называют (не совсем точно) истинной диаграммой растяжения пластичной стали в координатах  $\varepsilon$ – $\sigma$ . Ее можно считать истинной лишь для оси  $\sigma$ , и то лишь в том случае, если не учитывать неодноосный характер напряженного состояния в шейке. Там же на рис. 3.8б показана штрихом условная диаграмма сжатия *obcdet* того же материала. Диаграммы растяжения и сжатия образцов из одинаковой стали начинают явно различаться после превышения предела текучести  $\sigma_T$ . На диаграмме разрушения сжатием образца из пластичной стали не выявляется  $\sigma_{вр}$ . Наиболее важным выводом из сравнения диаграммы растяжения с диаграммой сжатия является факт близких значений их  $\sigma_{пл}$ ,  $\sigma_T$  и  $E$ , который позволяет вести прочностные расчеты параметров в различных задачах с пластичными материалами без учета знака напряжений.

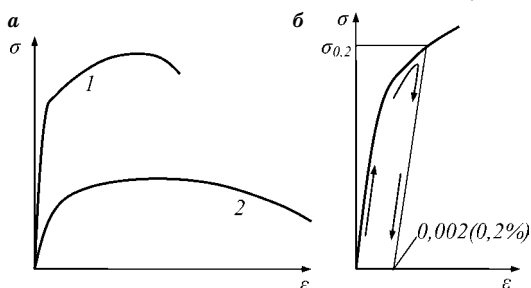
При расчетах на прочность применяют табличные значения напряжений  $\sigma_T$  и  $\sigma_{вр}$ , определяемые по типовой («условной») диаграмме (см. рис. 3.8б) [6–9].

Часто площадка текучести не проявляется, и диаграмма растяжения имеет вид кривых по рис. 3.10а.

Вид диаграмм растяжения без площадки текучести для высококачественной легированной стали обозначен цифрой 1, для алюминия или отожженной меди — цифрой 2. В таких случаях за предел текучести условно принимают напряжение, при котором пластическая деформация достигает

$$\varepsilon_{пл} = 0,002, \quad (3.27)$$

что составляет 0,2% (рис. 3.10б). Его называют **условным пределом текучести** и обозначают  $\sigma_{0,2}$ .



**Рис. 3.10.**  
Пластичные материалы, не имеющие выраженной площадки текучести и ее определение

### 3.6. ДИАГРАММЫ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ

В соответствии с величиной остаточного удлинения материалы можно разделить на:

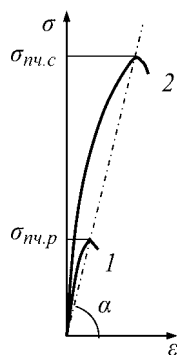
- пластичные ( $\delta \geq 10\%$ );
- малопластичные ( $5\% < \delta < 10\%$ );
- хрупкие ( $\delta \leq 5\%$ ).

**Хрупкостью** называют способность материала разрушаться без образования существенных остаточных деформаций. Величина остаточных деформаций образцов из хрупких материалов не превышает 2...5%. К хрупким материалам относятся серый чугун, высокоуглеродистая инструментальная сталь, стекло, кирпич, бетон и др.

Для хрупкого материала на диаграммах характерна достаточно выраженная нелинейная связь между напряжениями и деформациями. На рис. 3.11 показаны без учета знаков напряжений и деформаций (по абсолютной величине) диаграммы сжатия 1 и растяжения 2 чугуна. Диаграммы не имеют площадки текучести и зоны упрочнения, но имеют пределы прочности ( $\sigma_{пч}$ ). Поскольку остаточные деформации в хрупких материалах могут достигать более 0,02%, для них в справочниках часто даются значения предела текучести по типу условного, не отражающего наличие площадки текучести.

Пределы прочности образцов на сжатие и растяжение весьма сильно различаются. Различие может быть пятикратным и даже более и характеризуется коэффициентом, равным отношению предела прочности на растяжение к пределу прочности на сжатие:

$$k = \frac{\sigma_{пч.р.}}{\sigma_{пч.с.}} \quad (3.28)$$



**Рис. 3.11**  
Диаграммы растяжения и сжатия (без учета знака напряжения) хрупкого материала

Так, для чугуна он имеет значения в пределах  $k = 0,2 \dots 0,4$ . Для керамических материалов  $k = 0,1 \dots 0,2$ . Поэтому хрупкие материалы применяют для работы в условиях сжатия и до некоторой степени изгиба. Характерными деталями из хрупких материалов являются корпусные детали, фундаменты, станины станков, стены зданий и т. д.

Для хрупких материалов вследствие криволинейности диаграмм растяжения и сжатия величины модулей упругости зависят от напряжения. Поэтому в расчетах обычно берется некоторое равное среднее значение модулей упругости при растяжении и сжатии.

### 3.7. ВЛИЯНИЕ ОСНОВНЫХ ФАКТОРОВ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

Деление материалов на пластичные и хрупкие достаточно условно. Механические характеристики материала в существенной степени зависят от многих факторов. В связи с этим необходимо иметь представление о влиянии основных факторов на механические характеристики материалов.

**1. Влияние факторов технологии получения заготовок.** На механические свойства материалов влияет способ производства из них деталей: отливкой, прокаткой, штамповкой, ковкой, волочением.

**2. Влияние вида напряженного состояния материала в работающей детали.** Если в образце из пластичной стали сделать узкую кольцевую проточку, то разрушение растяжением произойдет так, как у хрупкого материала, т. е. без образования шейки.

**3. Влияние рабочей температуры.** Наиболее распространенные справочные данные по механическим свойствам материалов даются обычно для нормальных условий, т. е. для температуры  $20^\circ\text{C}$  и атмосферного давления. В интервале повышения температуры до  $400^\circ\text{C}$  низкоуглеродистые стали могут иметь даже несколько улучшенные прочностные свойства, но выше этой температуры их прочностные свойства ухудшаются.

**4. Влияние примесей и легирования.** Наличие непреднамеренных примесей, как правило, ухудшает свойства конструкционных материалов. Для направленного изменения свойств сплава осуществляют легирование — преднамеренное введение в расплав легирующих элементов. Легирующими элементами в стали и чугунах служат хром (Cr), никель (Ni), марганец (Mn), молибден (Mo), магний (Mg) и др. Если сталь содержит в сумме до 2,5% легирующих элементов, ее называют низколегированной. Сталь, содержащая 2,5–10% легирующих элементов, считается среднелегированной, более 10% — высоколегированной.

**5. Влияние термической обработки.** Для придания поверхности улучшенных свойств проводят поверхностную закалку токами высокой частоты или цементацию — насыщение поверхностного слоя углеродом. Поверхностная обработка улучшает эксплуатационные свойства поверхностного слоя, сохраняя свойства срединных слоев материала детали.

Закалка стали значительно повышает ее твердость, предел текучести и временное сопротивление, но снижает пластичность. Закалка почти не меняет величину модуля упругости.

Скорость нагружения в широком диапазоне ее изменения почти не сказывается на свойствах стали. Однако при ударной нагрузке пластичная сталь может вести себя как хрупкий материал.

Длительность воздействия нагрузки также может существенно изменять свойства материалов. Рост пластической деформации под действием постоянных нагрузок называется ползучестью или последействием.

### 3.8. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В РАСЧЕТАХ НА ПРОЧНОСТЬ

Полученные диаграммы  $\epsilon$ – $\sigma$  дают значения характерных предельных (см. подраздел 1.1) напряжений, при которых происходит нарушение работоспособности детали ( $\sigma_T$ ,  $\sigma_{вр}$ ,  $\sigma_{пц}$ ). Вновь обратим внимание на то, что в образце



при испытаниях на растяжение или сжатие возникало одноосное напряженное состояние.

Понятно, что наибольшие рабочие параметры в детали должны быть меньше предельных. Так как чаще рабочие параметры представляют в виде рабочих напряжений ( $\sigma_{\max}$ ), то

$$\sigma_{\max} < \sigma_{\text{пр}}, \quad (3.29)$$

где  $\sigma_{\text{пр}}$  — предельное напряжение.

Напряжение  $\sigma_{\max}$  должно быть меньше  $\sigma_{\text{пр}}$  в некоторое число раз для создания запаса прочности. Это число называют коэффициентом запаса прочности. Его величина отражает степень нашего незнания погрешностей расчетной схемы решаемой задачи. Поэтому вводят ограничение на величину рабочего параметра в виде его допускаемого значения. Наибольшее возможное значение рабочих параметров называют допускаемым и записывают в квадратных скобках. Допускаемые значения получают делением предельного параметра на коэффициент запаса прочности  $n_i$ :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{n_i}. \quad (3.30)$$

Таким образом, коэффициент запаса прочности представляет собой число, которое показывает, во сколько раз допускаемая величина рабочего параметра должна быть меньше предельного значения этого же параметра. Коэффициент запаса всегда больше единицы:

$$n_i > 1, \quad (3.31)$$

где  $i$  обозначает вид предельного параметра.

Предельными напряжениями могут быть приняты предел текучести, временное сопротивление, предел прочности на растяжение или предел прочности на сжатие. Тогда по (3.33) имеем

$$\begin{aligned} [\sigma_T] &= \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad [\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}, \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пч}}}{n_{\text{пч}}}, \\ [\sigma_{\text{пч.р}}] &= \frac{\sigma_{\text{пч.р}}}{n_{\text{пч}}}, \quad [\sigma_{\text{пч.с}}] = \frac{\sigma_{\text{пч.с}}}{n_{\text{пч}}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Значит, наибольшие рабочие параметры, в данном случае нормальные напряжения, возникающие в пластичных материалах, должны удовлетворять условию

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (3.33)$$

которое называется условием прочности.

Заметим, что использование условия прочности возможно лишь в том случае, если рабочие напряжения  $\sigma_{\max}$  в материале конструкции соответствуют одноосному напряженному состоянию, поскольку значение  $[\sigma]$  получено на основе испытаний образца, материал которого находился при одноосном напряженном состоянии растяжения или сжатия.

При сжимающей нагрузке знак «минус» перед обеими частями неравенств не ставится. В расчетных формулах они берутся по абсолютной величине.

Для хрупких материалов, у которых предел прочности на сжатие больше предела прочности на растяжение ( $\sigma_{\text{пч.с}} > \sigma_{\text{пч.р}}$ ) и в конструкции возникают условия  $\sigma_{\max} > 0$ ,  $\sigma_{\min} < 0$  и  $\sigma_{\max} < |\sigma_{\min}|$ , записывают два условия прочности: по растягивающим и по сжимающим напряжениям. Расчет ведется по формулам:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_{\text{пч.р}}], \quad (3.34)$$

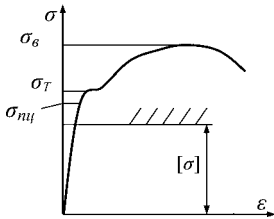
$$\sigma_{\min} \leq [\sigma_{\text{пч.с}}]. \quad (3.35)$$

Величина коэффициента запаса определяется статистическими данными результатов экспериментов, отражает практический производственный опыт в конкретной отрасли и зависит от марки материала, характера нагрузки, точности метода расчета, а также от вида последствий, которые повлечет за собой нарушение работоспособности детали. В расчетах на прочность деталей пищевого машиностроения обычно принимают

$$\begin{aligned} n_T &= 1,4 \dots 1,6; \\ n_B &= n_{\text{пч}} = 2,5 \dots 3,5. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Поскольку  $\sigma_T \approx (1,1 \dots 1,2) \sigma_{\text{пч}}$  и  $n_T \geq 1,4$ , то  $[\sigma] < \sigma_{\text{пч}}$ . Значит, при удовлетворении условия прочности выполняется закон Гука (см. 1.7), т. е. материал конструкции





**Рис. 3.12**  
Область назначения  
допускаемого напряжения

работает в упругой области (рис. 3.12). Тот же вывод следует при определении допускаемого напряжения по другим предельным напряжениям по (3.32) с учетом (3.36). Поэтому функциональная зависимость между рабочими напряжениями, не превышающими допускаемых, и вызываемыми ими деформациями принимается **линейной**, т. е. подчиняющейся закону Гука.

Обратим также внимание на интервал возможного выбора коэффициента запаса  $n_T$ . Он более 40%. На его величину выбора коэффициента влияют соответствие механических характеристик применяемых материалов их табличным значениям, характер упрощения реальной конструкции до расчетной схемы и другие трудно учитываемые факторы.

### 3.9. ТРИ ТИПА ЗАДАЧ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ

В расчетах на прочность необходимо вначале установить в расчетной схеме сечение, где действуют опасные напряжения. Затем для этих напряжений составить условие прочности. Практически определение места опасных напряжений начинают с построения эпюры внутреннего силового фактора. Только после этого для бруса переменного сечения строят эпюру напряжений и далее проводят расчет на прочность.

В соответствии со сказанным выше в расчетах на прочность исходят из условия прочности (3.33)...(3.35). Сечение, в котором действуют наибольшие напряжения, называется **опасным сечением**. Это напряжение определяется отношением внутреннего силового фактора к некоторой величине, являющейся геометрической характеристикой опасного сечения. Такой геометрической характеристикой для растяжения и сжатия является по (3.1) площадь поперечного сечения  $A$ .



Для пластичного материала имеем по (3.1) и (3.33)

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max} \leq [\sigma], \quad (3.37)^*$$

где внутренняя продольная сила выражается через внешнюю нагрузку:

$$N = K_F F. \quad (3.38)$$

Здесь  $K_F$  — коэффициент при силе  $F$  из эпюры  $N$ .

Тогда (3.37) будет иметь вид

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{K_F F}{A} \leq [\sigma]. \quad (3.39)$$

Это и есть обычная запись условия прочности для пластичного материала при растяжении–сжатии. Условие прочности для хрупкого материала при  $\sigma_{\max} > 0$ ,  $\sigma_{\min} < 0$  и  $\sigma_{\max} < |\sigma_{\min}|$  может состоять из двух аналогичных неравенств, получаемых из (3.34) и (3.35):

$$\sigma_p = \frac{N_p}{A} \leq [\sigma_{\text{пч.р}}], \quad (3.40)$$

$$\sigma_c = \frac{N_c}{A} \leq [\sigma_{\text{пч.с}}], \quad (3.41)$$

где  $\sigma_p$  и  $\sigma_c$  являются напряжениями растяжения и сжатия соответственно.

Окончательно выбирается результат, удовлетворяющий обоим условиям (3.40) и (3.41).

Из условий предельного (вместо неравенства принимается равенство) выполнения условия прочности по (3.39)...(3.41) следуют три типа задач расчетов на прочность.

**1. Расчет допускаемой (максимальной) нагрузки** — по известным допускаемому напряжению и площади поперечного сечения должно выполняться равенство

$$[F] = \frac{[\sigma] A}{K_F}. \quad (3.42)$$

---

\* Запись в одном выражении (3.37) и знака равенства, и знака неравенства математически некорректна. Однако она позволяет сократить объем записей, наглядна и вполне понятна. Поэтому будем пользоваться такой условной формой записи и в дальнейшем.



**2. Проектировочный расчет** (расчет наименьшей геометрической характеристики сечения) — по заданной внешней нагрузке и допускаемому напряжению должно выполняться равенство

$$[A] = \frac{K_F F}{[\sigma]}. \quad (3.43)$$

**3. Поверочный расчет** — расчет максимального напряжения и его сравнение с допускаемым: если заданы внешняя нагрузка и поперечное сечение, то должно выполняться условие

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{K_F F}{A} \leq [\sigma]. \quad (3.44)$$

### 3.10. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ–СЖАТИИ

В статических задачах рассматриваемого объема дисциплины полагают, что деформации ограничены пределами упругих свойств материалов. Кроме того, тепловые потери считаются малыми и их не учитывают. Тогда работа внешних сил ( $A_F$ ) должна быть равна накопленной потенциальной энергии упругой деформации ( $U_N$ ) деформированного тела

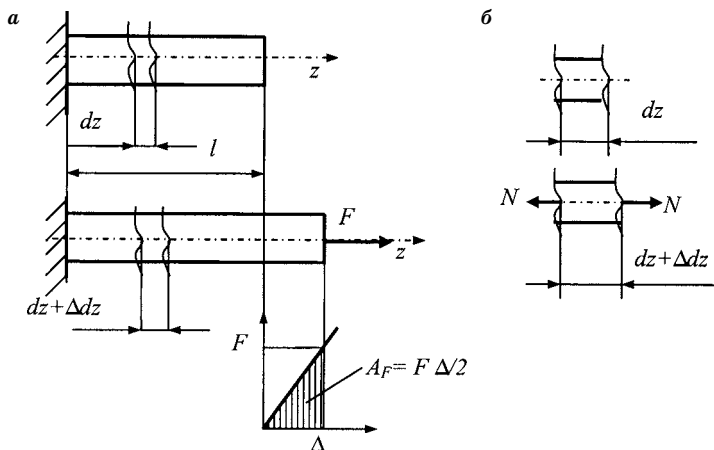
$$A_F = U_N. \quad (3.45)$$

Такие системы называются консервативными.

Рассмотрим с энергетических позиций упругую деформацию стержня.

Пусть имеем стержень длиной  $l$  (рис. 3.13а). Нагружение стержня продольной силой вызовет продольную деформацию. С ростом силы пропорционально ей растет деформация (см. диаграмму  $\Delta$ – $F$  на рис. 3.13а). При достижении силой величины  $F$  стержень удлинится в направлении ее действия на  $\Delta$ . Значит, сила  $F$  переместилась вдоль линии своего действия на  $\Delta$  и совершила работу  $A$ , равную заштрихованной площади треугольника на диаграмме

$$A = F\Delta/2. \quad (3.46)$$



**Рис. 3.13**  
Иллюстрация к определению работы и накопленной потенциальной энергии упругой деформации

Если в стержне  $n$  сил, то

$$A_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \Delta_i, \quad (3.47)$$

где  $\Delta_i$  — перемещение силы  $F_i$  вдоль линии ее действия.

Теперь вырежем в стержне участок длиной  $dz$ . После нагружения стержня силой  $N = F$  этот участок удлинится до  $dz + \Delta dz$  (рис. 3.13б). При этом

$$\Delta dz = \frac{N dz}{EA}. \quad (3.48)$$

Силы  $N$  для выделенного таким образом бесконечно малого участка можно рассматривать как внешние. Поэтому накопленная потенциальная энергия упругой деформации этого элемента выразится подобно (3.46) формулой

$$dU = \frac{1}{2} N \Delta dz. \quad (3.49)$$

Подставив (3.48) в (3.49) и проинтегрировав, получим

$$U = \frac{1}{2} \int_l N \frac{N dz}{EA} = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA}. \quad (3.50)$$

Если в стержне  $k$  участков, то

$$U_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{N_j^2 dz}{E_j A_j}. \quad (3.51)$$

Поскольку по (3.45) работа внешних сил равна накопленной потенциальной энергии упругой деформации, то в общем случае

$$\sum_{i=1}^n F_i \Delta_i = \sum_{j=1}^k \frac{N_j^2 dz}{E_j A_j}. \quad (3.52)$$

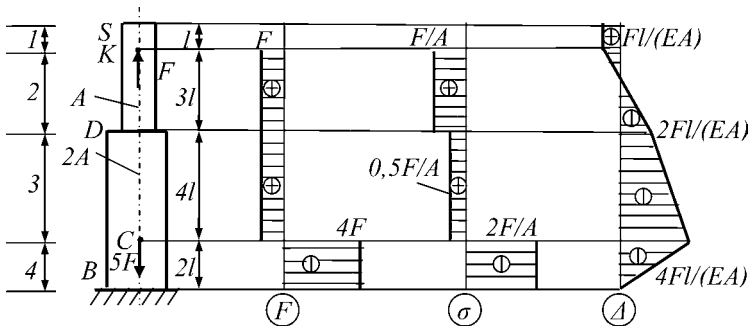
Эта формула может быть использована для проверки правильности раскрытия статической неопределимости и построения эпюр продольных сил и перемещений.

Важной характеристикой для расчетов является накопленная удельная потенциальная энергия упругой деформации как отношение полной потенциальной энергии упругой деформации по (3.51) к объему стержня  $V = Al$ :

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\frac{1}{2} N^2 l}{\frac{2}{EA} Al} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{A^2} \frac{1}{E} = \frac{1}{2} \sigma \left( \sigma \frac{1}{E} \right) = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon. \quad (3.53)$$

**Пример 3.1.** Рассмотрим пример бруса с несколькими участками (рис. 3.14).

Дано:  $A = 4 \text{ см}^2$ ;  $l = 0,5 \text{ м}$ ; материал — чугун серый СЧ 15 с  $\sigma_{\text{пч.р}} = 150 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\text{пч.с}} = 650 \text{ МПа}$ ,  $E = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ . Принять  $n_{\text{пч}} = 3$ .



**Рис. 3.14**  
Построение эпюр к примеру 3.1

**Т р е б у е т с я:** определить допускаемое усилие на брус  $[F]$ , вычислить максимальное перемещение в брус  $\Delta_{\max}$  и выполнить энергетическую проверку правильности построения эпюр.

*Решение.* Обозначим участки: 1-й участок —  $SK$ ; 2-й —  $KD$ ; 3-й —  $DC$ ; 4-й —  $CB$ .

1. В соответствии с номерами на участках действуют продольные силы. Применяя метод сечений для каждого участка, получим

$$\begin{aligned} N_1 &= 0, N_2 = F, \\ N_3 &= F, N_4 = -4F. \end{aligned}$$

Строим эпюру продольных сил  $N$ .

2. Нормальные напряжения по (3.1) будут равны:

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)} &= 0, \sigma_{(2)} = F/A, \sigma_{(3)} = F/(2A) = 0,5F/A, \\ \sigma_{(4)} &= -4F/(2A) = -2F/A. \end{aligned}$$

Строим эпюру напряжений  $\sigma$ .

Здесь и далее подстрочные индексы в скобках при  $\sigma$  будут означать участки, а не главные напряжения, для которых используют цифры 1, 2 и 3 без скобок (см. раздел. 2.1).

3. Определяем перемещения  $\Delta$  по границам участков с использованием формул (3.11) и (3.12), начиная с неподвижной точки  $B$  четвертого участка:

а) сечение в точке  $B$  неподвижно, поэтому

$$\Delta_B = 0;$$

б) сечение в точке  $C$  переместилось настолько, насколько укоротился (сжатие) участок  $BC$  ( $\Delta_{BC}$ ):

$$\Delta_C = \Delta_{BC} = -4F2l/(E2A) = -4Fl/(EA);$$

в) сечение в точке  $D$  переместилось потому, что переместилось сечение  $C$  ( $\Delta_C$ ) и удлинился участок  $CD$  ( $\Delta_{CD}$ ):

$$\Delta_D = \Delta_C + \Delta_{CD} = -4Fl/(EA) + F4l/(E2A) = -2Fl/(EA);$$

г) сечение в точке  $K$  переместилось потому, что переместилось сечение  $D$  ( $\Delta_D$ ) и удлинился участок  $DK$  ( $\Delta_{DK}$ ):

$$\Delta_K = \Delta_D + \Delta_{DK} = -2Fl/(EA) + F3l/(EA) = Fl/(EA);$$

д) сечение в точке  $S$  переместилось потому, что переместилось сечение  $K$  ( $\Delta_K$ ) и на участке  $DK$  отсутствуют напряжения (значит,  $\Delta_{KS} = 0$ ):

$$\Delta_S = \Delta_K = Fl/(EA).$$

Строим эпюру перемещений, соединяя их значения на границах участков прямыми линиями.

4. Расчет на прочность выполняется для двух участков: 2-го и 4-го, поскольку там возникают наибольшие напряжения растяжения  $\sigma_{(2)}$  и сжатия  $\sigma_{(3)}$  и при этом напряжения сжатия по абсолютной величине больше напряжений растяжения. Два условия прочности для обоих участков дают

$$\begin{aligned} \frac{F}{A} \leq [\sigma_{\text{пч.р}}] \rightarrow \frac{F}{A} \leq \frac{\sigma_{\text{пч.р}}}{n_{\text{пч}}} \rightarrow [F]_{\text{P}} &= \frac{\sigma_{\text{пч.р}} \cdot A}{n_{\text{пч}}} = \\ &= \frac{150 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{3} = 2 \cdot 10^4 \text{ Н}, \\ 2 \frac{F}{A} \leq [\sigma_{\text{пч.с}}] \rightarrow \frac{2F}{A} \leq \frac{\sigma_{\text{пч.с}}}{n_{\text{пч}}} \rightarrow [F]_{\text{C}} &= \frac{\sigma_{\text{пч.с}} \cdot A}{2n_{\text{пч}}} = \\ &= \frac{650 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3} = 4,33 \cdot 10^4 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Значит, значение допускаемой силы, удовлетворяющее обоим условиям прочности, соответствует расчету по второму участку. Поэтому окончательно назначаем

$$[F] = \min\{[F]_{\text{P}}; [F]_{\text{C}}\} = \min\{2 \cdot 10^4; 4,3 \cdot 10^4\} = 2 \cdot 10^4 \text{ Н} \approx 2 \text{ Т}.$$

5. Максимальное перемещение в брусе  $\Delta_{\text{max}}$  оказалось в сечении  $C$ . Оно равно

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{max}} = \Delta_C = 4Fl/(EA) &= \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0,5}{0,7 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,43 \text{ мм}. \end{aligned}$$

6. Выполним энергетическую проверку.

По (3.45) должно выполняться равенство

$$A_F = U_N.$$

По (3.47), (3.51) и в соответствии с эпюрами на рис. 3.14 имеем



$$A_{\Sigma} = \frac{1}{2} \left[ F \frac{Fl}{EA} + (-5F) \left( -\frac{4Fl}{EA} \right) \right] = \frac{21 F^2 l}{2 EA},$$

$$U_{\Sigma} = \frac{1}{2} \left[ \frac{F^2 3l}{EA} + \frac{F^2 4l}{E2A} + \frac{(-4F)^2 2l}{E2A} \right] = \frac{21 F^2 l}{2 EA}.$$

Значит, действительно условие  $A_F = U_N$  выполняется и эпюры верны.

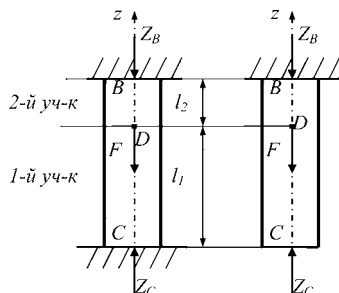
### 3.11. РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЗАДАЧ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ–СЖАТИИ

Понятие статической неопределимости при растяжении–сжатии брусьев возникает тогда, когда количество неизвестных реакций больше одной, поскольку имеем лишь одно уравнение статики:  $\sum Z_i = 0$ . Рассмотрим методiku решения статически неопределимой задачи на конкретном примере.

На рис. 3.15а изображен статически неопределимый брус, поскольку для него можно записать лишь одно уравнение статики при двух неизвестных реакциях:

$$\sum Z_i = 0 \rightarrow Z_C - F - Z_B = 0.$$

При этом говорят, что система имеет одну лишнюю связь — здесь в виде «лишней» опоры, например нижней. Лишней она является в том понимании, что брус может оставаться в равновесии и без нее: брус будет удерживать в равновесии оставшаяся опора (связь). Для раскрытия статической неопределимости требуется написать еще одно, дополнительное уравнение. С этой целью мысленно отбрасывают одну из опор. Затем прикладывают со стороны отброшенной опоры реакцию отброшенной связи в виде пока неизвестного продольного усилия. Такая



**Рис. 3.15**  
Статически неопределимый брус и эквивалентная система для него

система называется эквивалентной. Она эквивалентна исходной в том, что если мы правильно найдем реакцию, то перемещение бруса в сечении отброшенной связи (неподвижной опоры) будет равно нулю.

Методика раскрытия статической неопределимости следующая.

1. Мысленно отбрасываем нижнюю опору. Прикладываем к брусу в сечении отброшенной опоры продольную силу  $Z_C$ . Ее исходное направление произвольно. Если в результате расчета она окажется отрицательной, то это означает ее противоположное направление в опоре. В результате получили эквивалентную расчетную схему, называемую эквивалентной системой. Она эквивалентна в том смысле, что если мы правильно определим  $Z_C$ , то перемещение сечения в точке  $C$  должно оказаться равным нулю, так как мысленно отброшенная заделка препятствует перемещению. Дальнейшее решение производим для эквивалентной системы.

2. Полагая якобы известной величину  $Z_C$  и применяя метод сечений (см. раздел 1.6), определяем  $N_i$  по участкам:

$$N_1 = -Z_C \text{ и } N_2 = -Z_C + F. \quad (3.54)$$

Выполнение условий статики называют статической стороной задачи.

3. Записываем дополнительное уравнение, исходя из условий совместности перемещений элементов системы: сумма удлинений и укорочений всех участков должна быть равна нулю:

$$\Delta_C = 0 \rightarrow \Delta l_{BD} + \Delta l_{DC} = 0. \quad (3.55)$$

Поскольку составление дополнительного уравнения связано с изменением геометрии в системе, то условие совместности перемещений элементов системы называют геометрической стороной задачи.

4. Изменение длины  $i$ -го участка имеет вид по (3.12):

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}.$$



Связь между изменениями длины и параметрами системы называют физической стороной задачи.

5. Подставляем формулы п. 2 в формулы п. 4 и полученные выражения — в уравнение п. 3:

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = 0 \rightarrow \frac{(-Z_C) l_1}{E_1 A_1} + \frac{(-Z_C + F) l_2}{E_2 A_2} = 0.$$

Совместное решение этой системы уравнений называют синтезом. Поскольку все параметры уравнения, кроме  $Z_C$ , известны, определяем величину  $Z_C$ . Если получилось отрицательное значение  $Z_C$ , это означало бы лишь то, что направление реальной реакции противоположно выбранному.

С этого момента задача становится статически определимой: строим эпюры  $N$ ,  $\sigma$  и  $\Delta$ ; затем проводим расчеты на прочность и другие по требованиям условий задачи.

Итак, решение статически неопределимых систем удобно рассматривать в такой последовательности.

Сначала выявляют статическую неопределимость задачи по превышению количества неизвестных реакций над количеством уравнений статики для данной системы. Затем отбрасывают лишнюю опору и заменяют ее действие реакцией. Выбор конкретной лишней опоры произволен. После этого заменяют отброшенную опору ее реакцией на систему, получая эквивалентную систему. Хотя выбор направления этой реакции произволен, предпочтительно показывать ее направленной от бруса, т. е. растягивающей брус.

Статическая сторона задачи: полагая для данной задачи якобы известной реакцию отброшенной опоры, записывают формулы внутренних силовых факторов (продольные усилия) по типу (3.54) по всем участкам.

Геометрическая сторона задачи: на основании вида отброшенной связи (опоры) составляют условие совместности перемещений элементов системы по типу формулы (3.55).

Физическая сторона задачи: записывают для всех участков функции (3.12), связывающие деформации с физическими параметрами системы.



Синтез: подставляют  $N_i$  п. 4 в выражения (3.12) п. 6 и полученные формулы — в уравнение п. 5. После сокращений в нем остается лишь одна неизвестная реакция. Находят ее.

С этого момента задача становится статически определенной, и ее решение можно продолжать в соответствии с первоначальными условиями.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ»

1. Что называют эпюрой в сопротивлении материалов?
2. Что называют участком тела?
3. Каково правило знаков при растяжении–сжатии?
4. Как изменяется эпюра продольных сил, если между участками имеется сосредоточенная сила?
5. Какой вид деформации создают нормальные напряжения?
6. Какой вид деформации создают касательные напряжения?
7. Что постулирует гипотеза Бернулли?
8. Что следует из экспериментально наблюдаемого факта сохранения взаимной перпендикулярности продольных и поперечных линий при растяжении–сжатии?
9. Какие напряжения возникают на наклонных площадках при растяжении–сжатии?
10. В каких сечениях при растяжении–сжатии возникают наибольшие напряжения?
11. Какой вид напряжений (нормальные или касательные) присутствует в поперечных сечениях при растяжении–сжатии?
12. Чему равны наибольшие касательные напряжения при растяжении–сжатии?
13. Что называют продольной деформацией, а что — поперечной?
14. Какова связь между продольной и поперечной деформациями?
15. Что характеризует коэффициент Пуассона,  $\mu$ ?
16. Каков возможный интервал изменения коэффициента Пуассона,  $\mu$ ?
17. Что является жесткостью при растяжении–сжатии?
18. Что относят к механическим характеристикам конструкционных материалов?
19. Как получают механические характеристики?
20. Какое напряжение называют номинальным?
21. Какой формы образцы применяют при механических испытаниях материалов?
22. Чем различаются образцы для испытаний на растяжение и образцы на сжатие? Почему?

23. Что называют диаграммой испытаний образца на конкретный вид нагрузки?
24. Какие основные виды механических испытаний вам известны?
25. Чем характерна диаграмма растяжения пластичной стали?
26. Какое напряжение является пределом пропорциональности?
27. Какое напряжение является пределом упругости?
28. Что называют площадкой текучести?
29. Какое напряжение является пределом текучести?
30. Какой участок диаграммы растяжения образца из пластичной стали называют зоной общей текучести и почему?
31. Какой участок диаграммы растяжения образца из пластичной стали называют зоной упрочнения и почему?
32. Что называют временным сопротивлением?
33. Что называют шейкой образца?
34. Какая часть диаграммы растяжения образца из пластичной стали отражает местную текучесть, почему текучесть является местной?
35. Что называют истинным напряжением разрыва образца из пластичного материала?
36. Из каких составляющих складывается общее удлинение образца из пластичного материала к моменту разрыва?
37. Что называют относительным удлинением образца из пластичного материала после разрыва?
38. Что называют относительным сужением образца из пластичного материала после разрыва?
39. Почему в момент разрыва стального образца раздается характерный сильный хлопок?
40. Какая диаграмма характеризует материал, а не конструкцию образца?
41. Что характеризует продольный модуль упругости? Какие еще названия он имеет? Как он выражен на диаграмме?
42. Какую диаграмму разрушения образца называют условной и почему?
43. Может ли существовать условная диаграмма разрушения образцов для хрупких материалов и почему?
44. Какую диаграмму разрушения образца из пластичного материала называют истинной?
45. Как будет выглядеть диаграмма разрушения пластичного материала без площадки текучести?
46. Чем различаются диаграммы растяжения и сжатия образцов из пластичной стали?
47. Почему расчеты пластичных материалов можно вести без учета знака продольной деформации: растяжения или сжатия?

48. Чем различаются диаграммы для пластичных и для хрупких материалов?
49. Чем различаются диаграммы растяжения и сжатия для одного и того же хрупкого материала?
50. В каких основных пределах различаются по величине пределы прочности на растяжение и сжатие для одного и того же хрупкого материала?
51. Покажите графически характерные диаграммы растяжения и сжатия хрупкого материала.
52. Покажите графически характерные диаграммы растяжения и сжатия пластичного материала с зоной упрочнения.
53. Какие параметры условились называть предельными параметрами?
54. Каково должно быть соотношение между наибольшими рабочими параметрами (нагрузкой или напряжением) и их допускаемыми значениями?
55. Что означает коэффициент запаса прочности?
56. Каковы пределы изменения величин коэффициента запаса прочности для пластичных материалов в пищевом машиностроении?
57. Каковы пределы изменения величин коэффициента запаса прочности для хрупких материалов в пищевом машиностроении?
58. В чем заключается расчет по допускаемым напряжениям?
59. По каким напряжениям — растяжения или сжатия — надо проводить расчет, если материал пластичный?
60. По каким напряжениям — растяжения или сжатия — надо проводить расчет, если материал имеет  $\sigma_{\text{пч.р}} \neq \sigma_{\text{пч.с}}$ ?
61. Какие три типа задач прочности для объектов решают в данном курсе?
62. Какой вид имеет условие прочности при растяжении–сжатии?
63. Что служит основанием для записи дополнительного (дополнительных) уравнения для статически неопределимой системы?
64. Что физически означает фраза «условия совместного перемещения элементов системы»?
65. Какое действие означает понятие «статическая сторона задачи»?
66. Какое действие означает понятие «геометрическая сторона задачи»?
67. Какое действие означает понятие «физическая сторона задачи»?
68. Какое действие означает понятие «синтез»?
69. Какая из показанных эпюр перемещений  $\Delta$  соответствует расчетной схеме (рис. 3.16)?

70. Какая из показанных эпюр напряжений  $\sigma$  соответствует расчетной схеме (рис. 3.17)?
71. Какая из показанных эпюр продольной силы  $N$  соответствует расчетной схеме (рис. 3.18)?

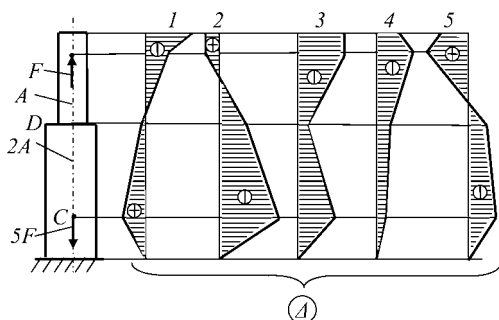


Рис. 3.16

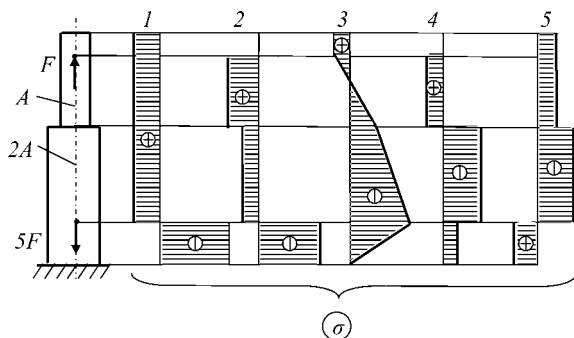


Рис. 3.17

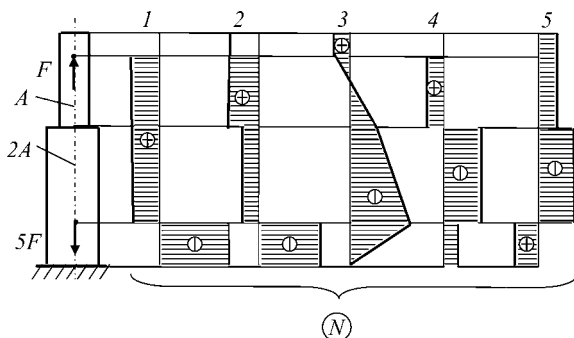


Рис. 3.18

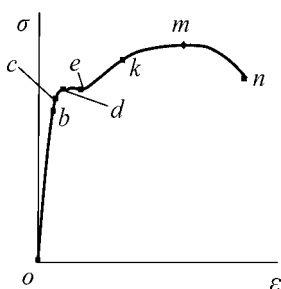


Рис. 3.19

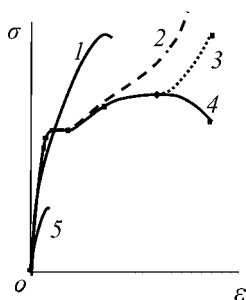


Рис. 3.20

72. В каком интервале диаграммы отображается зона пропорциональности (закон Гука) (рис. 3.19)?
73. В каком интервале диаграммы отображается зона упругости (рис. 3.19)?
74. В каком интервале диаграммы отображается зона общей текучести (рис. 3.19)?
75. В каком интервале диаграммы отображается зона местной текучести (рис. 3.19)?
76. Какая точка диаграммы соответствует на показанной диаграмме пределу пропорциональности  $\sigma_{пц}$  (рис. 3.19)?
77. Какая точка диаграммы соответствует на показанной диаграмме пределу упругости  $\sigma_y$  (рис. 3.19)?
78. Какая точка диаграммы соответствует на показанной диаграмме пределу текучести  $\sigma_T$  (рис. 3.19)?
79. Какая точка диаграммы соответствует на показанной диаграмме временному сопротивлению  $\sigma_b$  (рис. 3.19)?
80. Какая из диаграмм соответствует условной диаграмме растяжения пластичной стали (рис. 3.20)?
81. Какая из диаграмм соответствует диаграмме сжатия пластичной стали (рис. 3.20)?
82. Какая из диаграмм соответствует «истинной» диаграмме растяжения пластичной стали (рис. 3.20)?
83. Какая из диаграмм соответствует диаграмме растяжения чугуна (рис. 3.20)?
84. Какая из диаграмм соответствует диаграмме сжатия чугуна (рис. 3.20)?

4.1.  
ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Если на тело действуют две противоположно направленные силы и при этом расстояние между линиями их действий мало, то в теле возникает в основном поперечная сила и оно испытывает сдвиг. Сдвиг, приведший тело к разрушению, называют **срезом**.

Такого рода деформация возникает в сварных швах, заклепочных, шпоночных и болтовых соединениях, шпильках.

Пусть имеем консольно укрепленный прямолинейный брусок толщиной  $b$ . На весьма малом расстоянии  $a \ll b$  от жесткой опоры приложим к нему силу  $F$ , направленную перпендикулярно оси бруска (рис. 4.1а).

Поперечное сечение, обозначенное до приложения нагрузки как  $ef$ , сместится в направлении действия силы  $F$  на величину  $\Delta b$ . Поскольку рассматриваем весьма малые деформации, то величины  $a$  и  $b$  можно считать неизменными. Прямоугольник  $cdef$  между заделкой и силой  $F$

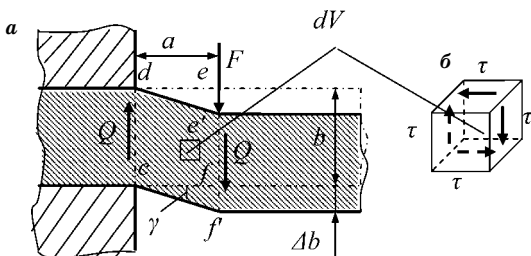


Рис. 4.1  
Иллюстрация деформации сдвига

превратился в параллелограмм  $cde'f'$ . Значит, можно считать, что в поперечных сечениях и по граням выделенного кубика  $dV$  действуют только касательные напряжения, а нормальные напряжения практически равны нулю и их можно не учитывать (рис. 4.1б). При этом будем считать, что касательные напряжения одинаковы по всему сечению. Это допущение является основным при дальнейшем рассмотрении сдвига.

Напряженное состояние, при котором на гранях кубика действуют лишь касательные напряжения, называют чистым сдвигом. При этом касательными напряжениями в поперечном сечении пластины создается лишь один внутренний силовой фактор — поперечная сила  $Q$ , равная  $F$ . Значит, чистый сдвиг относится к простому сопротивлению.

#### 4.2. ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ СДВИГЕ

Величину  $\Delta b$  называют абсолютным сдвигом. Ее отношение

$$\frac{\Delta b}{a} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \quad (4.1)$$

называют **относительным сдвигом** или **углом сдвига** ( $\gamma$  мал, поэтому  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ ).

При расчетах на сдвиг (срез) принято считать, что касательные напряжения постоянны по всему сечению. Тогда по формуле (1.10) получаем

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (4.2)$$

При испытаниях специальных образцов на сдвиг в начале получаемой диаграммы имеется область линейной связи между нагрузкой и абсолютным сдвигом. Это означает, что между напряжениями и деформациями также существует линейная связь, т. е. выполняется закон Гука при сдвиге (см. раздел 1.7):

$$\tau = G\gamma, \quad (4.3)$$

где  $G$  — модуль упругости второго рода, или модуль сдвига, Н/м<sup>2</sup>. Закон Гука при сдвиге сохраняется до некоторо-



го значения  $\tau$ , называемого, как и при растяжении–сжатии, пределом пропорциональности  $\tau_{\text{пц}}$ .

Подставляя (4.1) в (4.3) и полученное выражение в (4.2), получаем формулу для определения величины абсолютного сдвига:

$$\Delta b = \frac{\tau a}{G} = \frac{Qa}{GA}. \quad (4.4)$$

Произведение  $GA$  в (4.4) называется **жесткостью при сдвиге** (см. раздел 1.7).

Заметим, что вид формулы (4.4) повторяет вид формулы удлинения участка при растяжении и сжатии (3.10)

$$\Delta z = \frac{Nz}{EA}.$$

В числителе (4.4) и (3.10) имеем произведение внутреннего силового фактора на длину участка, в знаменателе — жесткость в виде произведения модуля упругости второго рода в (4.4) и первого рода в (3.10) на площадь поперечного сечения.

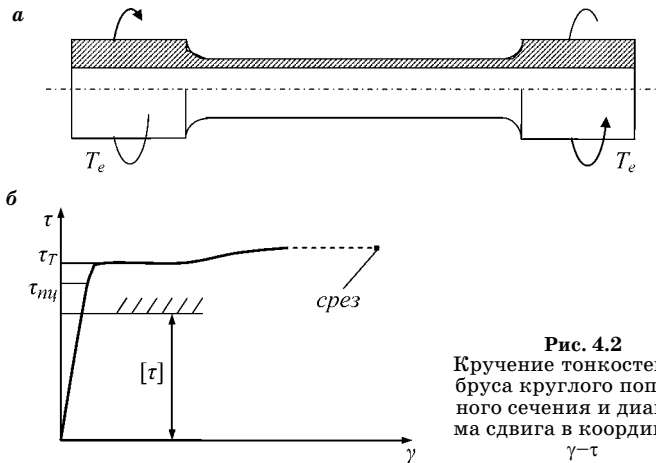
### 4.3.

## РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СДВИГЕ

Механические характеристики при сдвиге удобно получать, подвергая кручению образцы в виде тонкостенной трубки круглого поперечного сечения (рис. 4.2а).

В таких испытаниях можно считать, что образец находится в условиях чистого сдвига (двухосное напряженное состояние — см. раздел 2.4, 1-й частный случай). В результате получают диаграмму в координатах  $\varphi-T_e$ , которую переводят в диаграмму  $\gamma-\tau$  (рис. 4.2б). В диаграмме  $\gamma-\tau$ , как и в диаграммах растяжения (рис. 3.7), можно выделить три зоны (упругости с зоной пропорциональности, где выполняется закон Гука при сдвиге, текучести при  $\tau_T$  и упрочнения) и соответствующие им механические характеристики (пределы пропорциональности, упругости, текучести). Среза на длинных тонкостенных трубчатых образцах достичь нельзя: образец прежде потеряет цилиндрическую форму, т. е. произойдет потеря устойчивости. Для достижения среза проводят иные испытания. На рис 4.2 кривая к точке среза показана условно пунктиром.





**Рис. 4.2**  
Кручение тонкостенного бруса круглого поперечного сечения и диаграмма сдвига в координатах  $\gamma$ – $\tau$

В расчетах на сдвиг предельным параметром является касательное напряжение  $\tau_T$ , т. е. предел текучести при сдвиге. Допускаемые напряжения  $[\tau]$  должны быть меньше предельного  $\tau_T$  в  $n_T$  раз:

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{n_T}, \quad (4.5)$$

и с учетом величины  $n_T$  (см. раздел 3.7) оказываются в области действия закона Гука при сдвиге (рис. 4.2б).

При решении задач сопротивления материалов можно считать, что

$$\tau_T \approx 0,5\sigma_T. \quad (4.6)$$

Вспомним: касательные напряжения при чистом сдвиге соответствуют двухосному напряженному состоянию (см. подраздел 2.4, 1-й частный случай, вытекающий из (2.23)), тогда как  $\sigma_T$  получают на основании эксперимента при растяжении (одноосное напряженное состояние).

С учетом (4.6) допускаемое напряжение при сдвиге равно

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{n_T} = \frac{\sigma_T}{2n_T}. \quad (4.7)$$

Соединения, в которых нагруженный элемент считается работающим в условиях сдвига, обычно имеют более сложную картину нагружения, трудно поддающуюся точ-

ному аналитическому расчету. Поэтому, используя простые расчетные схемы сдвига, неточности компенсируют практически наработанными значениями коэффициента запаса прочности.

Рекомендуемые допускаемые касательные напряжения принимают:

а) для пластичных материалов

$$[\tau] = (0,5 \dots 0,6)[\sigma]; \quad (4.8)$$

б) для хрупких материалов

$$[\tau] = (0,1 \dots 0,8)[\sigma_p]. \quad (4.9)$$

Условие прочности при сдвиге имеет вид

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (4.10)$$

Следовательно,

$$\frac{Q}{A} = \frac{F}{A} \leq [\tau]. \quad (4.11)$$

#### 4.4. РАСЧЕТЫ СОЕДИНЕНИЙ, РАБОТАЮЩИХ НА СДВИГ

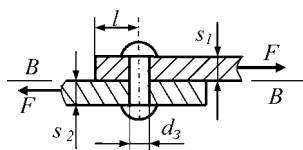
Принятое при сдвиге равномерное распределение касательных напряжений в сечении является достаточно упрощенным. Однако используемые практические рекомендации по назначению коэффициентов запаса прочности при определении допускаемых напряжений перекрывают погрешность, обеспечивая надежность расчетов на сдвиг и срез.

##### 4.4.1. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ЗАКЛЕПОЧНЫХ И БОЛТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

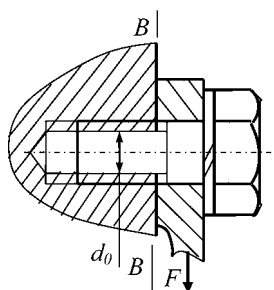
Заклепочные соединения (рис. 4.3) работают на сдвиг (срез) и смятие. В расчете на сдвиг по (4.9) должна учитываться площадь поперечного сечения заклепки на уровне касания скрепляемых листов (деталей) — по сечению В–В. Поэтому условие прочности на сдвиг заклепки имеет вид

$$\frac{F}{\pi d_s^2 / 4} \leq [\tau]. \quad (4.12)$$





**Рис. 4.3**  
Схема работы заклепочного соединения



**Рис. 4.4**  
Схема работы болтового соединения на сдвиг

Заклепочное соединение может потерять работоспособность от смятия контактируемых цилиндрических поверхностей заклепки или листов от нормальных сжимающих напряжений. Скрепленные листы могут разрушиться вдоль ряда заклепок, фронтальной нагрузке, от нормальных растягивающих напряжений. При близком расположении прочных заклепок к краю листа из непрочного материала могут произойти срезы части края листа перед каждой заклепкой (шириной  $d_3$  по длине  $l$  на рис. 4.3) от касательных напряжений. В многорядном заклепочном соединении следует учитывать неравномерность распределения усилий по рядам заклепок. Все эти задачи подробно рассматриваются в дисциплине «Механика. Детали машин».

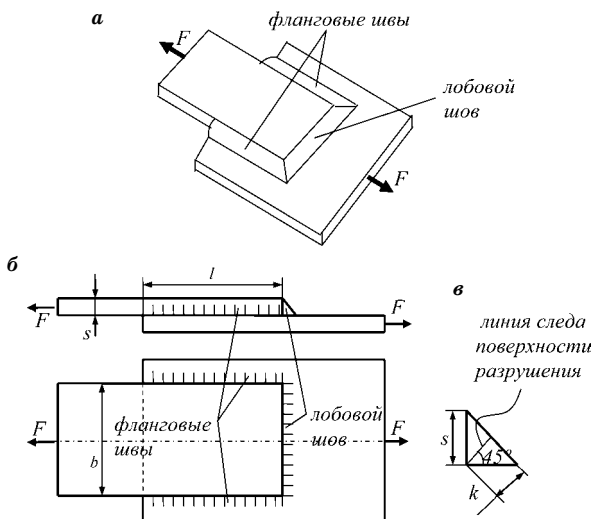
Расчет на прочность болта (рис. 4.4) при несущественном осевом усилии проводится аналогично расчету заклепки по (4.12), где вместо  $d_3$  назначают  $d_0$  — диаметр внутреннего контура резьбы болта. Расчет ведется по условию прочности на сдвиг в сечении  $B-B$ . К этим расчетам добавляется учет концентраторов напряжений в резьбе и собственно расчет резьбы, который рассматривается также в дисциплине «Механика. Детали машин».

#### 4.4.2.

#### РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Рассмотрим случай соединения двух листов одним лобовым и двумя фланговыми швами сварки (рис. 4.5а, б).

Считается, что сварной шов нагружен равномерно по длине и разрушается вдоль своей длины по плоскости, в которой лежит биссектриса его прямого угла (рис. 4.5в).



**Рис. 4.5**  
Схема работы сварного соединения

Это наименьшая площадь в сварном шве. Ее суммарная по всем трем швам величина составляет

$$A = bk + 2lk = k(b + 2l), \quad (4.13)$$

где  $k$  — ширина плоскости разрушения,  $k \approx 0,7s$ .

Величина  $k$  может приниматься и иной (в пределах от 0,7 до 1,0) в зависимости от технологии получения шва и его вида.

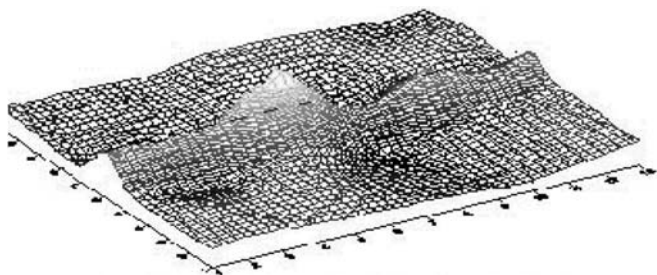
Условие прочности имеет вид (4.9). Значит,

$$\frac{F}{k(b + 2l)} \leq [\tau']. \quad (4.14)$$

Штрих при обозначении допускаемого напряжения  $[\tau']$  означает то, что его назначают с учетом ослабления материала шва сваркой, поскольку шов, особенно при ручной сварке, неидеален. Обычно принимают

$$[\tau'] = (0,9 \dots 1)[\tau], \quad (4.15)$$

где  $0,9 \dots 1$  — коэффициент снижения допускаемых напряжений в хорошо проваренном шве.



**Рис. 4.6**  
Пример результата машинного метода расчета напряжений в сварном соединении

Коэффициент снижения допускаемых напряжений учитывает наличие остаточных напряжений, которые могут суммироваться с напряжениями от нагрузки. Если имеются дефекты сварного шва, то это увеличение может оказаться весьма существенным. На рис. 4.6 показана трехмерная картина (поверхность) остаточных напряжений в математической модели зоны сварного шва с дефектами. Гребень представляет собой напряжения по сварному шву. В непроваренных (плохо проваренных) местах напряжения пикообразно вырастают. Из-за этого происходит разрушение шва.

#### 4.5. УДЕЛЬНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ СДВИГЕ. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ТРЕМЯ ПОСТОЯННЫМИ $E$ , $G$ , $\mu$

По рис. 4.1а работа внешней силы  $F$  с учетом (4.4)

$$A_F = \frac{1}{2} F \Delta b = \frac{1}{2} F \frac{Qa}{GA} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 a}{GA}, \quad (4.16)$$

где  $Q = F$ .

При этом по закону сохранения энергии работа внешних сил  $A_F$  должна равняться накопленной потенциальной энергии упругой деформации  $U_N$ :

$$A_F = U_N. \quad (4.17)$$

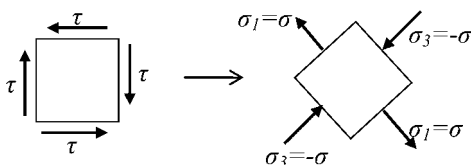
Определим удельную потенциальную энергию упругой деформации, т. е. потенциальную энергию упругой дефор-

мации, приходящуюся на единицу объема, с учетом закона Гука при сдвиге (4.3),

$$u = \frac{U_N}{V} = \frac{A_F}{V} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 a}{GA} \frac{1}{Aa} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A^2} \frac{1}{G} = \frac{1}{2} \tau^2 \frac{1}{G} = \frac{1}{2} \tau \gamma. \quad (4.18)$$

С другой стороны, чистый сдвиг дает по главным взаимоперпендикулярным площадкам нормальные напряжения, равные по величине и противоположные по направлению: растягивающие  $\sigma_1 = \sigma$  и сжимающие  $\sigma_3 = -\sigma$  (рис. 4.7).

**Рис. 4.7**  
Напряженное состояние при чистом сдвиге и его представление в виде кубика, ориентированного главными площадками



При одноосном напряженном состоянии получена формула (3.53). В случае сдвига имеем двухосное напряженное состояние в соответствии с рис. 4.7. Значит, при действии двухосного напряженного состояния имеем, учитывая принцип суперпозиции, общую (сумарную) удельную накопленную потенциальную энергию упругой деформации в виде

$$u = 0,5(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_3 \varepsilon_3). \quad (4.19)$$

По обобщенному закону Гука (2.30) для того же двухосного напряженного состояния имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_3), \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_1). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Подставим (4.20) в (4.19) и после преобразований получим величину удельной накопленной потенциальной энергии упругой деформации для двухосного напряженного состояния:

$$u = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3). \quad (4.21)$$

Учитывая, что при чистом сдвиге  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_3 = -\sigma$  (рис. 4.7), получаем из (4.21) для  $\tau = \tau_{\max} = \sigma$ :



$$u = \frac{1+\mu}{E} \sigma^2 = \frac{1+\mu}{E} \tau^2. \quad (4.22)$$

Сравнивая (4.18) и (4.22), получим

$$\frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} = \frac{1+\mu}{E} \tau^2, \quad (4.23)$$

из которого окончательно имеем

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (4.24)$$

Если принять для сталей средние значения  $\mu = 0,3$  и  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, то  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «СДВИГ»

1. Какая нагрузка приводит к сдвигу, чистому сдвигу?
2. Что называют срезом?
3. Какие детали испытывают в основном сдвиг (работают на сдвиг)?
4. Какая деформация происходит при сдвиге?
5. Какие напряжения действуют в поперечных сечениях при сдвиге?
6. Какой параметр называют абсолютным сдвигом?
7. Какой параметр называют относительным сдвигом, углом сдвига?
8. Как определяется и записывается допускаемое напряжение при сдвиге?
9. Что называют жесткостью при сдвиге?
10. Как записывается условие прочности при сдвиге?
11. Как проводится расчет на прочность заклепочных и болтовых соединений?
12. Как проводится расчет на прочность сварных соединений?
13. Какой шов сварного соединения называют фланговым, какой — лобовым?
14. Какой формулой определяется работа внешних сил при сдвиге?
15. Как наклонены главные площадки при чистом сдвиге?
16. Чему равны действующие на главных площадках при чистом сдвиге главные напряжения?
17. Что называют удельной потенциальной энергией упругой деформации при сдвиге?
18. Какой зависимостью связаны между собой три константы:  $E$ ,  $G$ ,  $\mu$ ?

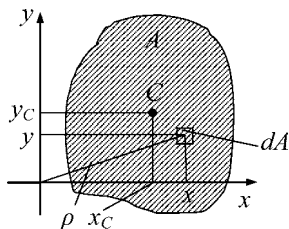


## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

**В** решении задач сопротивления материалов в качестве геометрической характеристики фигурирует не только площадь  $A$  сечения, но используются и другие геометрические характеристики плоских сечений (плоских фигур), необходимые для расчетов. Основания к их появлению станут ясны при изучении дальнейших разделов. В этой главе вводятся их понятия, показаны выводы формул и дается практическое толкование новых терминов.

### 5.1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ СЕЧЕНИЙ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СЕЧЕНИЯ

Пусть имеется плоская фигура произвольной формы площадью  $A$  с центром тяжести в точке  $C$ . Произвольно проведем оси координат  $x$ - $y$  (рис. 5.1). Выделим бесконечно малую площадку  $dA$  с координатами  $x$  и  $y$ .



**Рис. 5.1**  
Схема плоской фигуры для пояснения определения статического момента инерции сечения

**Статическим моментом сечения относительно оси ( $x$  или  $y$ )** называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида

$$S_x = \int_A y dA,$$

$$S_y = \int_A x dA. \quad (5.1)$$

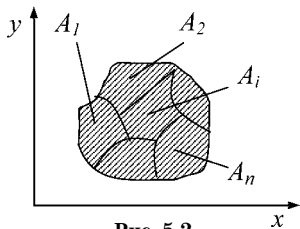


Рис. 5.2  
Представление плоской  
фигуры в виде  $n$  площадок

Статический момент имеет размерность  $\text{м}^3$  и может быть любым по знаку.

Площадь плоской фигуры  $A$  может быть представлена суммой составляющих ее  $n$  площадок  $A_i$  (рис. 5.2)

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i, \quad (5.2)$$

для каждой из которых могут быть записаны статические моменты сечения по (5.1).

Поскольку интеграл обладает свойствами аддитивности (значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин всех составляющих его частей), выражения (5.1) могут быть представлены как

$$\begin{aligned} S_x &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} y dA_i = \sum_{i=1}^n S_{x_i}, \\ S_y &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} x dA_i = \sum_{i=1}^n S_{y_i}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Пусть координатами центра тяжести (точка  $C$  на рис. 5.1) сечения являются  $x_c$  и  $y_c$ . Площадки  $i$ -е можем по формам выделить такие, у которых достаточно просто определить и их площади  $A_i$ , и координаты центров тяжести  $x_{ci}$  и  $y_{ci}$ . Тогда для определения центра тяжести плоской фигуры (см. «Теоретическая механика») статический момент всего сечения или его части может быть выражен через произведение площади фигуры ( $A$ ,  $A_i$ ) на расстояния  $x_{ci}$ ,  $y_{ci}$  от ее центра тяжести до осей  $x$ ,  $y$ :

$$\begin{aligned} S_x &= \sum_{i=1}^n y_{ci} A_i = y_c A, \\ S_y &= \sum_{i=1}^n x_{ci} A_i = x_c A. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Если ось проходит через центр тяжести фигуры (центральная ось), то относительно нее статический момент се-

чения равен нулю, поскольку для такой оси  $x_c = 0$  ( $y_c = 0$ ). Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются **центральными осями**.

Из (5.3) и (5.4) получаем координаты центра тяжести (точка  $C$ ) всей плоской фигуры в исходных, произвольно выбранных осях:

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n S_{xi}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{xi} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i},$$

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n S_{yi}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{yi} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \tag{5.5}$$

Если  $i$ -я площадка сечения является пустым пространством, отражающим полость в сечении бруса, то в (5.4), (5.5) и последующих формулах сумм ее площадь берется отрицательной.

Статический момент сечения относительно оси  $x$  или  $y$  характеризует удаленность центра тяжести сечения от оси  $x$  или  $y$  соответственно.

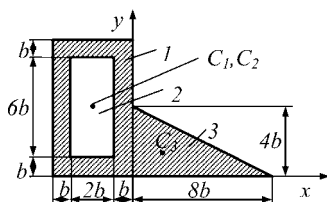
**Пример 5.1.**

**Дано:** сечение по рис. 5.3, у которого  $b = 0,1$  м.

**Требуется:** определить координаты центра тяжести сечения.

**Решение.** 1. Произвольно выберем оси. Пусть это будут оси  $x-y$ .

2. Разделим фигуру на элементарные площади. В данном случае ими могут быть три площади: 1 — прямоугольник площадью  $A_1 = 8b \cdot 4b = 32b^2$ ; 2 — пустое пространство в виде прямоугольника площадью  $A_2 = -6b \cdot 2b = -12b^2$  (площадь отрицательна); 3 — треугольник площадью  $A_3 = \frac{1}{2} 4b \cdot 8b = 16b^2$ .



**Рис. 5.3**  
Плоская фигура примера 5.1



3. Координаты центров тяжести этих фигур:  $C_1(-2b; 4b)$ ;  $C_2(-2b; 4b)$ ;  $C_3\left(\frac{1}{3}8b; \frac{1}{3}4b\right)$ .

4. Определяем координаты центра тяжести всей фигуры по (5.5):

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^3 x_{yi} A_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{(-2b)32b^2 + (-2b)(-12b^2) + \frac{1}{3}8b \cdot 16b^2}{32b^2 + (-12b^2) + 16b^2} =$$

$$= 0,074b = 0,074 \cdot 0,1 = 0,0074 \text{ м.}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^3 y_{xi} A_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{4b \cdot 32b^2 + 4b \cdot (-12b^2) + \frac{1}{3}4b \cdot 16b^2}{32b^2 + (-12b^2) + 16b^2} =$$

$$= 2,82b = 2,82 \cdot 0,1 = 0,282 \text{ м.}$$

## 5.2.

### МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ. РАДИУС ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

**Осевым моментом инерции сечения** называется геометрическая характеристика сечения, численно равная интегралу вида (рис. 5.1)

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (5.6)$$

Осевой момент инерции имеет размерность  $\text{м}^4$  и характеризует степень удаления собственно площади сечения от оси, относительно которой он берется.

**Полярным моментом инерции сечения** называется геометрическая характеристика сечения, определяемая интегралом вида

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_x + I_y, \quad (5.7)$$

где  $\rho^2 = x^2 + y^2$  представляет собой полярную координату.

Полярный момент инерции сечения имеет размерность  $m^4$ . Он характеризует степень удаления площади сечения, занятой материалом, от начала координат.

Осевые и полярный моменты инерции сечения всегда больше нуля, поскольку координата берется в квадрате.

**Радиусом инерции сечения** относительно оси (например,  $x$ ) называется величина, определяемая формулой

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}. \quad (5.8)$$

Эта величина имеет размерность  $m$  и всегда положительна.

**Центробежным моментом инерции сечения** называется геометрическая характеристика сечения, определяемая интегралом вида (рис. 5.1)

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (5.9)$$

Центробежный момент инерции сечения имеет размерность  $m^4$  и может быть больше, меньше или равным нулю. Он характеризует степень неравномерности распределения величины площади сечения относительно осей.

Центробежный момент инерции сечения относительно оси симметрии сечения равен нулю. Так, для симметричной фигуры имеем  $A_{\text{лев}} = A_{\text{прав}}$ , и поэтому каждой элементарной площадке  $dA$ , имеющей координату  $x$ , соответствует такая же площадка с координатой  $-x$  (рис. 5.4), в результате чего все слагаемые взаимно уничтожатся:

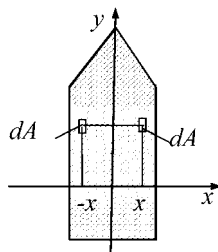


Рис. 5.4  
Пример фигуры, симметричной относительно оси  $y$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A xy dA = \int_{A_{\text{лев}}} xy dA + \int_{A_{\text{прав}}} xy dA = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i dA \right)_{A_{\text{лев}}} + \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i dA \right)_{A_{\text{прав}}} = \\ &= (\dots + (-x_i) y_i dA + \dots)_{\text{лев}} + (\dots + x_i y_i dA + \dots)_{\text{прав}} = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Поворот осей вокруг их центра приводит к тому, что моменты инерции выражаются тригонометрическими периодическими функциями угла поворота. Оси, относительно которых осевые моменты инерции приобретают экстремальные значения (один максимальное, а другой минимальное), а центробежный момент инерции становится равным нулю, называются главными осями инерции сечения. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями инерции сечения. Моменты инерции относительно главных центральных осей называются главными моментами инерции сечения.

### 5.3. ВЫВОД ФОРМУЛ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРОСТЫХ СЕЧЕНИЙ

При определении геометрических характеристик сечений к простым сечениям относят фигуры, имеющиеся в справочных таблицах (см. библиографический список). В таблицах размерность значений геометрических характеристик дана обычно в сантиметрах в степени, соответствующей характеристике. Ниже рассмотрен вывод расчетных формул осевых моментов инерции, наиболее часто встречающихся в задачах сопротивления материалов сечений: прямоугольник, коробчатое сечение, сплошной круг и кольцо (рис. 5.5). Формулы для ряда других сечений приводятся в справочных изданиях (см. библиографический список).

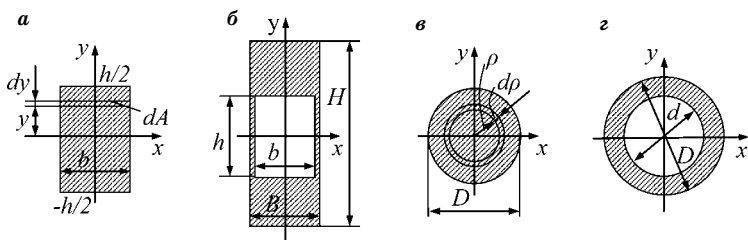


Рис. 5.5  
Примеры элементарных форм сечений

**Прямоугольник.** Для прямоугольника в задачах сопротивления материалов моменты инерции относительно осей симметрии (главные центральные оси)

$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 (b dy) = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 (h dx) = \frac{hb^3}{12}. \quad (5.11)$$

**Коробчатое сечение.** По отношению к осям симметрии прямоугольника осевые моменты инерции сечения определяют, применяя аддитивные свойства интеграла: вычитаем из момента инерции наибольшего прямоугольника момент инерции наименьшего прямоугольника, образованного прямоугольным отверстием (см. пояснение вслед за (5.5)):

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \frac{BH^3}{12} \left[ 1 - \frac{b}{B} \left( \frac{h}{H} \right)^3 \right], \\ I_y &= \frac{HB^3}{12} - \frac{hb^3}{12} = \frac{HB^3}{12} \left[ 1 - \frac{h}{H} \left( \frac{b}{B} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

**Сплошной круг.** В соответствии с (5.6)

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_{D/2} \rho^2 d(2\pi\rho \cdot d\rho) = \frac{\pi}{32} D^4 \approx 0,1D^4. \quad (5.13)$$

Поскольку для круга  $I_x = I_y$ , то

$$I_p = I_x + I_y = 2I_x. \quad (5.14)$$

Значит, (5.14) с учетом (5.13) дает

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{64} D^4 \approx 0,05D^4. \quad (5.15)$$

**Кольцо.** Как и для коробчатого сечения, моменты инерции кольца вычисляются в силу аддитивности свойств интеграла вычитанием из момента инерции большого круга момента инерции малого круга, образованного круглым отверстием, по (5.13) и (5.15):

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{\pi}{32} D^4 - \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} D^4 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \\ &= \frac{\pi}{32} D^4 (1 - C^4) \approx 0,1D^4 (1 - C^4), \end{aligned} \quad (5.16)$$



и с учетом равенства осевых моментов кольцевого сечения:

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi}{64} D^4 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi}{64} D^4 (1 - C^4) \approx 0,05 D^4 (1 - C^4), \quad (5.17)$$

где отношение внутреннего диаметра кольцевого сечения к наружному обозначено как

$$C = d/D. \quad (5.18)$$

#### 5.4. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ

Пусть дано некоторое произвольное сечение  $A$  с центром тяжести в точке  $C$ , центральной осью  $x_0$  и известным относительно нее осевым моментом инерции сечения  $I_{x_0}$  (рис. 5.6). Определим момент инерции сечения относительно оси  $x$ , параллельной центральной оси  $x_0$  и находящейся от нее на расстоянии  $a$ .

Момент инерции относительно оси  $x$  равен по (5.6)

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y_0 + a)^2 dA = \int_A y_0^2 dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A y_0 dA = I_{x_0} + a^2 A, \quad (5.19)$$

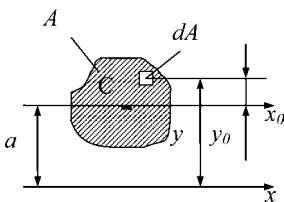


Рис. 5.6

Схема к выводу формулы изменения осевого момента инерции сечения при параллельном переносе осей

поскольку по (5.4) статический момент сечения относительно центральных осей ( $x_c = y_c = 0$ ) равен нулю:

$$\int_A y_0 dA = S_{x_0} = y_c A = 0. \quad (5.20)$$

Таким образом, момент инерции сечения относительно некоторой оси равен сумме момента инерции сечения относительно



параллельной ей центральной оси и произведения квадрата расстояния между осями и площади сечения.

Аналогично можно получить

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y_0} + b^2 A, \\ I_{xy} &= I_{x_0 y_0} + abA, \end{aligned} \tag{5.21}$$

где  $a$  — расстояние между осями  $x$  и  $x_0$ ,  $b$  — расстояние между осями  $y$  и  $y_0$ .

Если центр тяжести находится в отрицательной области, то расстояние до оси нужно взять со знаком «-» (см. пример 5.5).

### 5.5.

#### МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЛОЖНЫХ СЕЧЕНИЙ

Пусть дано некоторое произвольное сечение площадью  $A$  (рис. 5.6). Разделим его на  $n$  площадок с площадями  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ . Тогда общая площадь определяется по (5.2).

В силу аддитивности свойств интеграла имеем по (5.6)

$$\begin{aligned} I_{x\Sigma} &= \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \dots + \int_{A_n} y^2 dA = \\ &= I_{xA_1} + I_{xA_2} + \dots + I_{xA_n} = \sum_{i=1}^n I_{x_i}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Осевой момент инерции сложного сечения равен алгебраической сумме осевых моментов инерции сечений, составляющих общее сечение. Так, осевой момент инерции сечения, имеющего незанятую материалом площадь (пустоту), можно подсчитать, если вычесть из осевого момента инерции всей фигуры сечения осевого момента инерции фигуры, не занятой материалом.

Таким образом, разделяя сложное сечение на несколько простых, можем определять по (5.22) его общие осевые моменты инерции.

#### Пример 5.2.

Дано: сечение (рис. 5.7), симметричное относительно оси  $y$ , у которого  $d = 20$  мм,  $D = 50$  мм,  $a = 10$  мм.

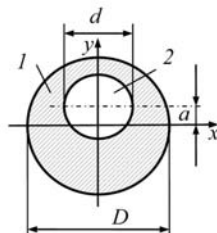


Рис. 5.7  
Схема сечения к примеру 5.2



**Т р е б у е т с я:** определить моменты инерции относительно заданных осей  $x$  и  $y$ .

**Решение.** Обозначим площадь большого круга цифрой 1 и малого (отверстия) — цифрой 2. По (5.22) с учетом (5.15), (5.19) и (5.21) имеем

$$\begin{aligned} I_{x\Sigma} &= I_{x1} - I_{x2} = I_{x1} - (I_{x02} + a^2 A_2) = \frac{\pi}{64} D^4 - \left( \frac{\pi}{64} d^4 + a^2 \frac{\pi}{4} d^2 \right) = \\ &= \frac{\pi}{64} (50 \cdot 10^{-3})^4 - \left[ \frac{\pi}{64} (20 \cdot 10^{-3})^4 + (10 \cdot 10^{-3})^2 \frac{\pi}{64} (20 \cdot 10^{-3})^2 \right] = \\ &= 27,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 27,5 \text{ см}^4, \\ I_{y\Sigma} &= \frac{\pi}{64} D^4 - \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{64} (50 \cdot 10^{-3})^4 - \frac{\pi}{64} (20 \cdot 10^{-3})^4 = \\ &= 30,0 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 30,0 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

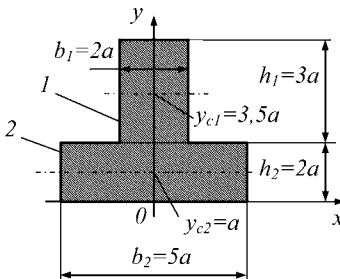
Как видим, смещение по оси  $y$  пустоты в виде круга привело к снижению  $I_{x\Sigma}$  по сравнению с  $I_{y\Sigma}$ . При этом величина  $I_{y\Sigma}$  не меняется при смещении отверстия по оси  $y$  и равна моменту инерции  $I_y$  для трубы со стенками постоянной толщины.

### Пример 5.3.

**Д а н о:** тавровое сплошное сечение (рис. 5.8), симметричное относительно оси  $y$ , у которого  $a = 6$  мм.

**Т р е б у е т с я:** определить моменты инерции относительно заданных осей  $x$  и  $y$ .

**Решение.** Выделим в сечении две фигуры и обозначим их цифрами 1 и 2. Покажем их геометрические характеристики:  $b_1 = 2a$ ,  $h_1 = 3a$ ,  $b_2 = 5a$ ,  $h_2 = 2a$ ,  $x_{C1} = x_{C2} = 0$ ,  $a_1 = y_{C1} = 3,5a$ ,  $a_2 = y_{C2} = a$ .



**Рис. 5.8**  
Схема сечения  
к примеру 5.3

По (5.22), а также (5.11), (5.19) и (5.21) имеем

$$\begin{aligned} I_{x\Sigma} &= I_{x1} + I_{x2} \dots = (I_{x01} + a_1^2 A_1) + (I_{x02} + a_2^2 A_2) = \\ &= \left( \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 A_1 \right) + \left( \frac{b_2 h_2^3}{12} + a_2^2 A_2 \right) = \\ &= \left[ \frac{2a(3a)^3}{12} + (3,5a)^2 2a3a \right] + \left[ \frac{5a(2a)^3}{12} + a^2 5a2a \right] = \\ &= \left[ \frac{2 \cdot 3^3}{12} + 3,5^2 \cdot 2 \cdot 3 + \frac{5 \cdot 2^3}{12} + 1^2 \cdot 5 \cdot 2 \right] (6 \cdot 10^{-3})^4 = \\ &= 11,84 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 11,84 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y\Sigma} &= I_{y1} + I_{y2} = I_{y01} + I_{y02} = \frac{h_1 b_1^3}{12} + \frac{h_2 b_2^3}{12} = \\ &= \frac{3a(2a)^3}{12} + \frac{2a(5a)^3}{12} = \left( \frac{3 \cdot 2^3}{12} + \frac{2 \cdot 5^3}{12} \right) (6 \cdot 10^{-3})^4 = \\ &= 137 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4 = 0,0137 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Как видим, размещение площади сечения возле оси  $y$  и смещение ее от оси  $x$  создало десятикратное превышение  $I_{x\Sigma}$  по сравнению с  $I_{y\Sigma}$ .

**Пример 5.4.**

**Д а н о:** сечение (рис. 5.9), симметричное относительно обеих осей  $x, y$ . Сечение составлено из двутавра № 18 и двух приваренных к нему пластин с  $b = 120$  мм и  $h = 20$  мм (соответственно позиции 1 и 2 на рис. 5.9).

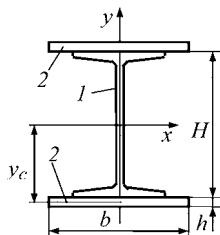
**Т р е б у е т с я:** определить момент инерции сечения относительно оси  $x$ .

**Решение.** Из таблицы параметров прокатной стали (ГОСТ 8239) выписываем для двутавра, обозначенного цифрой 1:  $I_{x1} = 1290 \text{ см}^4$ ;  $A_1 = 23,4 \text{ см}^2$ .

Номер двутавра указывает его высоту  $H = 18 \text{ см}$ .

Общий момент инерции сечения определится с учетом (5.19) и (5.21) формулой

$$I_{x\Sigma} = I_{x1} + 2(I_{x2} + y_c^2 A_2),$$



**Рис. 5.9**  
Схема сечения к примеру 5.4



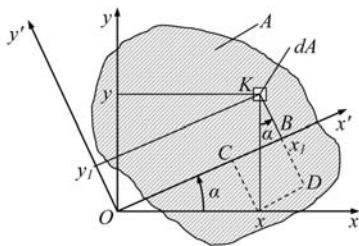
в которой учтено, что центры тяжести обеих пластин находятся на расстоянии  $y_c = (H + h)/2$  от общей оси  $x$ , а центр тяжести двутавра лежит на ней. Момент инерции каждой пластины относительно собственной центральной оси подсчитывается по формуле (5.11):  $I_{x_2} = bh^3/12$ . Значит,

$$I_{x\Sigma} = 1290 \cdot 10^{-8} + 2 \left( \frac{0,12(20 \cdot 10^{-3})^3}{12} + \left[ \frac{0,18}{2} + \frac{20 \cdot 10^{-3}}{2} \right]^2 \cdot 0,12 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \right) = (1290 + 2 \cdot 2408)10^{-8} = 6106 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 6106 \text{ см}^4.$$

Обратим внимание на то, что каждая тонкая пластина в сечении вносит существенно бóльшую (почти двукратную в сравнении с двутавром) долю в величину общего момента инерции. Это объясняется удаленностью центров тяжести пластин от центра тяжести всего сечения.

## 5.6. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УГЛА НАКЛОНА ОСЕЙ

Пусть имеется сечение площадью  $A$ , расположенное в осях  $x$ - $y$  (рис. 5.10), относительно которых известны моменты инерции  $I_x$  и  $I_y$ .



**Рис. 5.10**  
Схема для вывода формулы, описывающей изменение моментов инерции при повороте осей

Определим моменты инерции этого сечения относительно новых осей  $x''$ - $y'$ , повернутых на некоторый угол  $\alpha$ .

Для этого выделим в сечении бесконечно малый элемент площадью  $dA$ . Его координаты в соответствии с рисунком определяются формулами

$$\begin{aligned}x_1 &= OB = OC + CB = OC + xD = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\y_1 &= BK = KD - BD = KD - Cx = y \cos \alpha + x \sin \alpha.\end{aligned}\quad (5.23)$$

На основании (5.6) имеем

$$\begin{aligned}I_{x'} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 dA = \\&= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.\end{aligned}\quad (5.24)$$

Аналогично получаем

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha.\quad (5.25)$$

Складывая (5.24) и (5.25), имеем

$$\begin{aligned}I_{x'} + I_{y'} &= I_x(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + I_y(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \\&= I_x + I_y = I_p.\end{aligned}\quad (5.26)$$

Значит, сумма осевых моментов инерции, означающая полярный момент инерции, остается неизменной при повороте осей. Заметим, что этот вывод следовал непосредственно из соотношения между полярным и осевыми моментами инерции, поскольку параметр  $\rho$  остается неизменным при любом повороте осей (любом  $\alpha$ ).

Аналогично  $I_{x_1}$  и  $I_{y_1}$  получаем по (5.10) формулу центробежного момента инерции сечения относительно осей  $x_1 y_1$ :

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha.\quad (5.27)$$

## 5.7. ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ. ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ И РАДИУСЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

Анализируя формулы (5.24) и (5.25), видим, что они являются периодическими непрерывными функциями от  $\alpha$ . Значит, при определенных значениях  $\alpha = \alpha_0 + k\pi/2$  осевые моменты инерции имеют экстремальные значения ( $k$  — натуральное число). В таком случае, учитывая постоянство суммы осевых моментов инерции по (5.26), один



из осевых моментов инерции приобретает максимальное значение, а другой — минимальное.

Найдем первое (наименьшее) значение такого угла  $\alpha = \alpha_0$ . С этой целью найдем первую производную по  $\alpha$ , например от  $I_{x'}$ :

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = -2I_x \cos\alpha \cdot \sin\alpha + 2I_y \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (5.28)$$

Приравняем ее к нулю:

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = 0. \quad (5.29)$$

Тогда получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (5.30)$$

Оказывается, тот же угол получается, если в (5.27) принять

$$I_{x'y'} = 0. \quad (5.31)$$

Значит, при угле  $\alpha_0$  центробежный момент инерции равен нулю.

Оси, относительно которых осевые моменты инерции приобретают экстремальные значения (один — максимальное, а другой — минимальное), а центробежный момент инерции становится равным нулю, называются **главными осями инерции сечения**.

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются **главными центральными осями инерции сечения**. В сечениях сложного вида, составленных из простых фигур, такие оси для каждой простой фигуры будут обозначаться с нулевым индексом ( $x_0, y_0$ ).

Моменты инерции относительно главных центральных осей называются **главными моментами инерции сечения**.

Величины главных моментов инерции сечения определяют, подставляя найденное по (5.31) значение  $\alpha_0$  в (5.24) и (5.25).

Для упрощения расчетов формулы (5.24) и (5.25) можно представить (по аналогии с методикой разделов 2.2–2.3) в форме

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (5.32)$$



Радиусы инерции относительно главных осей называются **главными радиусами инерции**

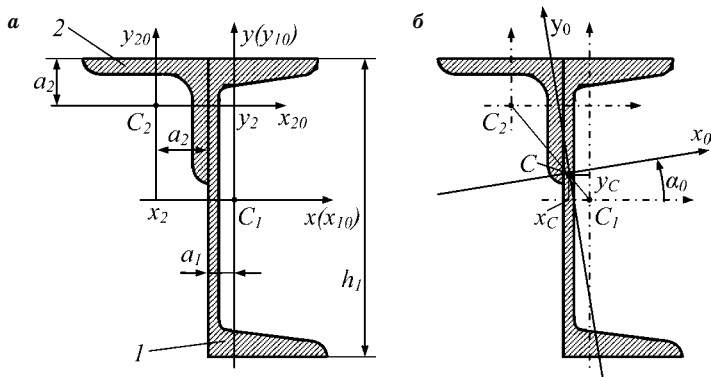
$$i_{\max/\min} = \sqrt{\frac{I_{\max/\min}}{A}}. \quad (5.33)$$

**Пример 5.5.**

**Д а н о:** составное сварное сечение (рис. 5.11а) из профилей (швеллер и равнобокий уголок) по ГОСТ 8239. Собственные центральные оси уголка и швеллера обозначены соответственно как  $x_{10}, y_{10}$  и  $x_{20}, y_{20}$ . Швеллер № 16, который обозначен как фигура 1, имеет:  $a_1 = 1,80$  см;  $h_1 = 16$  см;  $I_{x_{10}} = 747$  см<sup>4</sup>;  $I_{y_{10}} = 63,3$  см<sup>4</sup>;  $A_1 = 18,1$  см<sup>2</sup>. Равнобокий уголок № 7, который обозначен как фигура 2, имеет:  $a_2 = 1,94$  см;  $I_{x_{20}} = I_{y_{20}} = 37,6$  см<sup>4</sup>;  $I_{x_{y_{20}}} = 22,1$  см<sup>4</sup>;  $A_2 = 8,15$  см<sup>2</sup>.

**Т р е б у е т с я:** определить положение центра тяжести (С) составного сварного сечения, его главных центральных осей инерции ( $x_0y_0$ ), а также значения главных центральных (экстремальных) моментов инерции ( $I_{x_0}, I_{y_0}$ ).

**Решение.** Вначале отметим, что вертикальная и горизонтальная оси уголка не являются для него главными. Поэтому центробежный момент инерции уголка относительно них не равен нулю. Для швеллера такие оси являются главными. Поэтому центробежный момент инерции швеллера относительно них равен нулю.



**Рис. 5.11**  
 Схема составного сечения к примеру 5.5



1. Выбираем произвольно оси  $x$ - $y$ . Для упрощения расчетов совмещаем их с главными центральными осями швеллера. Тогда координатами центров тяжести швеллера ( $C_1$ ) и уголка ( $C_2$ ) будут:

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 = 0; \\x_2 &= -a_1 - a_2 = -1,80 - 1,94 = -3,74 \text{ см}; \\y_2 &= h_1/2 - a_2 = 16/2 - 1,94 = 6,06 \text{ см}.\end{aligned}$$

2. Определяем положение центра тяжести сечения по (5.5):

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(-3,74)8,15}{18,1 + 8,15} = -1,16 \text{ см}, \\y_C &= \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{6,06 \cdot 8,15}{18,1 + 8,15} = 1,88 \text{ см}.\end{aligned}$$

Таким образом, общий центр тяжести составного сечения имеет координаты  $C(-1,16; 1,88)$ . Показываем его точкой  $C$  на рис. 5.11б.

Заметим, что правильно вычисленные координаты должны указать положение центра тяжести на прямой (показана пунктирной линией), соединяющей центры тяжести фигур сечения.

3. Определяем величины моментов инерции относительно выбранных осей  $xy$  по (5.21) и (5.22), учитывая то, что  $x_1 = y_1 = 0$ ,

$$\begin{aligned}I_x &= I_{x_1} + I_{x_2} = I_{x_{01}} + (I_{x_{02}} + y_2^2 A_2) = \\&= 747 + (37,6 + 6,06^2 \times 8,15) = 1084 \text{ см}^4, \\I_y &= I_{y_1} + I_{y_2} = I_{y_{01}} + (I_{y_{02}} + x_2^2 A_2) = \\&= 63,3 + (37,6 + (-3,74)^2 \times 8,15) = 214,9 \text{ см}^4, \\I_{xy} &= I_{xy_1} + I_{xy_2} = I_{x_0 y_{01}} + (I_{x_0 y_{02}} + x_2 y_2 A_2) = \\&= 22,1 + (-3,74) \times 6,06 \times 8,15 = -162,6 \text{ см}^4.\end{aligned}$$

4. Определяем угол наклона главных центральных осей инерции сечения по (5.30):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2(-162,6)}{214,9 - 1084} = 0,374,$$

что соответствует  $\alpha_0 = 10^\circ 15'$ .





Проводим через центр тяжести сечения оси  $x_0$  и  $y_0$  под найденным углом (рис. 5.11б).

5. Определяем величины главных моментов инерции по (5.32):

$$I_{\max} = I_{x_0} = \frac{1084 + 214,9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(1084 - 214,9)^2 + 4(-162,6)^2} = 1114 \text{ см}^4,$$

$$I_{\min} = I_{y_0} = \frac{1084 + 214,9}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(1084 - 214,9)^2 + 4(-162,6)^2} = 186 \text{ см}^4.$$

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ  
«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ»**

1. Какие оси называют центральными?
2. Какую геометрическую характеристику называют статическим моментом сечения?
3. Как обозначается статический момент сечения?
4. Какова размерность статического момента сечения?
5. Может ли статический момент сечения быть больше, меньше нуля?
6. Что означает свойство аддитивности?
7. Обладает ли свойством аддитивности статический момент сечения?
8. По каким формулам определяют положение центра тяжести плоской фигуры?
9. Что характеризует статический момент плоского сечения?
10. Чему равен статический момент сечения квадрата относительно его центральных осей?
11. Чему равен статический момент сечения круга относительно его центральных осей?
12. Какую геометрическую характеристику называют осевым моментом инерции плоского сечения? Как он обозначается?
13. Какова размерность осевого момента инерции плоского сечения?
14. Может ли осевой момент инерции плоского сечения быть меньше нуля?
15. Что характеризует осевой момент инерции плоского сечения?
16. Какую геометрическую характеристику называют полярным моментом инерции плоского сечения? Как он обозначается?



17. Какова размерность полярного момента инерции плоского сечения?
18. Может ли полярный момент инерции плоского сечения быть меньше нуля?
19. Как связаны осевой момент плоского сечения с осевыми моментами инерции площадей, составляющих это сечение?
20. Что характеризует полярный момент инерции плоского сечения?
21. Что называют радиусом инерции сечения? Как он обозначается?
22. Какова размерность радиуса инерции сечения? Может ли он быть меньше нуля?
23. Что характеризует радиус инерции сечения?
24. Какую геометрическую характеристику называют центробежным моментом инерции сечения? Как он обозначается? Какова его размерность? Может ли он быть больше, меньше нуля?
25. Что характеризует центробежный момент инерции плоского сечения?
26. Какой формулой определяется осевой момент инерции прямоугольника?
27. Какими формулами определяются осевой и полярный моменты инерции круга?
28. Какими формулами определяются осевой и полярный моменты инерции кольца?
29. Чему равен осевой момент инерции сечения относительно оси, параллельной центральной?
30. Как определяются осевые моменты инерции сложных сечений?
31. Чему равна сумма осевых моментов инерции плоского сечения относительно осей, повернутых на некоторый угол?
32. Какие оси называют главными осями инерции плоского сечения?
33. Какие оси называют главными центральными осями инерции плоского сечения?
34. Какие моменты инерции сечения называют главными?

## КРУЧЕНИЕ

### 6.1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

Пусть имеется прямолинейный брус, на который действует внешний крутящий момент  $T_e$  (рис. 6.1а), создающий в заделке  $B$  реакцию в виде такого же по величине, но противоположно направленного крутящего момента  $T_B$ . Применяя ту же последовательность действий метода сечений, что и в главе, посвященной растяжению–сжатию (см. раздел 3.1), устанавливаем, что внешняя нагрузка в виде крутящих моментов вызывает только один внутренний силовой фактор в виде внутренних крутящих моментов  $T$ .

Крутящие моменты  $T$  определяются по участкам с помощью уже известного нам метода сечений. В пределах изучаемой дисциплины «Механика. Сопроотивление материалов» знак эпюры  $T$  не играет роли. Поэтому для ее построения вводится условное правило знаков при кручении: крутящий момент в сечении считается положительным, если, глядя со стороны сечения на отсеченную часть, видим внешний момент направленным противоположно движению часовой стрелки.

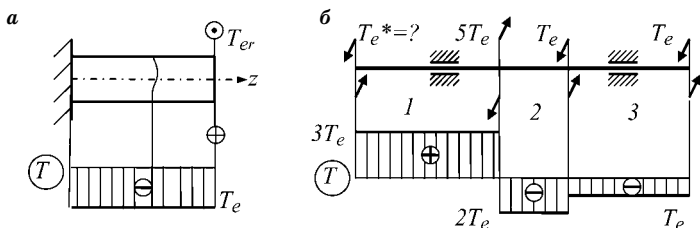


Рис. 6.1  
Примеры построения эпюр крутящих моментов  $T$

Значит, в примере по рис. 6.1а внутренний момент отрицателен:  $T = -T_e$ .

### Пример 6.1.

Д а н о: расчетная схема по рис. 6.1б.

Т р е б у е т с я: Построить эпюру крутящих моментов  $T$ .

*Решение.* Предполагаем отсутствие сопротивления вращению в шарнирных опорах. Тогда для расчетной схемы вала постоянного сечения по рис. 6.1б имеем три участка.

Вначале определяем внешний момент  $T_e^*$ , который показан на рисунке как « $T_e^* = ?$ ». Его величина и направление должны соответствовать условию равновесия от всей приложенной нагрузки:

$$\sum T_{ei} = 0 \rightarrow T_e^* - 5T_e + T_e + T_e = 0 \rightarrow T_e^* = 3T_e.$$

Применяя метод сечений на каждом из трех участков, имеем:

- на первом участке делаем сечение, отбрасываем всю правую часть бруса и получаем  $T_1 = 3T_e$ ;
- на втором участке делаем сечение, отбрасываем всю правую часть бруса и получаем  $T_2 = 3T_e - 5T_e = -2T_e$ ;
- на третьем участке делаем сечение, отбрасываем всю левую часть бруса и получаем  $T_3 = -T$ .

На третьем участке отбрасывали всю левую часть, но тот же результат был бы получен, если бы отбрасывали всю правую часть. Правило знаков позволяет рассматривать либо правую, либо левую отсеченную часть.

Строим эпюру крутящих моментов  $T$  по найденным значениям на участках.

## 6.2. ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

### 6.2.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Пусть имеется консольный прямой брус круглого поперечного сечения, на поверхности которого нанесены продольные ( $a$ ,  $b$ ) и перпендикулярные им поперечные кольцевые линии ( $c$ ,  $n$ ) (рис. 6.2а).

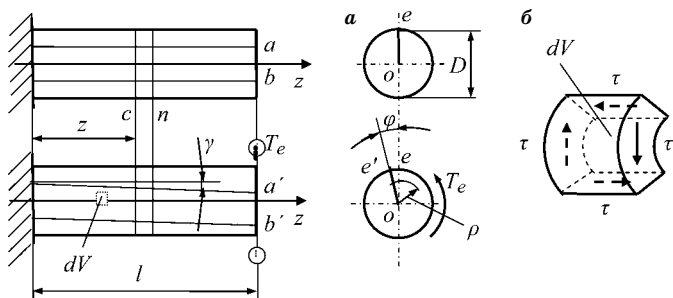


Рис. 6.2

Иллюстрация результатов эксперимента при кручении прямолинейного бруса круглого поперечного сечения

Эксперимент показывает, что после приложения нагрузки  $T_e$  продольные линии превратятся в цилиндрические спирали ( $a', b'$ ), а поперечные — повернутся вокруг оси  $z$ , например из  $e$  в  $e'$ , на некоторый угол  $\varphi = \varphi(z)$ . Угол  $\varphi$  называется углом закручивания. При этом расстояния между кольцевыми линиями не меняются. Из этого эксперимента следует несколько выводов.

1. Поверхностные кольцевые линии, лежащие в поперечных плоскостях до нагружения, остались лежать в тех же плоскостях и после нагружения. Они лишь повернулись вокруг оси  $z$ . Значит, можно допустить, что и все внутренние точки бруса, располагавшиеся в этих же плоскостях до нагружения, остались лежать в них и лишь повернулись вокруг оси  $z$  на тот же угол. Значит, поперечные сечения бруса, плоские до нагружения, сохранились плоскими после нагружения и, поскольку тело является линейно деформируемым, лишь повернулись вокруг оси  $z$  как жесткое целое. Это предположение называется **гипотезой плоских сечений**.

2. Расстояния между поперечными линиями ( $cn$ ) и общая длина бруса  $l$  не изменились. Значит (см. раздел 3.2), нормальные напряжения в поперечных сечениях равны нулю ( $\sigma_z = 0$ ).

3. Прямоугольники, образованные поверхностной сеткой взаимно перпендикулярных полос, превратились в параллелограммы. Следовательно, в поперечных сечениях действуют касательные напряжения ( $\tau \neq 0$ ).

При  $\sigma_z = 0$  и  $\tau \neq 0$  имеем чистый сдвиг, т. е. двухосное напряженное состояние, показанное для элементарного объема  $dV$  (рис. 6.2б).

С учетом гипотезы плоских сечений и закона Гука угол сдвига, равный  $\gamma \approx ee'/l$ , линейно возрастает от нуля на оси  $z$ , где  $\rho = 0$ , до максимума у поверхности, где  $\rho = D/2$ . Значит, касательные напряжения должны быть линейной функцией радиуса  $\tau = K\rho$ , и их величина меняется от нуля на оси  $z$  до максимума у поверхности бруса.

Обратим внимание на то, что формула  $\tau = K\rho$ , указывающая на характер распределения касательных напряжений в поперечном сечении, была сформулирована лишь на основе результатов эксперимента и введенных гипотез. Однако коэффициент  $K$  остается пока неизвестным.

### 6.2.2. ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ УГОЛ ЗАКРУЧИВАНИЯ. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ

Вырежем в брус (рис. 6.2) по координате  $z$  бесконечно малый кольцевой элемент радиуса  $\rho$ , длиной  $dz$  и толщиной  $d\rho$  (рис. 6.3а).

По его торцевым плоскостям (каждая площадью  $dA$ ) будут действовать касательные напряжения  $\tau$ , которые на левой стороне обозначим их результирующей в виде момента  $dT$ .

Линия  $es$ , до нагружения параллельная оси  $z$ , повернется после нагружения на малый угол  $\gamma$  (угол сдвига) и займет положение  $es'$  (рис. 6.3б). Дуга  $ss'$  соответствует углу закручивания  $d\phi$ , не зависящему от  $\rho$  в соответствии с гипотезой плоских сечений.

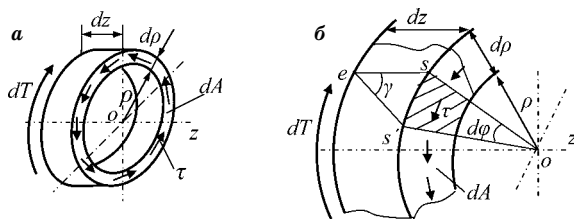


Рис. 6.3

Бесконечно малый кольцевой элемент бруса в условиях кручения

Из  $\Delta ss'$  и  $\Delta \rho ss'$  следует

$$\begin{aligned} ss' &= estg\gamma = dztg\gamma \approx \gamma dz, \\ ss' &= (\rho + d\rho)d\varphi \approx \rho d\varphi. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Приравнивая правые части первого и второго выражений (6.1), получим

$$\gamma = \rho d\varphi/dz = \rho\theta, \quad (6.2)$$

где отношение  $d\varphi/dz$  называют **относительным углом закручивания бруса** (вала)

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (6.3)$$

Оно имеет размерность в  $m^{-1}$ .

Поскольку рассматриваются линейно упругие тела, то по закону Гука и с учетом (6.2) получим

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta. \quad (6.4)$$

Равновесие бесконечно малого элемента по рис. 6.3а определяется равенством

$$\sum T_i = 0 \rightarrow dT = (\tau dA)\rho, \quad (6.5)$$

которое после интегрирования дает

$$T = \int_A \tau \rho dA = \int_A G\theta \rho^2 dA = G\theta \int_A \rho^2 dA = G\theta I_p. \quad (6.6)$$

В (6.6)  $G$  и  $\theta$  — константы. Там же последний интеграл является уже известным нам по (5.7) полярным моментом инерции  $I_p = \int_A \rho^2 dA$ .

Из (6.6) получаем формулу относительного угла закручивания

$$\theta = \frac{T}{GI_p}, \quad (6.7)$$

где произведение  $GI_p$  называется **жесткостью при кручении**.

Подставив (6.7) в (6.4), получим формулу для определения касательного напряжения в любой точке круглого сечения бруса:

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho. \quad (6.8)$$



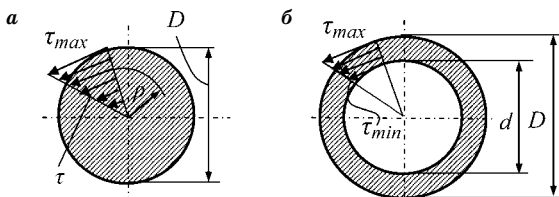


Рис. 6.4

Распределение касательных напряжений в поперечном сечении сплошном круглом (а) и кольцевом (б)

Значит, величина касательного напряжения пропорциональна радиусу  $\rho$  (рис. 6.4).

Этот вывод был ранее (в 6.2.1) сформулирован лишь на основании эксперимента. Однако теперь нам известен и сам коэффициент  $K = \frac{T}{I_p}$ .

Напомним для дальнейших расчетов формулы полярного момента инерции для сплошного ( $I_{p(\text{сплош})}$ ) и кольцевого ( $I_{p(\text{кольц})}$ ) сечений, которые имеют вид соответственно

$$I_{p(\text{сплош})} = \frac{\pi}{32} D^4 \approx 0,1D^4,$$

$$I_{p(\text{кольц})} = \frac{\pi}{32} D^4(1 - C^4) \approx 0,1D^4(1 - C^4). \quad (6.9)$$

Здесь  $C = d/D$ ,  $d$  и  $D$  — наименьший (внутренний) и наибольший (внешний) диаметры сечения. Для сплошного сечения  $d = 0$ , что дает  $C = 0$ .

### 6.3. РАСЧЕТ НА ЖЕСТКОСТЬ

Жесткость является мерой деформационных свойств материала. Расчет на жесткость при кручении сводится к выполнению условия ограничения относительного угла закручивания бруса

$$|\theta|_{\max} \leq [\theta]. \quad (6.10)$$

Допускаемую величину  $[\theta]$  назначают, исходя из особенностей работы детали. С учетом (6.7) имеем

$$\frac{T}{GI_p} \leq [\theta]. \quad (6.11)$$



В (6.11) крутящий момент  $T$  принимается всегда положительным, поскольку здесь не имеет значения направление касательных напряжений.

Обычно допускаемый относительный угол закручивания дается в размерности град/м, а в (6.11) он имеет размерность в системе СИ рад/м. В этих случаях допускаемое напряжение должно быть умножено на коэффициент перехода  $\pi/180$ . Тогда (6.11) примет вид

$$\frac{T}{GI_p} \leq [\theta] \frac{\pi}{180}, \quad (6.12)$$

откуда с учетом (6.9) допускаемый диаметр бруса по условию жесткости (поэтому обозначено  $[D] = [D]_0$ ) определяется формулой

$$[D]_0 = \sqrt[4]{\frac{180T}{0,1(1-C^4)\pi G[\theta]}}, \text{ м.} \quad (6.13)$$

Здесь полярный момент инерции записан для кольца, поскольку для него математическое выражение полярного момента имеет более общую форму, годную при  $C = 0$  для сплошного круглого сечения.

#### 6.4. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

В расчетах на прочность при кручении предельным параметром обычно является предел текучести по касательным напряжениям  $\tau_T$ , по которому определяют допускаемую величину напряжения.

В поперечных сечениях бруса действуют при кручении лишь касательные напряжения, максимальные у поверхности бруса (рис. 6.4). Поэтому условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau \leq [\tau] \quad (6.14)$$

и записывается для участка с наибольшими касательными напряжениями, у поверхности бруса круглого поперечного сечения

$$\frac{T}{I_p} \rho_{\max} \leq [\tau]. \quad (6.15)$$



В (6.15)  $\rho_{\max} = \frac{D}{2}$ , крутящий момент  $T$  берется по абсолютной величине и отношение  $\frac{I_p}{D/2}$  обозначают символом  $W_p$ , которое называют **полярным моментом сопротивления** бруса круглого сечения:

$$W_p = \frac{I_p}{D/2}. \quad (6.16)$$

Значит, поверхностные (наибольшие на участке) касательные напряжения определяются формулой

$$\tau = \frac{T}{W_p}. \quad (6.17)$$

Отсюда видим, что чем больший  $W_p$  имеет сечение, тем меньшие напряжения возникают у поверхности бруса.

Значения полярного момента сопротивления для сплошного ( $W_{p(\text{сплош})}$ ) и кольцевого ( $W_{p(\text{кольц})}$ ) сечений равны соответственно

$$W_{p(\text{сплош})} = \frac{D^4 \pi / 32}{D/2} = \frac{\pi}{16} D^3 \approx 0,2 D^3, \quad (6.18)$$

$$W_{p(\text{кольц})} = \frac{D^4 (1 - C^4) \pi / 32}{D/2} = \frac{\pi}{16} D^3 (1 - C^4) \approx 0,2 D^3 (1 - C^4),$$

где, как и ранее,  $C = d/D$ . Для сплошных сечений  $d = 0$ , поэтому  $C = 0$ .

Окончательно условие прочности при кручении принимает вид

$$\frac{T}{W_p} \leq [\tau]. \quad (6.19)$$

Если раскрыть параметр  $W_p$ , то в общем случае (для сплошного и кольцевого сечений) из условия прочности (6.19) получают формулу для определения допускаемого наименьшего диаметра по условию прочности (поэтому обозначено  $D = D_\tau$ ):

$$[D]_\tau = \sqrt[3]{\frac{T}{0,2(1 - C^4)[\tau]}}. \quad (6.20)$$



Если проводят оба расчета на жесткость и прочность, то окончательно выбирают  $[D]$  по условию

$$[D] = \max\{[D]_0; [D]_r\} \quad (6.21)$$

и округляют до ближайшего значения по нормальному ряду линейных размеров.

### 6.5. РАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

При растяжении–сжатии материал по всему сечению нагружен одинаково, а при кручении — неравномерно: в центре он недогружен (рис. 6.4). Именно это обстоятельство привело к тому, что в условии прочности геометрической характеристикой сечения оказалась не площадь, а полярный момент сопротивления по (6.19), величина которого зависит от вида поперечного сечения. Для экономного расходования материала на деталь желательнее иметь такой вид ее сечения, при котором весь материал нагружен примерно одинаково. В кольцевом сечении разница между наибольшими и наименьшими напряжениями тем меньше, чем тоньше кольцо. Поэтому кольцевые сечения являются при кручении рациональными. Под **рациональностью сечения** будем подразумевать способность детали обеспечивать прочность меньшей площадью поперечного сечения либо выдерживать бóльшую нагрузку при одинаковой величине площадей сравниваемых сечений.

#### Пример 6.2.

**Дано:** два бруса, нагруженные одинаковыми крутящими моментами. Первый имеет круглое поперечное сечение и диаметр  $D_1$ , второй — кольцевое и наружный диаметр  $D_2$  при  $C = 0,8$  (см. рис. 6.5). Площади поперечных сечений обоих брусьев одинаковы:  $A_1 = A_2 = A$ .

**Требуется:** найти, во сколько раз при заданных условиях максимальные касательные напряжения в бруссе со сплошным поперечным сечением  $\tau_{1\max}$  оказываются больше максимальных касательных напряжений  $\tau_{2\max}$  в бруссе с кольцевым сечением.

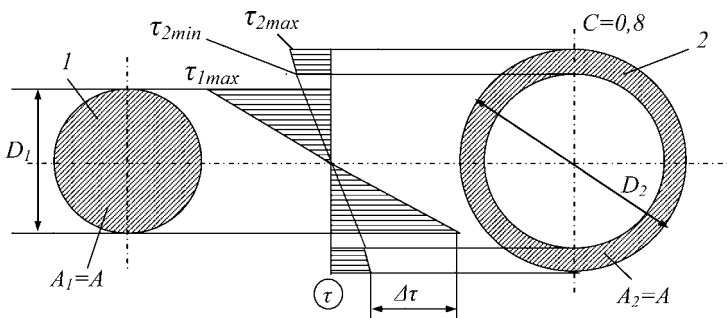


Рис. 6.5

Сравнительная схема примера 6.2  
максимальных напряжений в брусках равных площадей  
поперечных сечений сплошного круглого и кольцевого

**Решение.** Площади обоих сечений определяются формулами

$$A_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2; \quad A_2 = \frac{\pi}{4} D_2^2 (1 - C^2).$$

Значит, с учетом условия примера  $A_1 = A_2 = A$

$$D_1 = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}; \quad D_2 = \sqrt{\frac{4A}{\pi(1-C^2)}} = D_1 \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}.$$

Далее с учетом (6.17) и (6.18), одинаковых крутящих моментов и полученных формул  $D_1$  и  $D_2$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{1\max}}{\tau_{2\max}} &= \frac{W_{p2}}{W_{p1}} = \frac{0,2D_2^3(1-C^4)}{0,2D_1^3} = \frac{1-C^4}{(1-C^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{1+C^2}{(1-C^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+0,8^2}{(1-0,8^2)^{\frac{1}{2}}} = 2,73. \end{aligned}$$

Значит, при равных площадях максимальные касательные напряжения  $\tau_{1\max}$  в бруске со сплошным поперечным сечением оказались больше в 2,73 раза максимальных касательных напряжений  $\tau_{2\max}$  в бруске с кольцевым сечением, имеющим  $C = 0,8$ . Этот эффект возникает из-за весьма неравномерной деформации при кручении бруска со сплошным круглым поперечным сечением: по оси  $z$  угол сдвига  $\gamma = 0$  и линейно возрастает до  $\gamma_{\max}$  на поверхности

бруса, поскольку  $\tau = G\gamma$  (6.2). Напряжения во всем кольцевом сечении примерно одинаковы. Поэтому весь материал кольцевого сечения нагружен и оказывает сопротивление примерно одинаково. Напряжения в центральной части сплошного круглого сечения близки к нулю. Поэтому эта часть круглого сечения недогружена и все сечение может сопротивляться существенно меньшему крутящему моменту. Поэтому кольцевые сечения предпочтительнее, рациональнее при кручении.

## 6.6. УГЛОВЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Относительный угол закручивания определяется формулами (6.3) и (6.7). Приравнивая их правые части и интегрируя, получаем формулу угла закручивания участка бруса круглого постоянного поперечного сечения

$$\Delta\varphi = \int_0^z \frac{T}{GI_p} dz = \frac{T}{GI_p} z = \theta z, \quad (6.22)$$

где произведение  $GI_p$  называется **жесткостью при кручении**.

В этом случае функция  $\Delta\varphi$  — прямая наклонная линия, поскольку степень при  $z$  равна единице.

В общем случае сечение начала  $i$ -го участка поворачивается на угол поворота сечения конца предыдущего ( $i - 1$ )-го участка, т. е. на  $\varphi_{i-1}$ . Поэтому конечное сечение  $i$ -го участка поворачивается на угол

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \Delta\varphi_i = \varphi_{i-1} + \frac{T_i}{G_i I_{Pi}} l_i = \varphi_{i-1} + \theta_i l_i. \quad (6.23)$$

### Пример 6.3.

**Дано:** брус круглого поперечного сечения (рис. 6.6). Брус выполнен из стали, имеющей  $\sigma_T = 300$  МПа. Коэффициент запаса прочности принят  $n_T = 1,5$ . Со стороны верхней заделки вдоль оси в брусе высверлен канал диаметром  $1,5d$  и длиной  $2l$ . Также даны  $T_e = 100$  Нм,  $l = 0,3$  м,  $[\theta] = 0,5$  град/м.

**Требуется:** определить диаметр  $[d]$  с точки зрения прочности и жесткости. Найти максимальный угол поворота бруса.



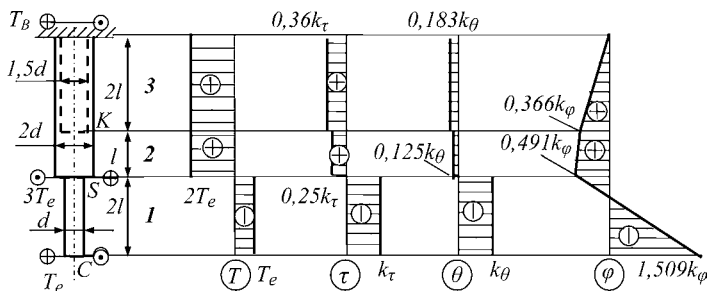


Рис. 6.6  
Расчетная схема и эпюры к примеру 6.3

*Решение.* В общем случае в заделке  $B$  возникает крутящий момент  $T_B$ , который определится при построении эпюры  $T$ . Брус имеет три участка, которые обозначены на рис. 6.6 цифрами 1, 2 и 3.

1. Определяем методом сечений крутящие моменты по всем трем участкам и строим эпюру  $T$ :

$$\begin{aligned} T_1 &= -T_e, \\ T_2 &= -T_e + 3T_e = 2T_e, \\ T_3 &= -T_e + 3T_e = 2T_e. \end{aligned}$$

Таким образом, момент в заделке оказался равным

$$T_B = T_3 = 2T_e.$$

2. Определяем по (6.17) и (6.18) максимальные (у поверхности сечений) касательные напряжения по участкам и строим эпюру  $\tau_i$ :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{T_1}{W_{p1}} = \frac{-T_e}{0,2d^3}, \\ \tau_2 &= \frac{T_2}{W_{p2}} = \frac{2T_e}{0,2(2d)^3} = 0,25 \frac{T_e}{0,2d^3}, \\ \tau_3 &= \frac{T_3}{W_{p3}} = \frac{2T_e}{0,2(2d)^3 [1 - (1,5/2)^4]} = 0,366 \frac{T_e}{0,2d^3}. \end{aligned}$$

На эпюре коэффициент  $k_\tau = T_e/(0,2d^3)$  имеет размерность Па.

3. Проводим расчет на прочность по (6.20) для первого участка, где действуют наибольшие  $\tau$  (без учета знака):

$$\frac{T_e}{0,2d^3} \leq [\tau],$$

откуда с учетом (4.7)  $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = \frac{\sigma_T / n_T}{2}$  получаем величину допускаемого диаметра по условию прочности, на что указывает подстрочный индекс  $\tau$ ,

$$[d]_{\tau} = \sqrt[3]{\frac{2T_e n_T}{0,2\sigma_T}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 100 \cdot 1,5}{0,2 \cdot 300 \cdot 10^6}} = 0,0171 \text{ м} = 17,1 \text{ мм}.$$

4. Определяем относительные углы закручивания по участкам  $\theta_i$  по (6.7) и строим их эпюру:

$$\theta_1 = \frac{T_1}{GI_{p1}} = \frac{-T_e}{G \cdot 0,1d^4},$$

$$\theta_2 = \frac{T_2}{GI_{p2}} = \frac{2T_e}{G \cdot 0,1(2d)^4} = 0,125 \frac{T_e}{G \cdot 0,1d^4},$$

$$\theta_3 = \frac{T_3}{GI_{p3}} = \frac{2T_e}{G \cdot 0,1(2d)^4 [1 - (1,5/2)^4]} = 0,183 \frac{T_e}{G \cdot 0,1d^4}.$$

На эпюре коэффициент  $k_{\theta} = T_e / (G0,1d^4)$  имеет размерность рад/м.

5. Проводим расчет на жесткость по (6.12) для первого участка, где наибольшие  $\theta$  (без учета знака)

$$\frac{T_e}{G0,1d^4} \leq [\theta] \frac{\pi}{180},$$

откуда с учетом  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа для стали величина допускаемого диаметра по условию жесткости (6.13) составляет

$$[d]_{\theta} = \sqrt[4]{\frac{180T_e}{G0,1[\theta]\pi}} = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 100}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,5\pi}} = 0,0346 \text{ м} = 34,6 \text{ мм}.$$

Здесь величина допускаемого диаметра обозначена подстрочным индексом  $\theta$ .

6. Выбираем из двух методик расчетов величину допускаемого диаметра, удовлетворяющую обоим условиям (расчетам), т. е. наибольшую величину



$$[d] = \max\{[d]_{\tau}; [d]_{\theta} = \max\{17, 1; 34, 6\} = 34,6 \text{ мм} \approx 35 \text{ мм}.$$

7. Определяем углы поворота границ участков  $\varphi_i$  по (6.23) с учетом (6.22) и строим эпюру  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \varphi_B &= 0, \\ \varphi_K &= \Delta\varphi_3 = \theta_3 l_3 = 0,183 \frac{T_e}{G \cdot 0,1d^4} 2l = 0,366 \frac{T_e l}{G \cdot 0,1d^4}, \\ \varphi_S &= \varphi_K + \Delta\varphi_2 = \varphi_K + \theta_2 l_2 = \\ &= 0,366 \frac{T_e l}{G \cdot 0,1d^4} + 0,125 \frac{T_e}{G \cdot 0,1d^4} l = 0,491 \frac{T_e l}{G \cdot 0,1d^4}, \\ \varphi_C &= \varphi_S + \Delta\varphi_1 = \varphi_S + \theta_1 l_1 = \\ &= 0,491 \frac{T_e l}{G \cdot 0,1d^4} + \frac{-T_e}{G \cdot 0,1d^4} 2l = -1,509 \frac{T_e l}{G \cdot 0,1d^4}. \end{aligned}$$

На эпюре коэффициент  $k_{\varphi} = T_e l / (G 0,1d^4)$  имеет размерность рад.

8. Вычисляем величину максимального угла поворота сечения бруса — угол поворота в сечении С:

$$\begin{aligned} \varphi_C &= 1,509 \frac{T_e l}{G \cdot 0,1[d]^4} = 1,509 \frac{100 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,035^4} = \\ &= 0,00377 \text{ рад} \approx 0,22 \text{ град}. \end{aligned}$$

## 6.7. РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЗАДАЧ ПРИ КРУЧЕНИИ

Методика расчета статически неопределимых задач при кручении полностью идентична методике расчета статически неопределимых задач при растяжении–сжатии. Объяснение методики расчета статически неопределимого бруса при кручении удобно провести на конкретном примере.

Дан брус по рис. 6.7а. В верхней и нижней заделках на брус действуют неизвестные реактивные моменты. Для определения этих двух моментов имеем лишь одно уравнение статики: сумму моментов вокруг оси  $z$  бруса. Значит, задача один раз статически неопределима.

Последовательность решения состоит из следующих действий.





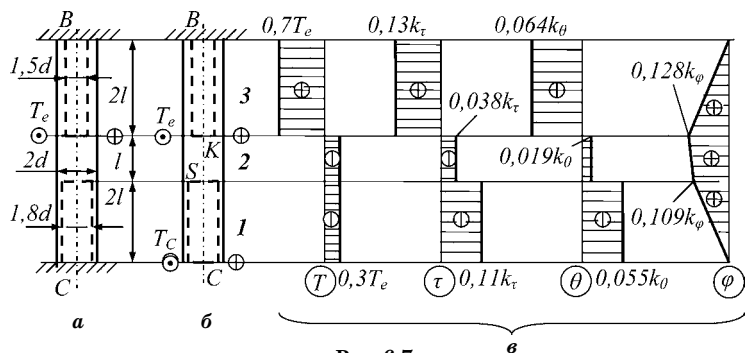


Рис. 6.7

Результаты решения статически неопределимого бруса при кручении

1. Определяем степень статической неопределимости. Как выяснили, у нас она равна единице.
2. Мысленно отбрасываем внешнюю нагрузку и одну (лишнюю) связь (пусть это будет нижняя опора), в результате чего получаем основную систему.

3. Дополняем основную систему заданной нагрузкой и реакцией отброшенной связи (направление момента  $T_c$  выбирается произвольно), в результате чего получаем эквивалентную систему с тремя участками, обозначенными на рис. 6.7б цифрами 1, 2, 3.

Всю остальную часть задачи приводим для эквивалентной системы.

4. Рассматриваем статическую сторону задачи: полагая якобы известным момент  $T_c$ , записываем на основании уравнений статики внутренние силовые факторы — крутящие моменты  $T_i$  — по участкам:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_c, \\ T_2 &= T_c, \\ T_3 &= T_c + T_e. \end{aligned} \tag{6.24}$$

5. Рассматриваем геометрическую сторону задачи: на основании обязательного равенства нулю угла поворота в сечении отброшенной заделки составляем условие совместности перемещений элементов системы

$$\varphi_c = 0. \tag{6.25}$$



6. При этом поворот в сечении  $C$  обусловлен закручиванием бруса на каждом из всех трех участков. Значит, (6.25) может быть представлено как

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 = 0. \quad (6.26)$$

7. Рассматриваем физическую сторону задачи: записываем формулы удлинений участков по (6.22)

$$\Delta\varphi_i = \frac{T_i l_i}{GI_{Pi}}. \quad (6.27)$$

8. Проводим синтез: решаем систему уравнений (6.24), (6.26) и (6.27), откуда находим неизвестные реакции.

Подставим (6.24) в (6.27) и полученные выражения в (6.26). В результате получим

$$\frac{T_C 2l}{G0,1(2d)^4 [1 - (1,8/2)^4]} + \frac{T_C l}{G0,1(2d)^4} + \frac{(T_C + T_e) 2l}{G0,1(2d)^4 [1 - (1,5/2)^4]} = 0,$$

откуда

$$T_C = -0,300T_e.$$

Знак «минус» указывает на противоположное направление реактивного момента  $T_C$ . Для достижения необходимой точности в промежуточных вычислениях следует учитывать три первые значащие цифры результата. В нашем случае они оказались двумя нулями. Окончательный ответ записывается с первыми двумя значащими цифрами, что соответствует точности в пределах  $\pm 5\%$ .

Теперь задача превратилась в статически определенную: брус с одной верхней заделкой нагружен двумя известными внешними моментами  $T_e$  и  $T_C = -0,300T_e$ . Его последующее решение аналогично решению примера 6.2 и результаты показаны без вычислений эпюрами на рис. 6.7в. Коэффициенты  $k_\tau$ ,  $k_\theta$ ,  $k_\varphi$  являются размерностями соответствующих параметров.

Обратим внимание на то, что для бруса, имеющего заделки с обоих концов, эпюра углов поворота должна начинаться и оканчиваться в нулевых точках и не иметь разрывов.

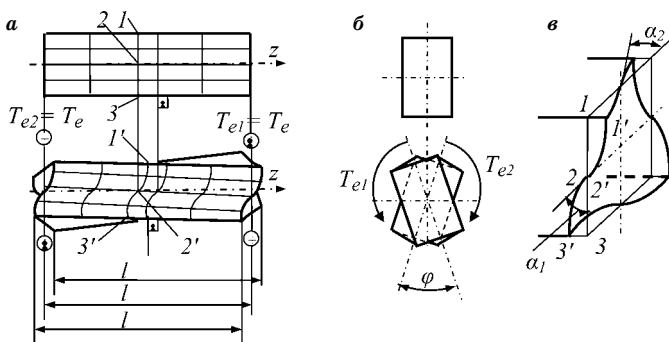
## 6.8. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КРУЧЕНИИ ПРЯМЫХ БРУСЬЕВ НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

### 6.8.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

При нагружении бруса с некруглым поперечным сечением гипотеза плоских сечений не выполняется. Поперечные сечения, бывшие плоскими до нагружения, становятся после нагружения пространственными — как говорят, депланируют (рис. 6.8).

Если брус имеет неизменное некруглое поперечное сечение, не стеснен опорами и потому может свободно поворачиваться вокруг оси  $z$  (рис. 6.8*a*), то депланация постоянна по его длине. Такое кручение называют **свободным**.

На рис. 6.8*a* искривленность поперечных линий, нанесенных по поверхности бруса, одинакова по длине. Значит, длина бруса  $l$  не изменилась и нормальные напряжения в поперечных сечениях равны нулю. Перекос поперечных линий, вызываемый касательными напряжениями, максимален в середине сторон и равен нулю у ребер. Значит, и касательные напряжения максимальны в середине сторон, а у ребер равны нулю. Поскольку по оси  $z$  (геометрическое место центров тяжести поперечных сечений) деформация сдвига отсутствует, то здесь касательные напряжения должны быть равны нулю.



**Рис. 6.8**

Экспериментальное обоснование исходных положений при рассмотрении свободного кручения бруса прямоугольного сечения

При стесненном (несвободном) кручении деформация (искривление) бруса с некруглым поперечным сечением переменна по его длине. Примером стесненного кручения является брус, консольно закрепленный в заделке. Искривленность поперечных линий на его поверхности означает деформацию поперечных сечений, которая возрастает от заделки, где она равна нулю, к свободному краю. Значит, длина бруса становится переменной и, следовательно, в поперечном сечении действуют, кроме касательных напряжений, неодинаковые по его площади нормальные напряжения. Стесненное кручение также возникает в приваренных по торцам друг к другу брусках с разными поперечными сечениями.

### 6.8.2. СВОБОДНОЕ КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Пусть имеется брус прямоугольного поперечного сечения, подвергаемый свободному кручению моментом  $T_e$  (рис. 6.9). В его поперечных сечениях  $A$  возникнут касательные напряжения. Рассмотрим их направление у контура сечения (поверхностей  $B$  и  $C$ ).

С этой целью мысленно вырежем кубик  $1$ . На его грани  $S$  покажем касательное напряжение, направленное под

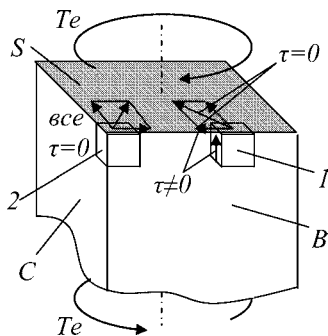


Рис. 6.9

К обоснованию характера распределения касательных напряжений у поверхности бруса

некоторым непрямым углом к поверхности  $B$ . Это напряжение можем разложить по направлению нормали и касательной к  $B$ . Напряжение по нормали должно по закону парности сопровождаться наличием  $\tau$  на грани  $B$  кубика. Однако эта грань является наружной, и потому она свободна от напряжений. Следовательно, и в сечении  $S$  также должно отсутствовать  $\tau$ , направленное по нормали к  $B$ . В сечении  $S$  может существо-

вать  $\tau \neq 0$  лишь по касательной к поверхности  $B$ , поскольку на грани кубика  $1$ , параллельной грани  $C$ , возможно существование  $\tau$ .

Мысленно вырежем в углу поперечного сечения (внешний угол) кубик  $2$ . На его грани  $S$  покажем касательное напряжение, направленное под непрямыми углами к поверхностям  $B$  и  $C$ . Разложим это напряжение по двум направлениям вдоль граней  $B$  и  $C$ . По граням  $B$  и  $C$  напряжения равны нулю. Значит, по закону парности и на грани  $S$  обе составляющие исходного напряжения равны нулю. Значит, во внешнем углу поперечного сечения бруса на грани  $S$  касательное напряжение полностью отсутствует.

Таким образом, направление касательных напряжений у поверхности может быть только по касательной к этой поверхности, а у внешних углов касательное напряжение равно нулю.

Функцию изменения величины касательных напряжений в брус с некруглым поперечным сечением нельзя аналитически вычислить методами курса «Сопротивление материалов». Общий вид их распределения согласуется со сказанным выше и показан на рис. 6.10. В объеме курса вычисляются по формулам с табличными коэффициентами лишь наибольшие поверхностные напряжения  $\tau_{\max}$  и угол закручивания бруса  $\Delta\varphi$ .

Наибольшие касательные напряжения располагаются у поверхности посередине длинной стороны и равны

$$\tau_{\max}^{\text{дл}} = \frac{T}{W_{\text{к}}}. \quad (6.28)$$

Здесь знаменатель представляет собой момент сопротивления при кручении брусьев некруглого поперечного сечения  $W_{\text{к}}$ . Для прямоугольного сечения он равен

$$W_{\text{к}} = \alpha hb^2. \quad (6.29)$$

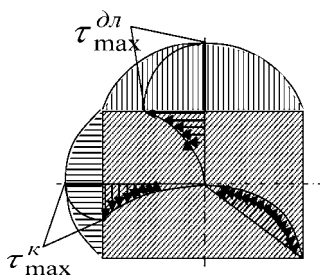


Рис. 6.10  
Общий вид распределения касательных напряжений в сечении бруса прямоугольного сечения

Таблица 6.1

**Значения коэффициентов для определения  
параметров свободного кручения**

$h/b$	1	1,5	2	3	4	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,307	0,313	$0,333 = 1/3$
$\beta$	0,141	0,196	0,229	0,263	0,282	0,307	0,313	$0,333 = 1/3$
$\gamma$	1,00	0,859	0,795	0,753	0,745	0,742	0,742	0,742

Угол закручивания бруса длиной  $l$  равен

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_k}, \quad (6.30)$$

где в знаменателе имеется полярный момент инерции при кручении брусьев некруглого поперечного сечения

$$I_k = \beta hb^3. \quad (6.31)$$

Наибольшие касательные напряжения посредине короткой стороны определяются формулой

$$\tau_{\max}^k = \gamma \tau_{\max}^{дл}. \quad (6.32)$$

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  зависят от соотношения  $h/b$ . Они представлены в табл. 6.1.

**6.8.3.  
СВОБОДНОЕ КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ  
С ТОНКОСТЕННЫМ ПРОФИЛЕМ  
ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

Проведем опыт. Лист бумаги свернем в спираль в виде трубы. Прикладывая к этой трубе скручивающие моменты и позволяя скользить слоям листа бумаги друг относительно друга, получим значительные углы поворота ее краев. При этом слои бумаги будут скользить друг относительно друга вокруг и вдоль оси  $z$  трубы — происходит депланация поперечного сечения. Теперь приклеим внутренний и наружный края бумаги, свернутой в трубу, к смежным с ними поверхностям и вновь нагрузим прежними скручивающими моментами — угол закручивания будет незаметен. В первом случае сечение было тонкостенным открытым, во втором — замкнутым кольцевым. Хотя его площадь оставалась неизменной, труба с открытым



профилем оказалась значительно более податливой к деформациям.

Из табл. 6.1 следует то, что на величину напряжений влияет толщина стенки профиля поперечного сечения. Так, при отношении  $h/b \geq 10$  коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  становятся постоянными и равными:

$$\alpha = \beta = 1/3. \quad (6.33)$$

Значит, формулы (6.29) и (6.31) будут иметь вид

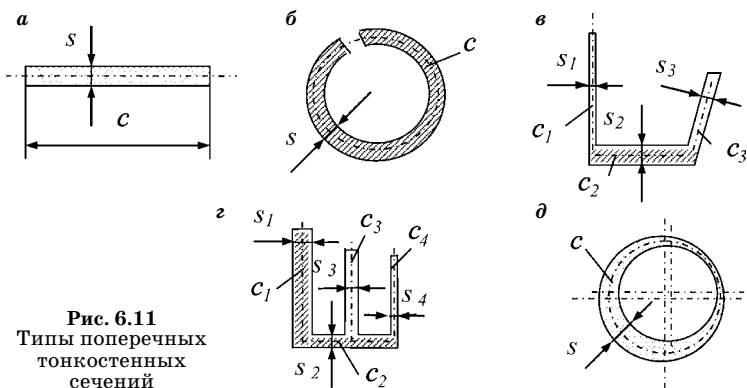
$$W_k = hb^2/3. \quad (6.34)$$

$$I_k = hb^3/3. \quad (6.35)$$

В связи с этим различают толстостенные и тонкостенные профили. **Тонкостенным** называют профиль, у которого отношение длины элемента стенки поперечного сечения к ее толщине равно и более 10. Поскольку к тонкостенным относятся также брусья с изогнутым поперечным сечением, то обозначения высоты ( $h$ ) и ширины ( $b$ ) сечения заменим в этих случаях на более логичные — длину ( $c$ ) и толщину ( $s$ ) стенки сечения, в которых  $c_i \gg s_i$ .

Тонкостенные профили могут быть разомкнутыми (открытыми) (рис. 6.11а–з) и замкнутыми (закрытыми) (рис. 6.11д), одноэлементными (простыми) (рис. 6.11а, б) и многоэлементными (составными) (рис. 6.11в, з).

Строго говоря, в составных сечениях не обеспечивается чистое свободное кручение, поскольку стыковка краев



**Рис. 6.11**  
Типы поперечных тонкостенных сечений



элементов оказывает некоторое сопротивление свободной деформации. Однако для тонкостенных составных сечений вносимая этим погрешность достаточно мала, и расчет брусков с такими профилями по типу свободного кручения допустим.

Будем рассматривать бруска длиной  $l$  с открытым поперечным сечением, составленным из нескольких тонкостенных элементов с различающимися длинами стенок  $c_i$  и толщинами  $s_i$  (например, по рис. 6.11з). Введем допущения с учетом того, что длина бруса много больше его поперечных размеров ( $l \gg c_i \gg s_i$ ) в каждом  $i$ -м элементе:

- каждый элемент поворачивается на одинаковый угол  $\varphi_i$ , равный общему углу закручивания бруса  $\varphi$ ;
- каждый элемент поворачивается вокруг собственной центральной оси  $z_i$ , поэтому можно пренебречь изгибом;
- повышенная жесткость в местах стыковки элементов сечения несущественна;
- каждый элемент несет часть от общего крутящего момента  $T_i$ .

В результате получаем формулу

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_{\kappa}} \delta_{\max} = \frac{3T}{\sum_{i=1}^n c \cdot s_i^3} s_{\max}, \quad (6.36)$$

где  $n$  — количество тонкостенных элементов, составляющих профиль.

Отсюда следует, что наибольшие касательные напряжения действуют у поверхности середины стороны **наиболее толстого элемента** сечения.

Угол поворота определяют по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{T \cdot l}{GI_{\kappa}} = \frac{3T \cdot l}{G \sum_{i=1}^n c \cdot s_i^3}. \quad (6.37)$$

Иногда вводят коэффициенты, учитывающие повышенные жесткости бруса в местах стыковки элементов сечения.

Совсем иначе происходит изменение напряжений в брусках с тонкостенным замкнутым профилем. Основное отличие заключается в том, что в брусках с закрытым про-

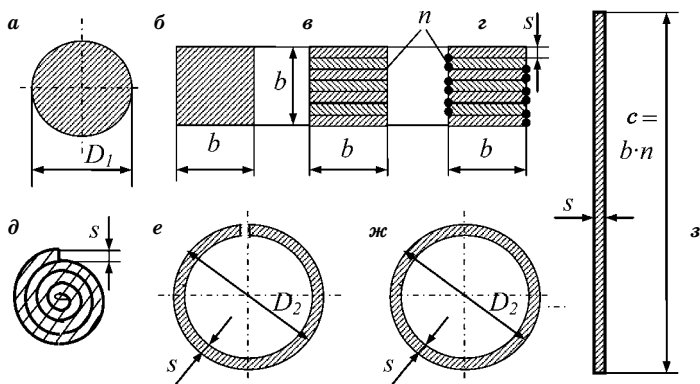


филем поперечного тонкостенного сечения касательные напряжения оказываются наибольшими в самой тонкой части стенки сечения.

Для наглядности полученного результата рассмотрим сравнительный пример, составленный, по сути, из семи самостоятельных задач.

**Пример 6.4.**

**Д а н о.** Семь стальных стержней одинаковой длины  $l$  с различающейся конфигурацией поперечных сечений (рис. 6.12). Они находятся в условиях свободного кручения. Площади всех поперечных сечений одинаковы  $A_i = A$  и отношение ширины тонкостенных элементов к их толщине  $n = 10$ . Трением касающихся друг друга поверхностей элементов можно пренебречь.



**Рис. 6.12**  
Типы поперечных сечений в примере 6.4

Варианты сечений равных площадей по рис. 6.10:

- *a* — круглое;
- *б* — квадратное цельное;
- *в* — квадратное, составленное из  $n = 10$  параллельных не скрепленных между собой пластин толщиной  $s = b/n = 0,1b$ ;
- *г* — квадратное, составленное из  $n$  параллельных и последовательно сваренных короткими сторонами смежных пластин толщиной  $s = b/n = 0,1b$  (сварка условно показана короткой утолщенной точкой);



- $\partial$  — свободно свернутый в спираль лист толщиной  $s = b/n = 0,1b$  и длиной спирали (длина полосы)  $c = bn = 10b$ ;
- $e$  и  $ж$  — соответственно разрезное и сплошное кольцевые толщиной  $s = b/n = 0,1b$  и наружным диаметром  $D_2$ ;
- $з$  — полоса толщиной  $s = b/n = 0,1b$  и длиной стенки  $c = bn = 10b$ .

**Т р е б у е т с я:** определить возникающие в стержнях  $\tau_{\max}$  и  $\varphi$ .

**Решение.** Для круглого сечения бруса площадью  $A = b^2$  (рис. 6.12а) имеем площадь круга диаметром  $D_1$ :

$$A = \frac{\pi}{4} D_1^2.$$

Отсюда, приравнивая две площади, получим

$$D_1 = \frac{2b}{\sqrt{\pi}} = 1,128b.$$

Тогда по (6.16) и (6.17)

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_P} = \frac{T}{0,2D_1^3} = \frac{T}{0,2(1,128b)^3} = 3,48 \frac{T}{b^3},$$

а по (6.7) и (6.22)

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_P} = \frac{T \cdot l}{G \cdot 0,1D_1^4} = \frac{T \cdot l}{G \cdot 0,1(1,128b)^4} = 6,18 \frac{T \cdot l}{G \cdot b^4}.$$

Для цельного квадратного сечения (рис. 6.12б) имеем максимальные касательные напряжения посередине его сторон. Поскольку  $h/b = b/b = 1$ , то по таблице 6.1 имеем  $\alpha = 0,208$  и  $\beta = 0,141$ . Тогда по (6.28) и (6.29)

$$\tau_{\max} = \frac{T_e}{\alpha h b^2} = \frac{T_e}{0,208 \cdot b^3} = 4,81 \frac{T_e}{b^3},$$

а по (6.30) и (6.31)

$$\varphi = \frac{Tl}{G\beta h b^3} = \frac{T_e l}{G 0,141 b^4} = 7,09 \frac{T_e l}{G b^4}.$$

Для бруса квадратного сечения, сложенного из  $n$  параллельных свободно сложенных одинаковых тонкостенных пластин, имеем  $s = b/n$  и  $h = b$  (рис. 6.12в). Считаем,

что сопротивление внешнему моменту одинаково распространено на все пластины. Значит, каждая пластина воспринимает  $n$ -ю долю внешнего момента, т. е. в ней возникает крутящий момент  $T_1 = T_e/n = 0,1T_e$ . Значит, в этом сечении по (6.36) посредине каждого элемента действуют

$$\tau_{\max} = \frac{3T_1}{b \cdot s^2} = \frac{3T_e/n}{b \cdot (b/n)^2} = 30 \frac{T_e}{b^3},$$

и по (6.37) брус закручивается на угол

$$\varphi_i = \frac{3T_1}{b \cdot s^3} = \frac{3T_e/n}{b \cdot (b/n)^3} = 300 \frac{T_e}{b^3}.$$

Если смежные тонкостенные пластины в таком квадратном сечении последовательно сварены по короткой стороне (рис. 6.12*з*), то это сечение из  $n = 10$  одинаковых элементов рассматривается как цельное, имеющее  $c = bn$  и  $s = b/n$ . Тогда по (6.36)

$$\tau_{\max} = \frac{3T_e}{\sum_{i=1}^n b \cdot s^3} s = \frac{3T_e}{\sum_{i=1}^n b(b/n)^3} \frac{b}{n} = 3n \frac{T_e}{b^3} = 30 \frac{T_e}{b^3},$$

и по (6.37)

$$\varphi = \frac{3T_e l}{G \sum_{i=1}^n b \cdot s^3} = \frac{3T_e l}{G \sum_{i=1}^n b(b/n)^3} = 3n^2 \frac{T_e l}{G b^4} = 300 \frac{T_e l}{G b^4}.$$

Сечения по рис. 6.12*д*, *е*, *з* дадут идентичные результаты, поскольку у них одинаковые толщина  $s = b/n$  и  $c = bn$ . С учетом того, что  $n = 10$ , имеем по (6.28) и (6.29)

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{c \cdot s^2} = \frac{3T}{b \cdot n(b/n)^2} = 3n \frac{T}{b^3} = 30 \frac{T}{b^3},$$

а по (6.30) и (6.31)

$$\varphi_i = \frac{3T \cdot l}{G \cdot c \cdot s^3} = \frac{3T \cdot l}{G \cdot b \cdot n(b/n)^3} = 3n^2 \frac{T \cdot l}{G \cdot b^4} = 300 \frac{T \cdot l}{G \cdot b^4}.$$

Действительно, эти результаты совпадают с полученными для сечений по рис. 6.12*в*, *г*.

Определение напряжений и угла поворота бруса с поперечным сечением в виде тонкостенного кольца без разреза (рис. 6.12*ж*).



Брус с таким сечением будем рассматривать как обычный кольцевого профиля, толщина которого  $s = b/n$ . Наружный диаметр этого кольца определим по заданной неизменяемой площади  $A$ . Его площадь связана с диаметром и толщиной соотношением

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4} D^2 (1 - C^2) = \frac{\pi}{4} D_2^2 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D_2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{\pi}{4} D_2^2 \left[ 1 - \left( \frac{D_2 - 2s}{D_2} \right)^2 \right] = \pi \cdot s (D_2 - s). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом  $A = b^2$ ,  $s = b/n$ , а также того, что по условию  $n = 10$ , имеем

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{A}{\pi \cdot s} + s = b \left( \frac{n}{\pi} + \frac{1}{n} \right) = 3,28 \cdot b, \\ C &= \frac{d}{D_2} = \frac{D_2 - 2s}{D_2} = 1 - 2 \frac{s}{D_2} = 1 - 2 \frac{b/n}{3,28b} = 0,939. \end{aligned}$$

С учетом полученных значений  $C$  и  $D_2$ , а также формул по (6.16) и (6.17)

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{T}{W_P} = \frac{T}{0,2 D_2^3 (1 - C^4)} = \frac{T}{0,2 (3,28b)^3 [1 - (0,939)^4]} = \\ &= 0,635 \frac{T}{b^3}, \end{aligned}$$

по (6.7), (6.9) и (6.22)

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{T \cdot l}{G \cdot I_P} = \frac{T \cdot l}{G \cdot 0,1 D_2^4 (1 - C^4)} = \frac{T \cdot l}{G \cdot 0,1 (3,28b)^4 (1 - 0,939^4)} = \\ &= 0,388 \frac{T \cdot l}{G \cdot b^4}. \end{aligned}$$

Результаты расчета сведены в таблицу 6.2.

Таблица 6.2

Результаты расчета

Вид сечения	$a$	$b$	$v$	$z$	$\delta$	$e$	$\mu$	$z$
Коэффициент при $\tau$	3,48	4,81	30	30	30	30	0,635	30
Коэффициент при $\phi$	6,18	7,09	300	300	300	300	0,388	300

Как видим, результаты расчета полностью соответствуют опыту, описанному в начале раздела. Наиболее прочным и жестким (по углу закручивания) оказывается тонкостенный брус кольцевого поперечного сечения. При  $C = 0,939$ , что соответствует  $n = 10$ , его прочность и жесткость оказываются больше по сравнению с брусом круглого поперечного сечения соответственно в  $3,48/0,635 = 5,48$  и  $6,18/0,388 = 15,9$  раза. По сравнению с брусом квадратного поперечного сечения это увеличение составит соответственно 7,58 и 18,3 раза, и по сравнению с остальными сечениями — 47,2 и 775 раз соответственно. После изучения раздела предположение о том, что кольцевое сечение окажется рациональнее, было очевидным. Однако полученные в примере количественные соотношения являются впечатляющими. Кроме того, интересен факт одинакового сопротивления кручению брусьев по рис 6.12*в-е*, з. Это означает, что такие сочетания элементов в составном открытом сечении прямолинейного бруса равноценны с точки зрения прочности и угла закручивания.

### 6.9. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИНТОВЫХ ПРУЖИН С МАЛЫМ ШАГОМ ВИТКА

Винтовые цилиндрические пружины различаются конструкционно в зависимости от того, для какого вида работы они выполнены: либо на растяжение, либо на сжатие, либо на кручение. Чаще всего они имеют малый шаг с углом наклона витков меньше  $5^\circ$ . Ориентировочно по 0,7...0,8 витка с каждого конца в пружинах сжатия делают со скосом для опирания о плоскую поверхность подпружиненной детали. Поэтому 1,5 витка пружины сжатия считают нерабочими. Для пружин растяжения отогнутая часть витков (примерно те же 1,5 витка) также не учитывается.

На рис. 6.13*а* изображена винтовая цилиндрическая пружина растяжения, в которой  $d$  — диаметр прутка пружины,  $D$  — средний диаметр пружины,  $n$  — количество рабочих витков. Определим напряжения в пружине при ее нагружении осевой силой.

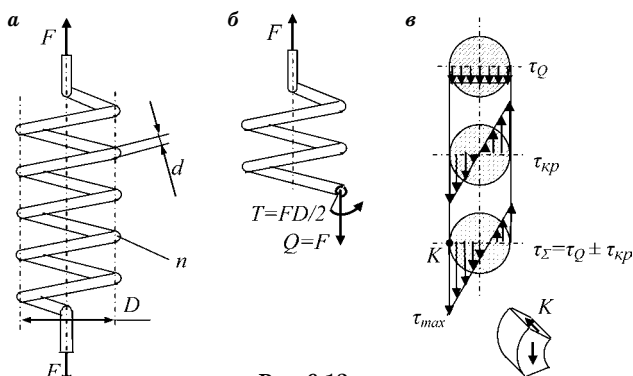


Рис. 6.13

Расчетные схемы для цилиндрических винтовых пружин с малым шагом витка

Для этого мысленно разрежем пруток осевой плоскостью и рассмотрим равновесие верхней части пружины (рис. 6.13б). Уравновешивают эту часть пружины действующие в поперечном сечении витка внутренние силовые факторы: поперечная сила и крутящий момент

$$\begin{aligned} Q &= F, \\ T &= FD/2. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Поперечная сила образована касательными напряжениями, обозначенными как  $\tau_Q$ , которые принимают постоянными в сечении (рис. 6.13в). Поэтому они определяются формулой

$$\tau_Q = \frac{F}{A}. \quad (6.39)$$

Поскольку действуют два внутренних силовых фактора — сдвиг и кручение — брус испытывает сложное сопротивление:

$$\tau_{кр} = \frac{T}{I_p} \rho = \frac{FD/2}{I_p} \rho, \quad (6.40)$$

где  $\rho$  — расстояние от центра прутка до окружности отыскиваемых напряжений в его сечении.

Суммарные напряжения по линии горизонтальной оси сечения будут изменяться также линейно

$$\tau_{\Sigma} = \tau_Q \pm \tau_{кр} = \frac{F}{A} \pm \frac{FD/2}{I_p} \rho. \quad (6.41)$$

Максимальные напряжения располагаются в крайней левой точке  $K$  сечения витка, т. е. при  $\rho_{\max} = d/2$ . Значит,

$$\tau_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{FD/2}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{FD/2}{W_x} \left(1 + \frac{d/D}{2}\right) = \frac{8FD}{\pi d^3} (1 + \beta), \quad (6.42)$$

поскольку  $A = (\pi/4)d^2$ ,  $I_p = (\pi/32)d^4$ ,  $W_x = (\pi/16)d^3$ , и обозначено  $\beta = d/(2D)$ .

Такие точки располагаются по всей линии, соответствующей наименьшему радиусу витков, т. е. образуют в пружине со стороны ее оси винтовую линию. Эта винтовая линия является местом начала разрушения цилиндрических пружин растяжения и сжатия.

В задачах сопротивления материалов напряжениями  $\tau_Q$  обычно пренебрегают, поскольку в (6.38)  $d \ll D$  и, значит,

$$\beta = \frac{d/D}{2} \ll 1. \quad (6.43)$$

Поэтому в расчетах на прочность учитывают только максимальные напряжения от крутящего момента

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau], \quad (6.44)$$

а поперечную силу не учитывают, вследствие чего данный вид можно условно относить к простому сопротивлению.

Механические характеристики материалов для витых пружин представлены в табл. 6.3.

Таблица 6.3

**Допускаемые касательные напряжения витых пружин**

Марка	Диаметр прутка, мм	$[\tau]$ , МПа (более высокие значения соответствуют меньшим диаметрам прутка)
60С2 и 60С2Н2А	5...42	400...750
50ХФА	5...42	400...750
4Х13	1...42	300...450
Бр. КМц 3-1	0,3...100	$(0,3...0,6)\sigma_{\text{пч}} = 780...900$
Бр. КМц 4-3	0,3...10	$(0,2...0,4)\sigma_{\text{пч}} = 780...900$



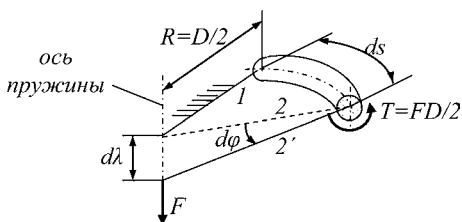


Рис. 6.14

Бесконечно малый элемент цилиндрической пружины

Наиболее распространенными материалами для пружин являются высокоуглеродистая и легированная стали, а для агрессивных сред — бронза.

Изменение длины пружины под действием продольной нагрузки называют **осадкой пружины**.

Найдем формулу осадки винтовой цилиндрической пружины. С этой целью вырежем осевыми плоскостями отрезок витка пружины длиной  $ds$  (рис. 6.14).

Представим себе, что к торцам этого элемента жестко прикреплены абсолютно жесткие штанги 1 и 2 длиной  $R = D/2$ . При этом штанга 1 жестко укреплена в пространстве (показана заделка). В ненагруженном состоянии их свободные концы сходятся на оси пружины.

Нагружение штанги 2 осевой силой  $F$  приведет к скручиванию элемента  $ds$  пружины, и по мере ее роста свободный конец штанги 2 опустится до положения 2'. При величине  $F$  крутящий момент от этой силы будет

$$T = FD/2, \quad (6.45)$$

штанга 2 повернется на угол

$$d\varphi = \frac{Tds}{GI_P}, \quad (6.46)$$

а ее конец на оси пружины опустится на величину

$$d\lambda = \frac{D}{2}d\varphi = \frac{D}{2} \frac{Tds}{GI_P}. \quad (6.47)$$

Интегрируя (6.43) по длине пружины  $l = \pi Dn$ , получим с учетом (6.41)



$$\lambda = \frac{D}{2} \frac{T}{GI_P} \int_l ds = \frac{8FD^3n}{Gd^4}. \quad (6.48)$$

Обратим внимание на то, что и в этой задаче осадка пружины по (6.48) связана линейной зависимостью с силой и пропорциональна ей:

$$\lambda = \frac{8D^3n}{Gd^4} F = KF. \quad (6.49)$$

Величину силы, необходимой для единичного изменения длины пружины:

$$c = \frac{F}{\lambda} = \frac{Gd^4}{8D^3n}, \quad (6.50)$$

называют **коэффициентом жесткости** или **жесткостью пружины**. Величину, обратную жесткости, называют **коэффициентом податливости** или **податливостью пружины**:

$$\delta = 1/c. \quad (6.51)$$

Податливость характеризует осадку пружины на единицу приложенной осевой силы (на единичную силу).

Часто требуется определить силу сопротивления деформируемой пружины  $F_{\Pi}$ . Она всегда направлена в сторону, противоположную силе, вызывающей ее деформацию ( $F_{\Pi} = -F$ ).

При этом из (6.50) и (6.51) следует

$$F_{\Pi} = -cz. \quad (6.52)$$

Отметим, что все полученные формулы и выводы относительно наиболее нагруженных внутренних точек пружины растяжения соответствуют также цилиндрическим пружинам сжатия.

Как видим, в рассмотренных пружинах выявляются два внутренних силовых фактора:  $Q$  и  $T$ . Поэтому задачу следовало бы отнести к сложному сопротивлению. Однако влиянием напряжений и формируемой ими поперечной силой  $Q$  в практических случаях пренебрегают либо ограничиваются введением поправочных коэффициентов.



**Пример 6.5.**

Д а н о. Цилиндрическая пружина сжатия, имеющая  $D = 50$  мм,  $d = 8$  мм, число рабочих витков 12, нагружена силой 20 кг. Ее материал имеет  $[\tau] = 450$  МПа и  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

Т р е б у е т с я: сравнить возникающие в ней максимальные напряжения с допускаемыми, определить величину осадки и жесткость пружины.

Решение. По (6.38)

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{8 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{\pi(8 \cdot 10^{-3})^3} \left(1 + \frac{8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}\right) = \\ &= 0,054 \cdot 10^9 = 54 \text{ МПа} \leq [\tau] = 450 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

По (6.40) получилось бы 50 МПа.

По (6.44)

$$\lambda = \frac{8 \cdot 20 \cdot 10 \cdot (50 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 12}{8 \cdot 10^{10} \cdot (8 \cdot 10^{-3})^4} = 0,147 \text{ м}.$$

При этом жесткость пружины составляет по (6.45)  $c = 1335$  Н/м.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «КРУЧЕНИЕ»

1. Каково правило знаков при кручении?
2. Какой простой, наглядный эксперимент позволяет определить вид напряжений в поперечном сечении бруса круглого поперечного сечения?
3. В чем заключается смысл гипотезы плоских сечений при кручении бруса круглого поперечного сечения?
4. Что называется углом закручивания при кручении?
5. Какие напряжения возникают в поперечном сечении бруса круглого поперечного сечения при кручении?
6. Что называют относительным углом закручивания вала?
7. Какое выражение называют жесткостью при кручении?
8. Какой зависимостью связаны касательное напряжение в брус круглого поперечного сечения и расстояние от центра тяжести сечения?
9. Какой вид имеет условие жесткости при кручении бруса круглого поперечного сечения?



10. Какой вид имеет условие прочности при кручении бруса круглого поперечного сечения?
11. Какую геометрическую характеристику называют полярным моментом сопротивления? Чему она равна для бруса круглого сплошного и кольцевого сечений?
12. Какой вид сечения называют рациональным при кручении? Дать пояснения.
13. Как выражается угол закручивания через относительный угол закручивания?
14. Какой формулой определяется угол поворота конца  $i$ -го участка?
15. Для каких сечений брусьев выполняется гипотеза плоских сечений?
16. Какой вид при кручении имеет функция изменения  $\tau$  от  $\rho$ ?
17. Что означает понятие «депланация поперечных сечений»?
18. Какое кручение бруса называют свободным?
19. Может ли считаться свободным кручение прямолинейного консольно защемленного бруса, имеющего круглое поперечное сечение?
20. Какой профиль называют тонкостенным?
21. Как направлены касательные напряжения  $\tau$  у поверхности поперечного сечения бруса некруглого поперечного сечения при кручении?
22. В каком месте поперечного прямоугольного сечения возникают при кручении наибольшие касательные напряжения?
23. В каком месте в цилиндрической пружине растяжения располагаются наибольшие напряжения?
24. Что называют осадкой цилиндрической пружины?
25. Что называют жесткостью цилиндрической пружины?
26. Что называют податливостью цилиндрической пружины?
27. Какая из показанных на схеме эпюр углов поворота  $\varphi$  правильная (рис. 6.15)?

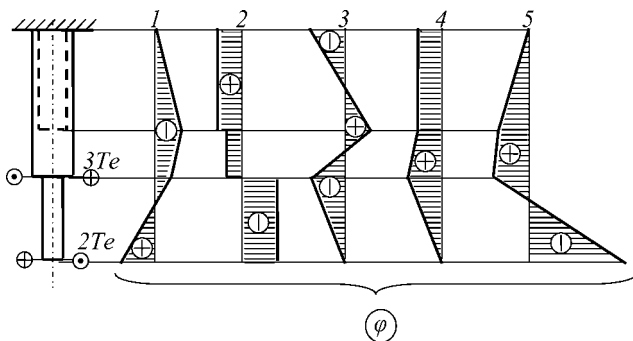


Рис. 6.15

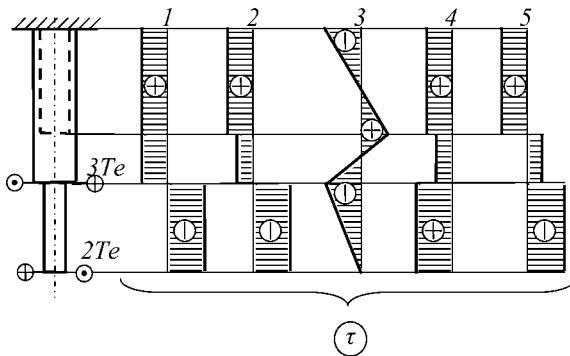


Рис. 6.16

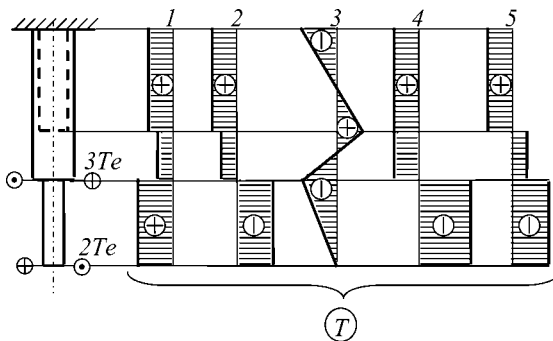


Рис. 6.17

28. Какая из показанных на схеме эпюр напряжений  $\tau$  правильная (рис. 6.16)?
29. Какая из показанных на схеме эпюр крутящих моментов  $T$  правильная (рис. 6.17)?

## ПРЯМОЙ ИЗГИБ. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

### 7.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ ИЗГИБА

Вначале выясним, какие внутренние силовые факторы выявляются при изгибе.

Рассмотрим два примера, применяя в решении метод сечений.

В заделке  $B$  консоли по рис. 7.1а возникнет реакция лишь в виде изгибающего момента, который можно определить с помощью уравнения равновесия. Для равновесия мысленно отсеченного элемента по рис. 7.1а в сечении должен действовать только изгибающий момент  $M_x$ . Значит, имеем чистый изгиб:  $M_x = M_e$ .

В заделке  $B$  консоли по рис. 7.1б возникнут реакции в виде изгибающего момента и вертикальной поперечной силы, которые можно определить с помощью уравнений равновесия. В расчетной схеме по рис. 7.1б для равновесия

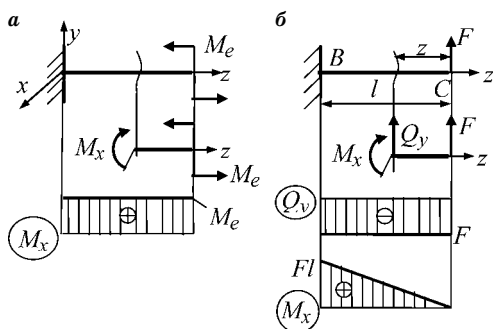


Рис. 7.1  
Внутренние силовые факторы при изгибе  
и примеры построения их эпюр

в поперечном сечении должны быть в общем случае два внутренних силовых фактора: изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $Q_y$ . Значит, имеем поперечный изгиб:

$$\begin{aligned} Q_y &= F = \text{const}, \\ M_x &= Fz, \end{aligned}$$

при постоянной поперечной силе и линейной функции изгибающего момента.

Для эпюры моментов имеем по краям балки

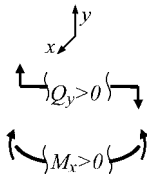
$$M_x|_{z=0} = 0 = M_C = 0 \text{ и } M_x|_{z=l} = M_B = Fl.$$

В дальнейшем не будем показывать отсеченные участки с направлением внутренних силовых факторов  $Q_y$  и  $M_x$ . Поэтому введем правила знаков внутренних силовых факторов при изгибе:

- поперечная сила в сечении считается положительной, если слева внешняя сила направлена вверх, справа — вниз (обе — по часовой стрелке относительно сечений);
- момент в сечении считается положительным, если слева или справа от сечения балка изгибается свободными краями вверх (выпуклостью вниз), т. е. в сторону положительного направления поперечной оси  $y$ .

Эти правила проиллюстрированы на рис. 7.2.

В результате изгиба материал бруса со стороны выпуклости будет растянут, а со стороны вогнутости — сжат. При этом говорят соответственно о растянутом волокне или о сжатом волокне участка бруса. Характерным для эпюры моментов является то, что в соответствии с выбранным правилом знаков она всегда оказывается построенной на сжатом волокне.



**Рис. 7.2**  
Правила знаков при построении эпюры при изгибе

Если действует и горизонтальная поперечная нагрузка, то в сечениях балки формируются в виде внутренних силовых факторов  $Q_x$  и  $M_y$ .

Зная, какие внутренние силовые факторы формируют напряжения в сечении, можем перейти к классификации изгиба.

Силовой плоскостью называется плоскость, в которой лежит внешняя нагрузка

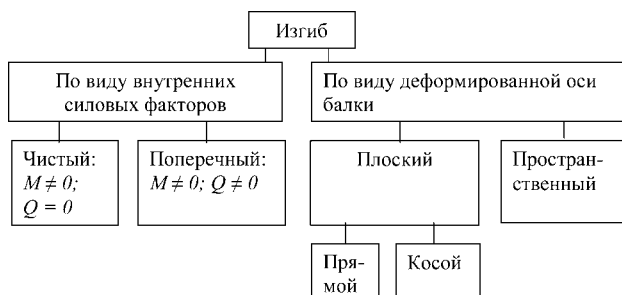


Рис. 7.3  
Классификация видов изгиба

(включая реакции связей). Плоскостью деформации называется плоскость, в которой лежит деформированная ось балки.

Изгиб может быть классифицирован по виду возникающих внутренних силовых факторов и по расположению деформированной оси балки (рис. 7.3).

**Чистым** изгибом называют вид сопротивления, при котором в поперечном сечении балки возникает лишь один внутренний силовой фактор: изгибающий момент  $M$ .

**Поперечным** изгибом называют вид сопротивления, при котором в поперечном сечении балки возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ .

Чистый и поперечный изгибы относят к простым видам сопротивления.

**Плоским** изгибом называют вид сопротивления, при котором деформированная ось балки лежит в плоскости и при этом если плоскость деформации совпадает с силовой плоскостью, то такой изгиб называют **прямым**. А если плоскость деформации пересекается с силовой плоскостью, то такой изгиб называют **косым**. Плоский изгиб возникает лишь в случаях размещения нагрузки в одной силовой плоскости, а также неизменности направления главных центральных осей инерции сечений всех участков и соотношения  $I_x/I_y$ .

Если деформированная ось балки не располагается в плоскости, то такой вид изгиба называют **пространственным**.

Пространственный изгиб возникает в случаях нагрузки, расположенной в разных координатах и силовых плоскостях, и (или) при изменении расположения главных центральных осей инерции сечений участков, или соотношения  $I_x/I_y$  на них.

Обратим внимание на то, что все из представленных на рис. 7.3 видов изгиба соответствуют одноосному напряженному состоянию (см. разделы 1.5 и 2.1).

## 7.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ЖУРАВСКОГО–ШВЕДЛЕРА МЕЖДУ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКОЙ И ВЫЗЫВАЕМЫМИ ЕЮ ВНУТРЕННИМИ СИЛОВЫМИ ФАКТОРАМИ

Между внешней нагрузкой и эпюрами внутренних силовых факторов существует дифференциальная зависимость. Найдем ее.

Пусть имеется балка с произвольной нагрузкой, причем распределенная нагрузка  $q$  может быть в общем случае переменной (рис. 7.4а).

Вырежем в нагруженной балке элемент длиной  $dz$  и разместим координатные оси на правом срезе выделенного элемента (рис. 7.4б). В силу бесконечно малого размера элемента распределенная нагрузка на нем может быть принята условно постоянной. В сечениях балки этого элемента слева будут действовать поперечная сила  $Q_y$  и момент  $M_x$ , справа будут действовать  $Q_y + dQ_y$  и  $M_x + dM_x$ .

Составим уравнения равновесия для выделенного элемента. Для уравнений равновесия при показанных направлениях всех векторов правила знаков произвольны в ка-

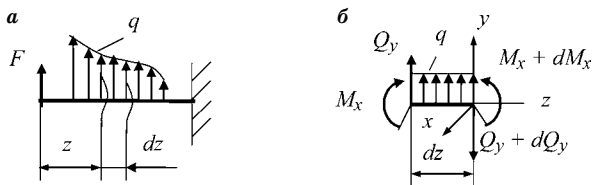


Рис. 7.4

К выводу дифференциальной зависимости Журавского–Шведлера



ждом уравнении, но одинаковы для каждого слагаемого конкретного уравнения.

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow Q_y + qdz - (Q_y + dQ_y) = 0,$$

откуда имеем

$$q = \frac{dQ_y}{dz}. \quad (7.1)$$

Второе уравнение равновесия дает

$$\sum M_{xi} = 0 \rightarrow M_x + Q_y dz + qdz^2/2 - (M_x + dM_x) = 0.$$

Поскольку в этом уравнении слагаемое  $qdz^2/2$  имеет бесконечно малую величину  $dz$  в квадрате, то в сравнении с другими слагаемыми оно весьма мало и им можно пренебречь. Тогда

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}. \quad (7.2)$$

Формулы (7.1) и (7.2) являются дифференциальными зависимостями Журавского–Шведлера.

### 7.3. ПРАВИЛА КОНТРОЛЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ

Дифференциальные зависимости Журавского–Шведлера (7.1), (7.2), которые можно представить как

$$q = \frac{dQ_y}{dz} = \frac{d^2 M_x}{dz^2},$$

удобно применять при контроле построенных эпюр  $Q$  и  $M$ . Результат применения этих соотношений проиллюстрирован на рис. 7.5. На них верхняя эпюра представляет собой эпюру  $Q$ , нижняя — эпюру  $M$ .

Словесно они сводятся к следующим нескольким основным формулировкам.

1. На участке балки, где нет распределенной нагрузки, а  $\frac{dM}{dz} = Q = \text{const}$  и  $Q > 0$ , эпюра  $M$  представляет собой прямую, возрастающую слева направо и понижающуюся справа налево (рис. 7.5а).

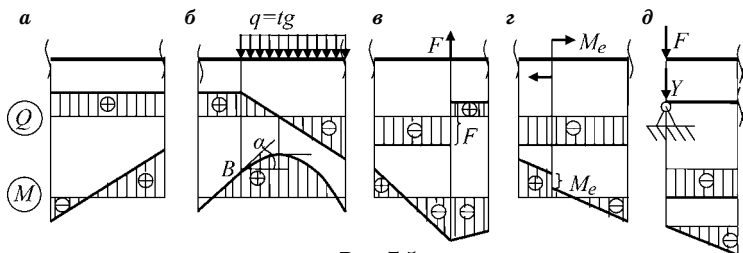


Рис. 7.5

Графическая интерпретация дифференциальной зависимости Журавского–Шведлера (правила контроля эюров внутренних силовых факторов при изгибе)

2. На участке балки с постоянной распределенной нагрузкой  $\left(\frac{dQ}{dz} = q = \text{const}\right)$  эюра  $Q$  — наклонная прямая, а

эюра моментов — квадратичная парабола с выпуклостью, направленной противоположно направлению стрелок распределенной нагрузки (рис. 7.5б). При отсутствии распределенной нагрузки эюра моментов на границе участков имеет плавное сопряжение (в точке  $B$ ).

3. Там, где эюра  $Q$  «проходит через ноль» (пересекает осевую линию), т. е.  $\frac{dM}{dz} = Q = 0$ , в эюре моментов наблюдается максимальное или минимальное экстремальное значение (рис. 7.5б).

4. Там, где имеется внешняя сосредоточенная сила, на эюре  $Q$  появляется скачок на величину сосредоточенной силы, а на эюре  $M$  — излом (рис. 7.5в).

5. Там, где имеется внешний момент, на эюре  $Q$  это никак не отражается, а на эюре  $M$  появляется скачок на величину сосредоточенного момента (рис. 7.5з).

6. На краю балки при наличии сосредоточенной силы (например, опорной реакции в шарнирной опоре) на эюре  $Q$  — скачок, а эюра моментов начинается с нуля, если здесь внешний момент равен нулю (рис. 7.5д).

В приведенных правилах индексы у  $M$  и  $Q$  опущены, поскольку они могут определять разные оси. Знаки эюров на рис. 7.5 могут быть иными, но их характер будет соответствовать показанной внешней нагрузке.

Поиск экстремума осуществляется по зависимостям  $Q$  и  $M$  в соответствии с (7.2). Вначале в формулу, определяющую  $Q$  в текущей координате  $z$ , подставляют условие

$$Q|_{z=z_0} = 0, \quad (7.3)$$

откуда получают значение  $z_0$ . Теперь значение  $z_0$  подставляют в формулу, определяющую  $M$  в текущей координате  $z$ , откуда получают искомую величину  $M_0$ .

Сформулированные в шести пунктах правила могут быть дополнены и другими, получаемыми также на основании (7.2).

## 7.4. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

### 7.4.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Рассмотрим эксперимент с балкой, на поверхность которой нанесена сетка из продольных и поперечных линий. После нагружения симметричной нагрузкой ее центральный участок испытывает чистый изгиб, поскольку здесь  $Q = 0$  (рис. 7.6а). Балка изогнулась в плоскости деформации, и линии, бывшие до нагружения продольными прямыми (рис. 7.6б), приняли форму дуг. При этом чистому изгибу соответствует их постоянная кривизна на всем центральном участке (дуга окружности) (рис. 7.6в). Значит, после нагружения продольные линии образуют дуги концентрических окружностей. Поперечные линии повернутся в плоскости чертежа, оставаясь прямыми и перпендикулярными к касательным концентрических окружностей.

Логично предположить, что и внутри балки все мысленно проведенные в тех же поперечных плоскостях вертикальные линии также повернутся на тот же угол, оставаясь прямыми и перпендикулярными к касательным к этим окружностям. Тогда можно считать, что поперечные сечения, плоские до нагружения, остаются плоскими и после нагружения, поворачиваясь как жесткое целое. Это предположение называют гипотезой плоских сечений.



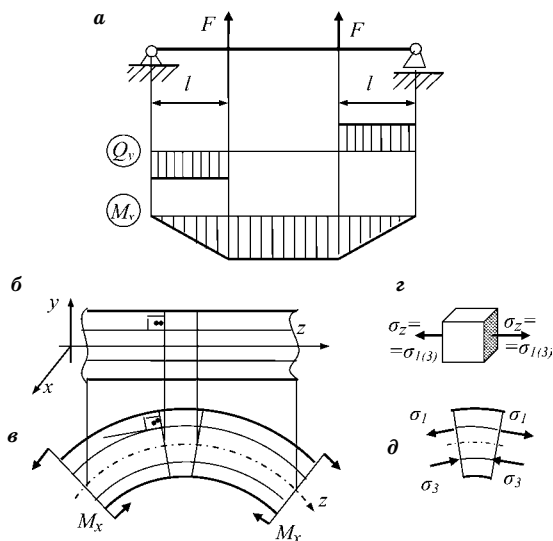


Рис. 7.6

Иллюстрация эксперимента при чистом изгибе прямолинейного бруса

Отсюда следует несколько важных выводов:

а) так как прямые углы между поперечными (вертикальными) линиями и касательными к изогнутым продольным линиям сохраняются, следовательно, в поперечных сечениях отсутствуют касательные напряжения ( $\tau = 0$ ) и площадки кубика, ориентированного по поперечному сечению, являются главными;

б) поскольку расстояние между поперечными линиями меняется по высоте поперечного сечения, то в поперечных сечениях действуют нормальные напряжения ( $\sigma_z \neq 0$ ) и по отмеченному в первом выводе они являются главными ( $\sigma_z = \sigma_{1(3)}$ ); с учетом этого имеем одноосное напряженное состояние (рис. 7.6г);

в) поскольку расстояние между продольными линиями не меняется, то продольные волокна балки не давят друг на друга, следовательно, нормальные напряжения в поперечных направлениях отсутствуют ( $\sigma_y = \sigma_x = 0$ );

г) поскольку в данном случае расстояние между поперечными линиями сверху сечения увеличивается, а снизу

уменьшается, то сверху нормальные напряжения являются растягивающими ( $\sigma_z = \sigma_1$ ), снизу — сжимающими ( $\sigma_z = \sigma_3$ ) и по всей ширине балки имеется слой, в котором напряжения равны нулю; этот слой не растягивается и не сжимается, а лишь искривляется; он называется нейтральным слоем балки (на рис. 7.6*д*);

д) поскольку поперечные сечения поворачиваются друг относительно друга как жесткое целое, то продольные деформации должны изменяться пропорционально удалению от нейтрального слоя балки;

е) поскольку напряжения связаны с деформациями линейным законом Гука, то на основании предыдущего вывода нормальные напряжения  $\sigma_z$  должны изменяться пропорционально удалению от нулевого слоя:

$$\sigma_z = Ky, \quad (7.4)$$

и оказываться максимальными со стороны выпуклости и минимальными (с учетом отрицательного знака) со стороны вогнутости в наиболее удаленных от нулевого слоя точках сечения.

Пересечение нейтрального слоя с поперечным сечением дает **нулевую линию (напряжений) сечения** ( $\sigma_z = 0$ ), а с плоскостью деформации — **нейтральную линию балки**.

Обратим внимание на то, что формула, указывающая на характер распределения нормальных напряжений в поперечном сечении (7.4), была сформулирована лишь на основе результатов эксперимента и введенных гипотез. А коэффициент  $k$  остается пока неизвестным.

#### 7.4.2. ФОРМУЛА НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Аналитически получим формулу изменения нормальных напряжений в поперечном сечении. Для этого рассмотрим случай прямого чистого изгиба балки (центральная часть балки по рис. 7.2) произвольного поперечного сечения, например в виде трапеции (см. рис. 7.7*а*) площадью  $A$ , с деформированной осью  $z$  и возникающим  $M_x$ , предполагающимся в плоскости листа чертежа.

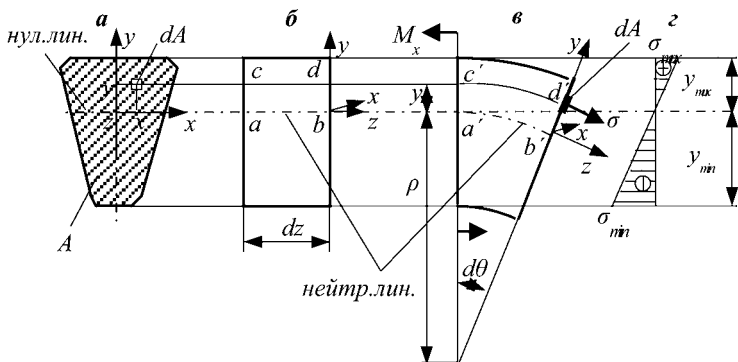


Рис. 7.7

Бесконечно малый элемент бруса при изгибе  
(к выводу формулы нормальных напряжений)

Выделим поперечными сечениями бесконечно малый элемент балки длиной  $dz$  (рис. 7.7б). Выберем оси: ось  $z$  направим вдоль нейтральной линии балки, положение которой по высоте сечения пока неизвестно и потому произвольно; ось  $y$  направим в плоскости деформации вверх, ось  $x$  — перпендикулярно плоскости деформации.

До нагружения отрезок балки  $dz$  прямолинеен (рис. 7.7б). После нагружения он принимает вид дуги (рис. 7.7в) и находится в равновесии под действием пространственной системы параллельных нагрузок.

Следовательно, имеем три независимых уравнения статики:

$$\sum Z_i = 0 \rightarrow \int_A \sigma dA = 0, \quad (7.5)$$

$$\sum M_{xi} = 0 \rightarrow M_x - \int_A \sigma y dA = 0, \quad (7.6)$$

$$\sum M_{yi} = 0 \rightarrow \int_A \sigma x dA = 0, \quad (7.7)$$

где  $y$  — расстояние от рассматриваемой элементарной площадки  $dA$  до нулевой линии, положение которой пока неизвестно;  $x$  — расстояние от нее до плоскости деформации (на рис. 7.7 в плоскости листа).

Решить систему уравнений (7.5)...(7.7) пока невозможно, поскольку неизвестна функция изменения нормаль-

ных напряжений  $\sigma = f(x, y)$  в сечении. Ее найдем из физической и геометрической сторон задачи. По закону Гука имеем

$$\sigma = E\varepsilon; \quad (7.8)$$

а по рисунку имеем

$$dz = ab = a'b' = \rho d\theta. \quad (7.9)$$

Найдем приращение длины отрезка  $cd$  и его продольную деформацию  $\varepsilon$ . Так как

$$\begin{aligned} cd &= dz = \rho d\theta, \\ c'd' &= (\rho + y)d\theta, \end{aligned} \quad (7.10)$$

то

$$\Delta cd = c'd' - cd = yd\theta, \quad (7.11)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta cd}{cd} = \frac{y}{\rho}. \quad (7.12)$$

Подставим (7.12) в (7.8), в результате чего получим

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} = Ey \frac{1}{\rho} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{Ey}. \quad (7.13)$$

Подставляем (7.13) в (7.5) и учитываем, что  $E/\rho = \text{const}$  выносятся за знак интеграла:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0. \quad (7.14)$$

Так как  $E/\rho \neq 0$ , то должно выполняться условие

$$\int_A y dA = S_x = 0. \quad (7.15)$$

Выражение (7.15) является статическим моментом сечения. Равенство нулю статического момента сечения означает то, что ось  $x$  проходит через центр тяжести сечения, т. е. нейтральная линия совпадает с осью балки.

Подставляем (7.13) в (7.6):

$$M_x - \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = 0. \quad (7.16)$$



Так как

$$\int_A y^2 dA = I_x, \quad (7.17)$$

то

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (7.18)$$

Произведение  $EI_x$  называется **жесткостью при изгибе** или **изгибной жесткостью**.

Подставив (7.13) и (7.18), в результате получим

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y, \quad (7.19)$$

где  $y$  показывает с учетом его знака расстояние от нулевой линии до слоя сечения, где определяем величину нормальных напряжений.

Таким образом, при изгибе нормальные напряжения:

- равны нулю по линии, проходящей через центр тяжести сечения;
- переменны и линейно изменяются по высоте сечения, что соответствует выводу (7.4), вызывая с одной стороны балки растяжение, а с другой — сжатие;
- максимальны по абсолютной величине в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии (рис. 7.7з).

Подставляя (7.13) в (7.7) и учитывая то, что  $E/\rho = \text{const}$  и выносится за знак интеграла, получаем

$$\frac{E}{\rho} \int_A xy dA = 0. \quad (7.20)$$

Так как  $E/\rho \neq 0$ , то по (7.20)

$$\int_A xy dA = I_{xy} = 0. \quad (7.21)$$

Равенство нулю центробежного момента инерции говорит о том, что оси  $x$  и  $y$  являются главными. С учетом также того, что оси проходят через центр тяжести сечения, они являются главными центральными осями инерции сечения.



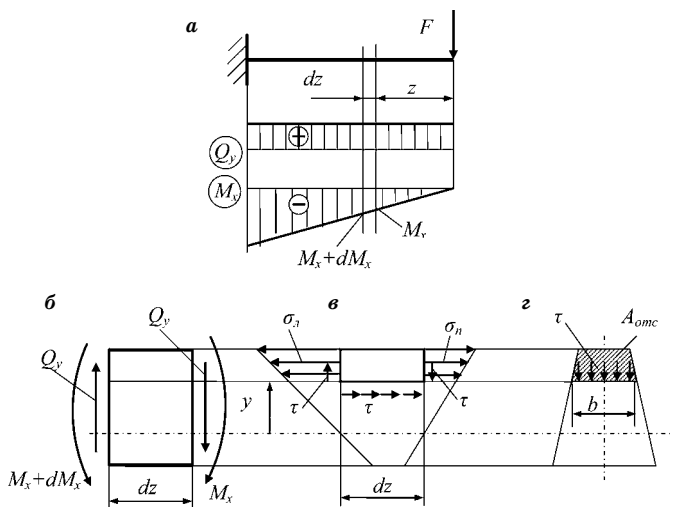
### 7.5. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Пусть имеется консольная балка, нагруженная на свободном краю внешней поперечной силой  $F$  (рис. 7.8).

В поперечном сечении возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила, вызванная действием касательных напряжений, и изгибающий момент от действия нормальных напряжений (рис. 7.8а). В этом случае балка испытывает поперечный изгиб ( $M \neq 0$ ;  $Q \neq 0$ ).

Мысленно вырежем элемент балки бесконечно малой длины  $dz$ . На его правой и левой гранях действуют одинаковые поперечные силы (эпюра  $Q_y$  постоянна) и различные изгибающие моменты (эпюра моментов переменна) (рис. 7.8а, б).

Определим касательные напряжения в поперечном сечении балки на расстоянии  $y$  от нулевой линии. Для этого мысленно отсечем по этой координате  $y$  нижнюю часть элемента и рассмотрим условие равновесия оставшейся верхней части (рис. 7.8в, г).



**Рис. 7.8**  
Пояснительные схемы к выводу формулы касательных напряжений при поперечном изгибе



На правой и левой гранях рассматриваемого элемента (рис. 7.8в) нормальные напряжения определяются по (7.19) формулами

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{M_x}{I_x} y \text{ и } \sigma_{\text{лев}} = \frac{M_x + dM_x}{I_x} y. \quad (7.22)$$

При этом знак момента уже учтен направлением напряжений на выделенном участке  $dz$ .

В поперечных сечениях действуют и касательные напряжения (рис. 7.8з). По закону парности по всей поверхности нижней грани площадью  $dz \cdot b$  рассматриваемого элемента также действуют касательные напряжения, равные по величине касательным напряжениям, действующим в поперечном сечении в непосредственной близости у нижней грани (рис. 7.8в). Тогда уравнение равновесия в виде проекции всех сил на ось  $z$  для верхней отсеченной части элемента будет иметь вид

$$\sum Z_i = 0 \rightarrow \int_{A_{\text{отс}}} \sigma_n dA - \int_{A_{\text{отс}}} \sigma_l dA + \tau b \cdot dz = 0, \quad (7.23)$$

где  $A_{\text{отс}}$  — площадь отсеченной части поперечного сечения элемента.

С учетом (7.22) и растягивающих напряжений сверху ( $y > 0$ ) уравнение (7.23) даст

$$\int_{A_{\text{отс}}} \frac{M_x y}{I_x} dA - \int_{A_{\text{отс}}} \frac{(M_x + dM_x) y}{2} dA + \tau b \cdot dz = 0. \quad (7.24)$$

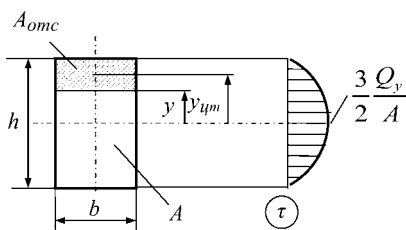
Поскольку  $dM_x$  не зависит от  $dA$ , а  $S_x = \int_{A_{\text{отс}}} y dA$  является статическим моментом отсеченной части поперечного сечения  $A_{\text{отс}}$ , то из (7.24) получаем

$$\tau = \frac{dM_x}{dz} \frac{S_x^{\text{отс}}}{I_x b} = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b}. \quad (7.25)$$

Это выражение называется формулой Журавского.

Построим эпюру касательных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения (рис. 7.9). С этой целью найдем по (7.25) функцию от  $y$  касательных напряжений, действующих на расстоянии  $y$  от нулевой линии.

**Рис. 7.9**  
Распределение касательных напряжений при поперечном изгибе



Статический момент отсеченной части, у которой площадь  $A_{отс} = b\left(\frac{h}{2} - y\right)$  и координата ее центра тяжести

$$y_{цт} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right), \text{ равен}$$

$$S_x^{отс} = y_{цт} A_{отс} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right)\left[b\left(\frac{h}{2} - y\right)\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \quad (7.26)$$

Как видим, статический момент отсеченной части представляет собой функцию квадратичной параболы по координате  $y$ , для которой

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \tau|_{y=0} = \frac{Q \frac{bh^2}{8}}{\frac{bh^3}{12} b} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A}, \\ \tau_{\min} &= \tau|_{y=\frac{h}{2}} = 0. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Значит, наибольшее касательное напряжение находится в середине стороны прямоугольника (по нулевой линии), т. е. там, где нормальные напряжения по (7.19) равны нулю.

### 7.6. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ $\sigma_{\max}$ И $\tau_{\max}$ В ПРАКТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ

Оценку соотношения между нормальными и касательными напряжениями в практических случаях проведем на примере балки с прямоугольным поперечным сечением (см. рис. 7.10).



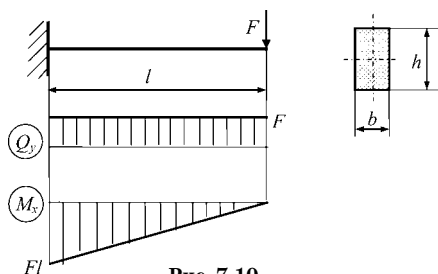


Рис. 7.10  
Балка с прямоугольным поперечным сечением

Определим максимальные напряжения по (7.19) и (7.27):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{I_x} y_{\max} = \frac{Fl}{bh^3} \frac{h}{2} = \frac{6Fl}{bh^2}, \quad (7.28)$$

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2A} = \frac{3F}{2bh}.$$

Отсюда

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 4 \frac{l}{h}. \quad (7.29)$$

Так как обычно  $l \gg h$ , то  $\sigma_{\max} \gg \tau_{\max}$ . Именно поэтому в практических расчетах на прочность пренебрегают величиной  $\tau_{\max}$  и расчет ведут только по нормальным напряжениям. Значит, учитывается лишь один внутренний силовой фактор, а именно  $M_x$ , который создается нормальными напряжениями  $\sigma$ . Поэтому поперечный изгиб относят к простому сопротивлению. Обратим внимание также на то, что наибольшие нормальные напряжения ( $\sigma_{\max}$ ) действуют там, где касательные равны нулю, и наоборот: там, где касательные напряжения максимальны ( $\tau_{\max}$ ), нормальные напряжения равны нулю.

## 7.7.

### УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

В расчетах на прочность при изгибе применяется обычно расчет по допускаемым напряжениям. Значит, предельным параметром является напряжение, по которому определяют допускаемую величину напряжения.

В поперечном сечении возникают в общем случае и растягивающие, и сжимающие напряжения (см. рис. 7.6

с соответствующей ему эпюрой нормальных напряжений по рис. 7.7з). Поскольку в практических случаях касательными напряжениями при изгибе можно пренебречь, то предельными напряжениями в расчетах на прочность служат или предел текучести, или временное сопротивление, или пределы прочности на растяжение, сжатие.

Для пластичных материалов предел текучести при растяжении и сжатии практически одинаков, поэтому и допускаемые напряжения одинаковы:

$$[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}. \quad (7.30)$$

Отсюда для пластичных материалов при любом соотношении наибольших растягивающих и сжимающих напряжений имеется единственное условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{I_x} |y|_{\max} \leq [\sigma]. \quad (7.31)$$

Для хрупких материалов при условии того, что наибольшие растягивающие напряжения могут оказаться меньше наибольших по абсолютной величине сжимающих напряжений (например, по рис. 7.7з):

$$\sigma_{p \max} < |\sigma_{c \max}|, \quad (7.32)$$

должны выполняться два условия прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_{p \max} &= \frac{|M_x|_{\max}}{I_x} y_{\max} \leq [\sigma_p], \\ |\sigma_{c \max}| &= \frac{|M_x|_{\max}}{I_x} |y_{\min}| \leq [\sigma_c]. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Сечение, в котором возникают наибольшие напряжения, называют **опасным сечением**. Если сечение симметрично относительно относительно оси, перпендикулярной плоскости деформации, например относительно оси  $x$ , (прямоугольник, круг, двутавр и др.), то у него

$$y_{\max} = |y_{\min}|. \quad (7.34)$$

В этом случае

$$\sigma_{p \max} = |\sigma_{c \max}| \quad (7.35)$$



и для симметричных прокатных профилей вводят геометрическую характеристику  $W_i$ , называемую моментом сопротивления относительно оси  $i$  при изгибе или, сокращенно, **осевым моментом сопротивления** (вспомним, что при кручении был введен аналогичный параметр — полярный момент сопротивления). Для двух осей симметрии сечения вводят момент сопротивления относительно оси  $x$  и момент сопротивления относительно оси  $y$ :

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (7.36)$$

Тогда условие прочности (7.31) будет иметь вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (7.37)$$

Ниже даны формулы моментов сопротивления для некоторых распространенных простых видов поперечных сечений.

Прямоугольник имеет

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, \quad W_y = \frac{bh^2}{6}, \quad (7.38)$$

где  $h$  — высота сечения по оси  $y$ ,  $b$  — ширина по оси  $x$ .

Круг диаметром  $D$  имеет

$$W_{x(y)} = \frac{\pi}{32} D^3 \approx 0,1 D^3. \quad (7.39)$$

Кольцо имеет

$$W_{x(y)} = \frac{\pi}{32} D^3 (1 - c^4) \approx 0,1 D^3 (1 - c^4), \quad (7.40)$$

где  $c = \frac{d}{D}$  — отношение диаметров внутренней ( $d$ ) и наружной ( $D$ ) поверхностей кольца.

Для более сложных прокатных профилей (двутавр, швеллер, уголок) значения моментов сопротивления приводятся в справочных таблицах по ГОСТ Р 52857.2-2007 либо вычисляются при помощи разбиения сложного сечения на несколько простых сечений (см. раздел 5).

### 7.8. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СЕЧЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

При изгибе нормальные напряжения распределяются по сечению неравномерно: по оси симметрии они равны нулю, и с удалением от нее их численное значение возрастает (см. рис. 7.7*з*). Значит, при изгибе материал у оси недогружен, т. е. используется нерационально. Отсюда следует, что форма сечения балки тоже определяет прочностные свойства конструкции и должно существовать понятие рациональности сечения. Рациональным видом сечения будем называть такое, при котором равной площадью поперечного сечения будет обеспечиваться прочность при большей нагрузке либо одинаковая нагрузка допускается при меньшей площади сечения, т. е. при меньшем весе балки.

Рассмотрим пример прямоугольного сечения площадью  $A$  (рис. 7.11*а*), которому соответствует эпюра распределения напряжений  $\sigma_{кв}$ .

По (7.37) снижения напряжений можно добиться выполнением сечения той же площади  $A$ , но имеющем больший момент сопротивления  $W_{x(y)}$ . Он тем больше, чем дальше от оси балки (точнее — от нулевой линии напряжений) расположена основная площадь ее поперечного сечения балки. С этой целью часть материала, показанного на рис. 7.11*б* заштрихованными накрест площадками, перенесем вверх и вниз, как показано стрелками. Получим двутавровый вид сечения той же площади (рис. 7.11*г*). При

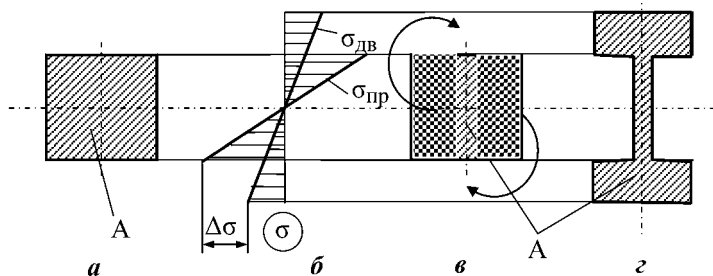


Рис. 7.11

Схема, поясняющая рациональность двутавровых сечений при изгибе

этом максимальные напряжения в этом двутавре  $\sigma_{\text{дв}}$  окажутся меньше максимальных напряжений в квадратном сечении  $\sigma_{\text{кв}}$  на  $\Delta\sigma$  (рис. 7.11в), поскольку осевой момент инерции в новом сечении возрастает интенсивнее, чем  $y_{\text{max}}$ . Подобный эффект был отмечен при рассмотрении кручения брусьев круглого поперечного сечения в разделе 6.5 и примере 6.2.

Значит, при изгибе наиболее рациональными являются двутавровые и коробчатые сечения, в которых значительная часть площади удалена от оси бруса, точнее — от нулевой линии сечения (см. пример расчета в конце темы).

Прокатное двутавровое сечение имеет тонкую центральную стойку, соединяющую полки. Значения соотношений толщин его полок и стойки, высоты и ширины двутавра наработаны громадной практикой применения двутавровых конструкций.

## 7.9. РАЦИОНАЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

### 7.9.1. СОСТАВНЫЕ БАЛКИ

Ниже показаны схемы консольных балок, составленных из нескольких параллельно сложенных брусьев и нагруженных по свободному краю поперечной силой (рис. 7.12). Трением между брусьями пренебрегаем.

Наибольшие напряжения  $\sigma = \frac{M}{W}$  в такой консоли возникают у заделки в верхней и нижней точках поперечного сечения.

В брус с цельным поперечным прямоугольным сечением (рис. 7.12а) максимальные нормальные напряжения определяются формулой

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{W} = \frac{M}{BH^2/6}. \quad (7.41)$$

В балке из  $n$  положенных свободно друг на друга брусьев шириной  $B$  каждый брус работает на изгиб одинаково



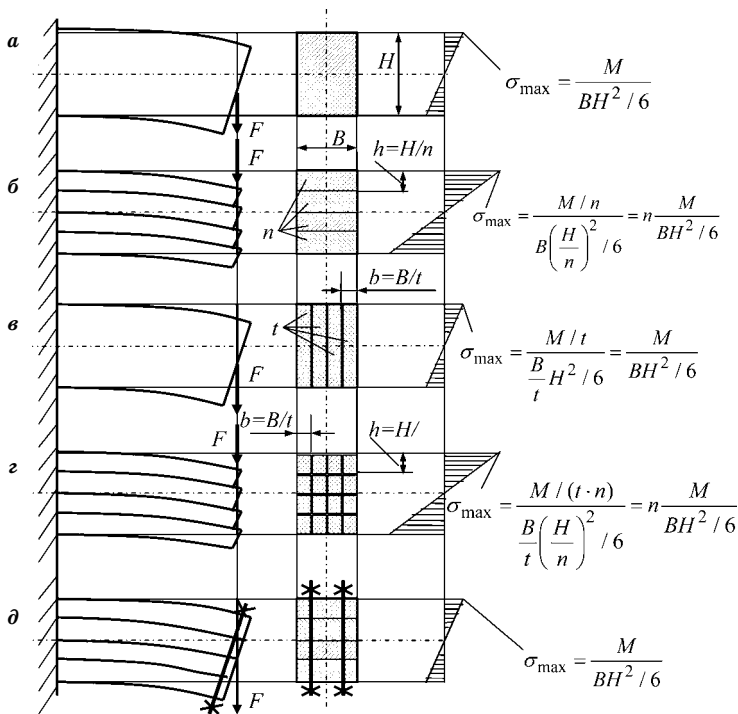


Рис. 7.12 Сравнительная схема, поясняющая условия рациональности составных балок

(рис. 7.12б). Поэтому момент распределяется равномерно по всем  $n$  брусам. Следовательно, каждый брус воспринимает  $M/n$  момента и максимальные нормальные напряжения с учетом высоты каждого бруса, равной  $H/n$ , определяются формулой

$$\sigma_{\max} = \frac{M/n}{B \left(\frac{H}{n}\right)^2 / 6} = n \frac{M}{BH^2 / 6}. \tag{7.42}$$

В балке из установленных свободно параллельно рядом брусьев в количестве  $t$  шт. каждый брус работает на изгиб одинаково (рис. 7.12в). Поэтому момент распреде-



ляется равномерно по всем  $t$  брусам. Следовательно, каждый брус воспринимает  $M/t$  момента и максимальные напряжения с учетом ширины (толщины) каждого бруса, равной  $B/t$ , определяются формулой

$$\sigma_{\max} = \frac{M/t}{\frac{B}{t}H^2/6} = \frac{M}{BH^2/6}. \quad (7.43)$$

В балке, составленной из установленных свободно параллельно рядом и сверху брусьев в количестве  $n \cdot t$  шт., каждый брус работает на изгиб одинаково (рис. 7.12з). Поэтому момент распределяется равномерно по всем  $n \cdot t$  брусьям. Следовательно, каждый брус воспринимает  $M/(n \cdot t)$  момента и максимальные нормальные напряжения с учетом ширины (толщины) каждого бруса, равной  $B/t$ , и высоты, равной  $H/n$ , определяются формулой

$$\sigma_{\max} = \frac{M/(t \cdot n)}{\frac{B}{t} \left(\frac{H}{n}\right)^2 / 6} = n \frac{M}{BH^2/6}. \quad (7.44)$$

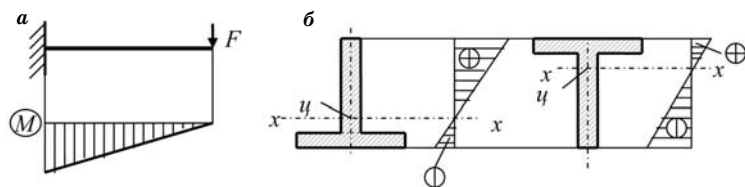
Балка, составленная из положенных друг на друга брусьев в количестве  $n$  шт. и жестко скрепленных вместе у свободного края консоли, деформируется как брус с цельным поперечным сечением (рис. 7.12д). Поэтому максимальные нормальные напряжения определяются формулой

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{BH^2/6}. \quad (7.45)$$

Из сравнения величин напряжений видим, что, хотя все сечения имеют одинаковую площадь, наименее рациональными являются балки по рис. 7.12б, з. В балках по рис. 7.12а, в, д напряжения одинаковы. Значит, достаточно жестко скрепить по свободному краю консоли составляющие балку брусья, т. е. заставить балку деформироваться как единое целое, напряжения снизятся до значений, получаемых как в цельной балке.

**7.9.2.  
РАЦИОНАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ  
СЕЧЕНИЙ, АСИММЕТРИЧНЫХ  
ОТНОСИТЕЛЬНО НУЛЕВОЙ ЛИНИИ**

Если балка имеет асимметричное относительно оси  $x$  сечение, то наибольшие по абсолютной величине напряжения растяжения и напряжения сжатия не равны друг другу (рис. 7.13).



**Рис. 7.13**  
Балка с сечениями, асимметричными относительно оси  $x$

Если материал пластичный, то допускаемые напряжения на растяжение и на сжатие одинаковы. Поэтому безразлично, как расположено сечение в конструкции: со смещением центра тяжести вниз (рис. 7.13а) или вверх (рис. 7.13б): конструкции будут равнопрочны с точки зрения допускаемых напряжений.

Если материал имеет  $[\sigma_p] < [\sigma_c]$ , что характерно для хрупких материалов, то рациональное положение сечения в конструкции соответствует рис. 7.13б. Для него максимальные растягивающие напряжения оказываются меньше максимальных сжимающих:  $\sigma_{p\max} < |\sigma_{c\max}|$ , что и нужно для увеличения прочностных характеристик конструкции.

**7.9.3.  
БАЛКА ПЕРЕМЕННОГО  
ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

Пусть имеется консольная балка круглого поперечного сечения, в условиях прямого поперечного изгиба от силы  $F$  (см. рис. 7.14а). Для нее эпюра моментов соответствует наклонной прямой (рис. 7.14б) с величиной момента в координате  $z$ :

$$M_x = Fz. \tag{7.46}$$



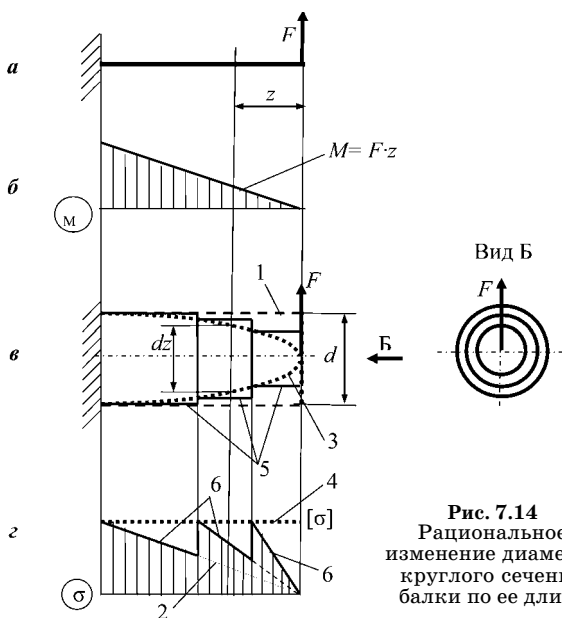


Рис. 7.14  
Рациональное  
изменение диаметра  
круглого сечения  
балки по ее длине

Максимальные (на верхней и нижней поверхностях балки) нормальные напряжения в сечении на расстоянии  $z$  от сосредоточенной силы  $F$  определяются формулой

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{F \cdot z}{W_x}. \quad (7.47)$$

Для балки постоянного круглого поперечного сечения (штриховая линия 1 на рис. 7.14в), имеющей по (7.39)  $W_x \approx 0,1d^3$ , эпюра нормальных напряжений будет соответствовать штриховой наклонной пунктирной прямой 2 на рис. 7.14г. Как видим, лишь у заделки материал нагружен до значения допускаемых напряжений и недогружен на всем остальном протяжении балки.

Подставив (7.39) в (7.47) и выразив диаметр в явном виде, получим его значение в виде функции величины  $z$  при постоянном  $[\sigma]$ :

$$d = \sqrt[3]{\frac{F \cdot z}{0,1[\sigma]}}. \quad (7.48)$$

Значит, если выполнить балку с переменным диаметром  $d$ , соответствующим расчетам по (7.48), то линия контура балки окажется криволинейной (пунктирная кривая 3 на рис. 7.14е). При этом нормальные напряжения в верхней и нижней точках поверхности на всем протяжении балки будут постоянными (пунктирная линия 3 на рис. 7.14з) и равными допускаемым  $\sigma_{\max} = [\sigma]$ .

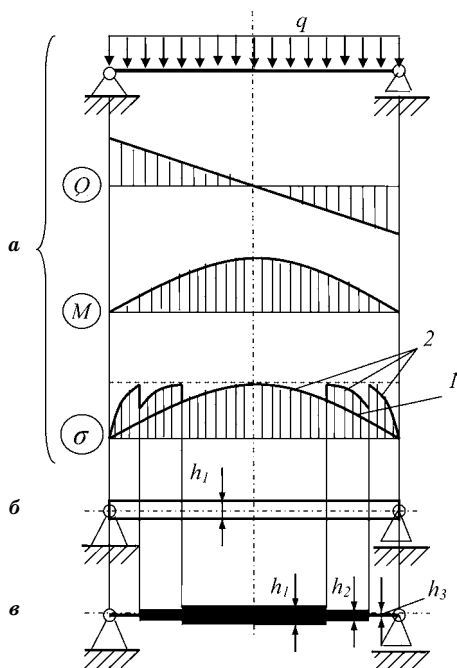
Проще, а часто даже необходимо по конструкторским соображениям, делать балку ступенчатой с постоянными диаметрами на участках (обозначено цифрой 5 на том же рисунке). Тогда эпюра нормальных максимальных напряжений будет иметь пилообразный вид (линия б), достигая допускаемых напряжений  $[\sigma]$  на левых краях участков. Как видим, материал балки ступенчатого профиля нагружен более равномерно по сравнению с балкой постоянного поперечного сечения диаметром  $d$ , и объем материала ступенчатой балки меньше. В этом отношении балка со ступенчатым профилем более экономична по расходу материала. Так конструируют, например, валы редукторов.

Если балка имеет прямоугольное поперечное сечение высотой  $h$  и шириной  $b$ , то с учетом  $W_x = \frac{bh^2}{6}$  имеем по (7.47) функции ширины или высоты прямоугольного сечения от  $z$ :

$$b_z = \frac{6F \cdot z}{[\sigma]h^2} \quad \text{или} \quad h_z = \sqrt{\frac{6F \cdot z}{[\sigma]b}}. \quad (7.49)$$

Как видим, с удалением от места приложения нагрузки размеры равнопрочного ( $\sigma_{\max} = [\sigma] = \text{const}$ ) по длине балки прямоугольного сечения растут: по линейной функции для его ширины или по функции в степени  $1/2$  для его высоты. Поэтому для экономии металла, например, на балку из двутавр наваривают по его верхней и нижней поверхностям дополнительные профильные элементы, делая балку ступенчатой. Такая конструкция, например, заложена в пролетах Крымского моста через Москву-реку. Того же эффекта достигают в наборе параллельно установленных укорачивающихся пластин в рессорах транспортных средств.



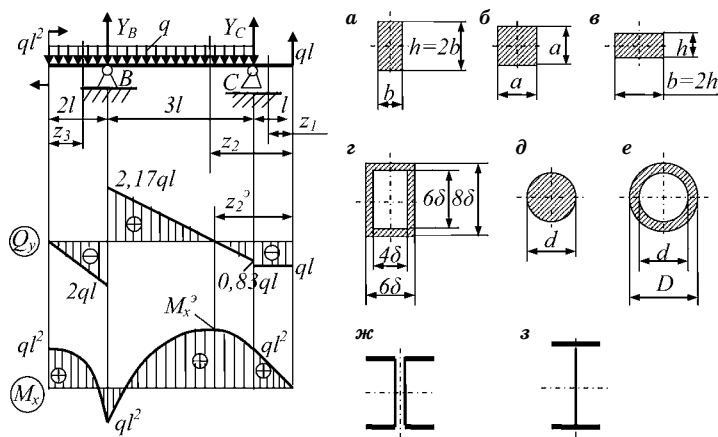


**Рис. 7.15**  
Пример различия эпюр максимальных напряжений при постоянной распределенной нагрузке в двухопорных балках постоянного поперечного сечения и со ступенчато меняющейся высотой сечения

На рис. 7.15а показан пример различия эпюр максимальных напряжений в двухопорной балке постоянного поперечного сечения (рис. 7.15б) и для того же профиля со ступенчато изменяющейся его высотой (рис. 7.15в). В обоих случаях балка нагружена одинаковой распределенной постоянной нагрузкой (на рис. 7.12б, в она условно не показана). В балке постоянного поперечного сечения максимальные напряжения меняются по кривой 1, для ступенчато изменяющейся высоты сечения — по кривым 2. Как видим, ту же нагрузку балка со ступенчато меняющейся высотой, т. е. балка меньшего веса, выдерживает за счет возрастания максимальных напряжений по всей ее длине.

#### Пример 7.1.

Дано: двухопорная балка (рис. 7.16), которая имеет  $l = 1$  м,  $q = 1$  т/м, материал — сталь Ст3 с  $\sigma_T = 240$  МПа. Принять  $n_T = 1,5$ . Балка постоянного поперечного сече-



**Рис. 7.16**  
 Расчетная схема и эпюры внутренних силовых факторов к примеру 7.1

ния может быть выполнена одним из восьми различных прокатных профилей. Кольцевое сечение имеет  $d = 0,8D$ .

**Т р е б у е т с я:** определить допускаемые величины площадей предложенных сечений и сравнить степени их рациональности.

**Решение.** При подсчетах результаты будут приводиться как в размерностях системы СИ, так и в других единицах измерения. Это обусловлено тем, что, например, в таблицах сортамента прокатных профилей геометрические параметры часто имеют различные единицы измерения. Кроме того, иногда следует представлять себе нагрузку в тоннах, а не в Ньютонах.

1. Определяем реакции:

$$\sum M_{xB} = 0 \rightarrow ql4l + Y_C3l - q5l^2/2 - ql^2 = 0 \rightarrow Y_C = -0,167ql;$$

$$\sum M_{xC} = 0 \rightarrow qll + q5l(5/2)l - Y_B3l - ql^2 = 0 \rightarrow Y_B = 4,167ql.$$

Проверяем правильность найденных значений реакций:

$$\sum Y_i = ql + Y_C - q5l + Y_B = ql - 0,167ql - q5l + 4,167ql = 0.$$

2. Строим по участкам эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  с учетом правил знаков по рис. 7.17.

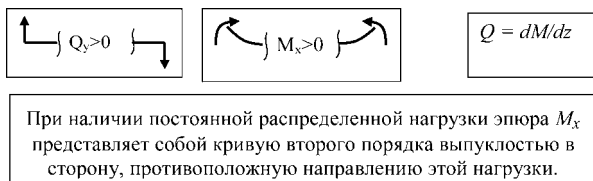


Рис. 7.17

Правила знаков при построении эпюр внутренних силовых факторов изгиба

1-й участок:  $0 \leq z_1 \leq l$ :

$$Q_y = -ql \text{ — прямая постоянная;}$$

$$M_x = qlz_1 \text{ — прямая наклонная,}$$

откуда  $M_x|_{z_1=0} = 0$ ,  $M_x|_{z_1=l} = ql^2$ .

2-й участок:  $l \leq z_2 \leq 4l$ :

$$Q_y = -ql + 0,167ql + q(z_2 - l) \text{ —}$$

прямая наклонная,

откуда  $Q_y|_{z_2=l} = -0,83ql$ ,  $Q_y|_{z_2=4l} = 2,17ql$ ;

$$M_x = qlz_2 - 0,167ql(z_2 - l) - ql(z_2 - l)^2/2 \text{ —}$$

кривая второго порядка,

откуда  $M_x|_{z_2=l} = ql^2$ ,  $M_x|_{z_2=4l} = -ql^2$ .

Поиск экстремума на эпюре  $M_x$ .

В соответствии с (7.2) на эпюре  $M_x$  имеется максимум или минимум, если эпюра  $Q_y$  проходит через нулевую точку. Значит, на втором участке в координате  $z_2^3$  имеем для функции  $Q_y$

$$0 = -ql + 0,167ql + q(z_2^3 - l),$$

откуда  $z_2^3 = 1,833l$  и тогда  $M_x^3 = M_x|_{z_2=1,833l} = 1,35ql^2$ .

3-й участок:  $0 \leq z_3 \leq 2l$ :

$$Q_y = -qz_3 \text{ — прямая наклонная,}$$

откуда  $Q_y|_{z_3=0} = 0$ ,  $Q_y|_{z_3=2l} = -2ql$ ;

$$M_x = 2ql^2 - qz_3z_3/2 \text{ —}$$

кривая второго порядка,

откуда  $M_x|_{z_3=0} = ql^2$ ,  $M_x|_{z_3=2l} = -ql^2$ .



3. Выполняем расчет на прочность (определение  $[W_x]$ ).

Условие прочности для пластичных материалов (сталь Ст3 пластичная) записывается для опасного сечения. В данном случае это сечение экстремального момента, где  $M_x^0 = 1,35ql^2$ . Условие прочности имеет вид

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma],$$

где  $|\sigma|_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x}$  и  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$ .

Значит, значение момента сопротивления любого сечения должно быть не меньше допускаемого:

$$[W_x] = \frac{1,35ql^2}{\sigma_T/n_T} = \frac{1,35 \cdot 1,0 \cdot 10^4 \cdot 1^2}{240 \cdot 10^6 / 1,5} = 84,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 84,4 \text{ см}^3.$$

4. Определяем размеры площадей заданных поперечных сечений по условию

$$W_{xi} \geq [W_x].$$

4.1. Прямоугольное сечение, в котором  $h = 2b$ , имеет

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3.$$

Подставляем его в (7.39) и получаем наименьшее (допускаемое) значение ширины прямоугольника:

$$[b] = \sqrt[3]{\frac{3}{2}[W_x]} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}84,4 \cdot 10^{-6}} = 5,02 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 5,02 \text{ см},$$

на основании чего наименьшая (допускаемая) площадь должна быть равна

$$[A] = [b] \cdot [h] = 2[b]^2 = 2 \cdot 5,02^2 \text{ м}^2 = 50,04 \text{ см}^2.$$

4.2. Квадратное сечение со стороной  $a$  имеет

$$W_x = \frac{aa^2}{6} = \frac{a^3}{6}.$$

Подставляем его в (7.39) и получаем наименьшее (допускаемое) значение ширины прямоугольника:

$$[b] = \sqrt[3]{6[W_x]} = \sqrt[3]{6 \cdot 84,4 \cdot 10^{-6}} = 7,97 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 7,97 \text{ см},$$



на основании чего наименьшая (допускаемая) площадь должна быть равна

$$[A] = [a]^2 = 7,97^2 \text{ м}^2 = 63,6 \text{ см}^2.$$

4.3. Прямоугольное сечение, в котором  $b = 2h$ , имеет

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2hh^2}{6} = \frac{h^3}{3}.$$

Подставляем его в (7.39) и получаем наименьшее (допускаемое) значение ширины прямоугольника

$$[h] = \sqrt[3]{3[W_x]} = \sqrt[3]{3 \cdot 84,4 \cdot 10^{-6}} = 6,33 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 6,33 \text{ см},$$

на основании чего наименьшая (допускаемая) площадь должна быть равна

$$[A] = [b] \cdot [h] = 2[h]^2 = 2 \cdot 6,33^2 \text{ м}^2 = 80,1 \text{ см}^2.$$

4.4. Коробчатое сечение имеет

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{I_{x1} - I_{x2}}{y_{\max}} = \frac{6\delta(8\delta)^3}{12} - \frac{4\delta(6\delta)^3}{12} = 46\delta^3,$$

где  $I_{x1}$  и  $I_{x2}$  — осевые моменты инерции прямоугольников с площадями  $A_1 = 8\delta \cdot 6\delta$  и  $A_2 = 6\delta \cdot 4\delta$  соответственно. Подставляем его в (7.39) и получаем наименьшее (допускаемое) значение толщины:

$$[\delta] = \sqrt[3]{\frac{1}{46}[W_x]} = \sqrt[3]{\frac{1}{46} 84,4 \cdot 10^{-6}} = 1,224 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,224 \text{ см},$$

на основании чего наименьшая (допускаемая) площадь должна быть равна

$$[A] = [A_1] - [A_2] = 8[\delta] \cdot 6[\delta] - 6[\delta] \cdot 4[\delta] = (48 - 24) \cdot 1,224^2 \text{ м}^2 = 36,0 \text{ см}^2.$$

4.5. Круглое сплошное сечение диаметром  $d$  имеет

$$W_x = 0,1d^3.$$

Подставляем его в (7.39) и получаем наименьшее (допускаемое) значение ширины прямоугольника:

$$[d] = \sqrt[3]{10[W_x]} = \sqrt[3]{10 \cdot 84,4 \cdot 10^{-6}} = 9,45 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 9,45 \text{ см},$$

на основании чего наименьшая (допускаемая) площадь должна быть равна

$$[A] = \frac{\pi}{4}[d]^2 = \frac{\pi}{4}9,45^2 \text{ м}^2 = 70,2 \text{ см}^2.$$

#### 4.6. Кольцевое сечение имеет

$$W_x \approx 0,1D^3(1 - c^4).$$

Подставляем его в (7.39) и с учетом того, что по условию задачи  $c = d/D = 0,8$ , получаем наименьшее (допускаемое) значение диаметра:

$$\begin{aligned} [D] &= \sqrt[3]{\frac{1}{0,1(1 - c^4)}[W_x]} = \sqrt[3]{\frac{1}{0,1(1 - 0,8^4)}84,4 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 11,27 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 11,27 \text{ см}, \end{aligned}$$

на основании чего наименьшая (допускаемая) площадь должна быть равна

$$[A] = [A_1] - [A_2] = \frac{\pi}{4}[D]^2(1 - c^2) = \frac{\pi}{4}11,27^2(1 - 0,8^2) \text{ м}^2 = 35,7 \text{ см}^2,$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — площади кругов с диаметрами  $D$  и  $d$  соответственно.

4.7. Сечение из двух швеллеров, симметрично расположенных своими главными центральными осями на нулевой линии всего сечения, имеет

$$W_{x\Sigma} = 2W_{x1},$$

где  $W_{x1}$  — момент сопротивления одного швеллера. Подставляем его в (7.39) и получаем наименьшее (допускаемое) значение каждого швеллера:

$$[W_{x1}] = [W_x]/2 = 84,4 \cdot 10^{-6}/2 = 42,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 42,2 \text{ см}^3.$$

По таблицам наименьшим номером швеллера, которому соответствует данный момент сопротивления, является № 12. Он имеет  $W_x = 50,6 \text{ см}^3$  и  $A = 13,3 \text{ см}^2$ . Значит, суммарная площадь поперечного сечения из двух швеллеров № 12 составит

$$A_\Sigma = 2A = 2 \cdot 13,3 \text{ м}^2 = 26,6 \text{ см}^2.$$

При пользовании таблицами необходимо обратить внимание на линейные размерности параметров: они даны в сантиметрах или в миллиметрах.

4.8. Двутавровое сечение имеет табличное значение  $W_x$ , которое должно соответствовать условию (7.39), т. е.

$$W_x \geq [W_x] = 84,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 84,4 \text{ см}^3.$$

По таблицам этому значению соответствует ближайший наименьший номер двутавра № 14. Он имеет  $W_x = 81,7 \text{ см}^3$ , что несколько меньше допускаемого. Однако если возникающие при этом максимальные напряжения не превышают допускаемых более чем на 5%, то условие прочности будет считаться выполненным. Проверим это, для чего определим возникающие максимальные напряжения и затем сравним их с допускаемыми:

$$\sigma_{\max} = \frac{1,35ql^2}{W_x} = \frac{1,35 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1^2}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 165,2 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\sigma = \frac{[\sigma_T]}{n_T} = \frac{240 \cdot 10^6}{1,5} = 160 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = \frac{165,2 - 160}{160} 100\% = 3,25\%,$$

что допустимо, поскольку меньше 5%. Значит, прочность балки из двутавра № 14 обеспечена.

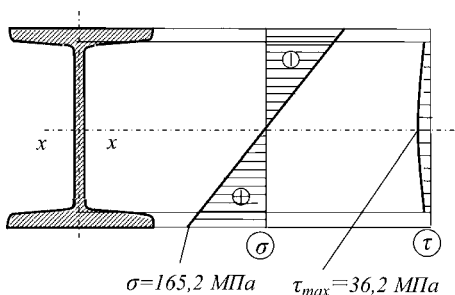
5. Сводим полученные результаты в таблицу. Отмечаем порядковым номером степень рациональности сечений, которая определяется меньшей необходимой площадью сечения, обеспечивающей прочность балки при одинаковой (заданной) нагрузке.

Наиболее рациональным оказался профиль из двутавра, наименее рациональным — полоса, имеющая  $b = 2h$ .

Таблица 7.1

Сводная таблица результатов расчетов примера 7.1

Вид сечения	$\alpha$	$\square$	$\square$	$\blacksquare$	$\bullet$	$\circ$	$] [$	I
$[A]$ , см <sup>2</sup>	50,4	63,6	80,1	36,0	70,2	35,7	26,6	17,4
Степень рациональности	5	6	8	4	7	3	2	1



**Рис. 7.18**  
Распределение напряжений в опасном сечении балки примера 7.1

6. Максимальное нормальное напряжение в двутавре № 14 равно  $\sigma_{\max} = 165,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 165,2 \text{ МПа}$  (посчитано в п. 4.8). Эпюра нормальных напряжений имеет вид, представленный на рис. 7.18.

7. Эпюру касательных напряжений покажем для сечения  $B$ , где действует максимальная поперечная сила (рис. 7.18).

Для двутавра № 14 по таблицам находим:  $I_x = 572 \text{ см}^4 = 572 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $b = 4,9 \text{ мм} = 4,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $S_x^{\text{отс}} = 46,8 \text{ см}^3 = 46,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ . Значение статического момента сечения дается в таблицах для полусечения, т. е. той части, которая ниже или выше оси  $x$ .

Максимальное касательное напряжение находится на оси  $x$  и равно по (7.25):

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x b} = \frac{2,17 q l^2 S_x^{\text{отс}}}{I_x b} = \frac{2,17 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1^2 \cdot 46,8 \cdot 10^{-6}}{572 \cdot 10^{-8} \cdot 4,9 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 36,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 36,2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Как видим, оно почти в 4,5 раза меньше нормального напряжения в опасном сечении и расположено посредине сечения, где нормальные напряжения равны нулю.

Зная, что эпюра касательных напряжений представляет собой кривую с экстремумом по оси  $x$ , строим ее в том же масштабе, что и эпюра  $\sigma$ , ориентировочно.

### Пример 7.2.

Дано: консольная балка из составного поперечного сечения, симметричного относительно его главных цен-

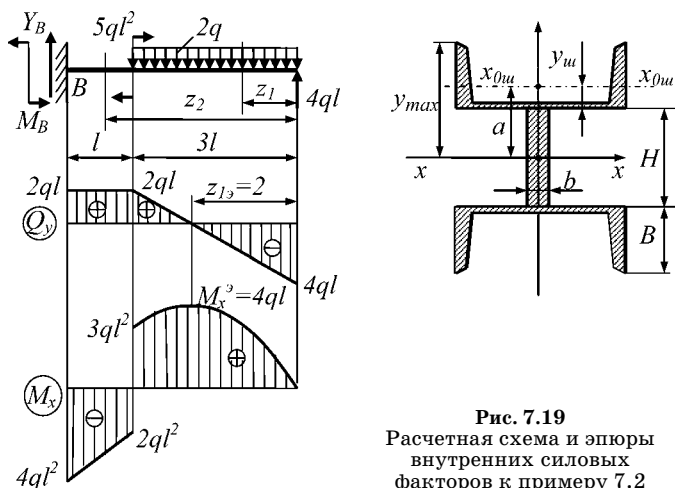


Рис. 7.19  
Расчетная схема и эпюры  
внутренних силовых  
факторов к примеру 7.2

тральных осей (рис. 7.19). Стойка и швеллеры сварены между собой. Стойка сечения имеет:  $H = 100$  мм;  $b = 5$  мм;  $l = 0,5$  м. Швеллер № 20 имеет (табличные данные):  $B = 76$  мм;  $A_{ш} = 23,4$  см<sup>2</sup>;  $y_{ш} = 2,07$  см;  $I_{x0ш} = 113$  см<sup>4</sup>. Балка выполнена из стали Ст3:  $\sigma_T = 240$  МПа. Принять  $n_T = 1,5$ .

**Т р е б у е т с я:** определить допускаемую нагрузку  $[q]$ .

**Решение.** 1. Балка имеет два участка. Нельзя забывать о том, что в заделке могут возникнуть две реакции:  $Y_B$  и  $M_B$ , направления которых выбираются произвольно. Для консольной балки их значение получим при построении эпюр.

2. Строим эпюры поперечных сил и моментов.

1-й участок:  $0 \leq z_1 \leq 3l$ :

$$Q_y = -4ql + 2qlz_1;$$

$$M_x = 4qlz_1 - 2qz_1^2/2.$$

На 1-м участке следует определить экстремальное значение  $M_x|_{z_1 = z_{1э}} = M_{xэ}$ . Методика его определения показана в примере 7.1.

2-й участок:  $3l \leq z_1 \leq 4l$ :

$$Q_y = -4ql + 2q3l = 2ql;$$

$$M_x = 4qlz_2 - 2q3l(z_2 - 3l/2) - 5ql^2.$$

Подставляя значения координат границ участков в формулы, получаем значения внутренних силовых факторов, по которым строим эпюры.

С учетом того, что получим  $z_{1э} = 2l$  и  $M_{xэ} = 4ql^2$ , имеем два равноопасных сечения: в заделке и в координате  $z_{1э}$  напряжения одинаковы.

Выполняем расчет на прочность:

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma],$$

где у заделки и в сечении координаты  $z_{1э} = 2l$ :

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{I_{x\Sigma}} y_{\max} = \frac{4ql^2}{I_{x\Sigma}} y_{\max} \quad \text{и} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}.$$

Отсюда допускаемое (наибольшее) значение распределенной нагрузки определяется формулой

$$[q] = \frac{\sigma_T I_{x\Sigma}}{4l^2 n_T y_{\max}}.$$

Для вычисления  $q$  надо найти  $y_{\max}$  и  $I_{x\Sigma}$ .

Наиболее удаленное место от нулевой линии имеет координату

$$y_{\max} = H/2 + B = 100/2 + 76 = 126 \text{ мм} = 0,126 \text{ м}.$$

Осевой момент инерции составного сечения определяется по формуле

$$I_{x\Sigma} = I_{xc} + 2I_{xш}.$$

Поскольку собственная центральная ось  $x_0$  стойки совпадает с осью сечения  $x$ , то ее полный осевой момент инерции равен

$$I_{xc} = \frac{bH^3}{12} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1^3}{12} = 41,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Поскольку собственная центральная ось  $x_0$  каждого швеллера расположена на расстоянии  $a$  от оси сечения  $x$ , то его полный осевой момент инерции равен

$$I_{xш} = I_{x0ш} + a^2 A_{ш},$$

где  $a = H/2 + y_{ш} = 0,1/2 + 2,07 \cdot 10^{-2} = 0,0707 \text{ м}$ .



Значит,

$$I_{x_{ш}} = 113 \cdot 10^{-8} + 0,0707^2 \cdot 23,4 \cdot 10^{-4} = 1283 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$I_{x_{\Sigma}} = 41,7 \cdot 10^{-8} + 2 \cdot 1283 \cdot 10^{-8} = 2607 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

Теперь вычисляем величину допускаемой распределенной нагрузки

$$[q] = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 2607 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 0,5^2 \cdot 1,5 \cdot 0,126} = 33104 \text{ Н/м} \approx 33 \text{ Т/м}.$$

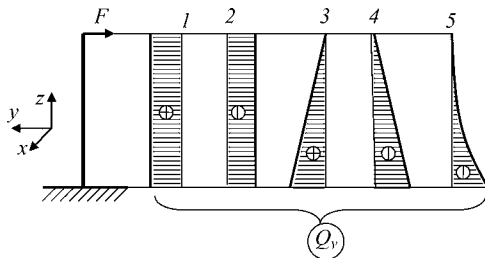
### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «ПРЯМОЙ ИЗГИБ. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ»

1. Какой брус называют балкой?
2. Что называют силовой плоскостью?
3. Что называют плоскостью деформации?
4. Какой вид изгиба называют чистым?
5. Какой вид изгиба называют поперечным?
6. Какой вид изгиба называют плоским?
7. Какой вид изгиба называют косым?
8. Какой вид изгиба называют пространственным?
9. В чем смысл гипотезы плоских сечений?
10. Какие правила знаков применяют при поперечном изгибе?
11. На каком «волокне» строится эпюра моментов?
12. Какова дифференциальная связь между распределенной (погонной) нагрузкой и поперечной силой при поперечном изгибе?
13. Какова дифференциальная связь между поперечной силой и моментом?
14. На чем основаны и каковы правила контроля при построении эпюр при изгибе?
15. Какой принцип используется при рассмотрении сложного нагружения?
16. Что называют плоской рамной системой?
17. Какие внутренние силовые факторы возникают в плоской рамной системе?
18. На основании какого экспериментального наблюдения считают, что в поперечных сечениях балки отсутствуют касательные напряжения?
19. На основании какого экспериментального наблюдения считают, что в поперечных сечениях балки действуют нормальные напряжения?
20. Что называют нейтральным слоем балки?
21. На основании какого экспериментального наблюдения считают, что в балке существует нейтральный слой?

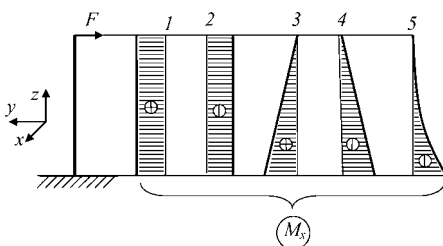




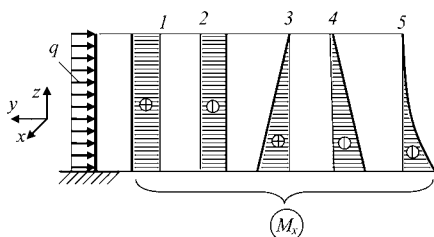
22. На основании какого экспериментального наблюдения считают, что деформации и напряжения в балке должны изменяться пропорционально удалению от нулевой линии?
23. Что называют жесткостью при изгибе?
24. Где в поперечном сечении нормальные напряжения максимальны при изгибе?
25. В каких местах поперечного сечения балки при поперечном изгибе касательные напряжения равны нулю и в каком — максимальны?
26. Почему в практических расчетах на прочность пренебрегают величиной  $\tau_{\max}$  и расчет ведут только по нормальным напряжениям?
27. Каково условие прочности при изгибе для балок из пластичного материала с сечениями, симметричными относительно оси, проходящей по нулевой линии?
28. Каково условие прочности при изгибе для балок из хрупкого материала с сечениями, симметричными относительно оси, проходящей по нулевой линии?
29. Каково условие прочности при изгибе для балок из хрупкого материала с несимметричным сечением и при возникновении  $\sigma_{p\max} \geq |\sigma_{cl\max}|$ ?
30. Каковы условия прочности при изгибе для балок из хрупкого материала с несимметричными сечениями и при возникновении  $\sigma_{p\max} < |\sigma_{cl\max}|$ ?
31. Какую геометрическую характеристику называют моментом сопротивления при изгибе?
32. Что означает понятие рационального сечения?
33. Почему двутавровое сечение рациональнее квадратного той же площади?
34. Для какого вида изгиба можно убрать стойку в двутавре, при этом жестко скрепив полки по краям балки?
35. Почему двутавр наиболее распространенная форма поперечного сечения балок?
36. Что означает равнопрочность балки по ее длине?
37. Какая из показанных эпюр поперечных сил  $Q_y$  соответствует расчетной схеме?



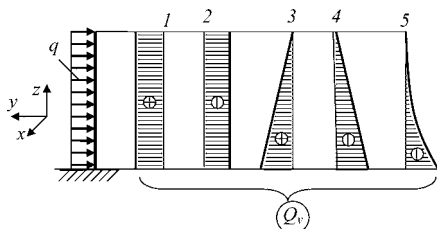
38. Какая из показанных эпюр изгибающих моментов  $M$  соответствует расчетной схеме?



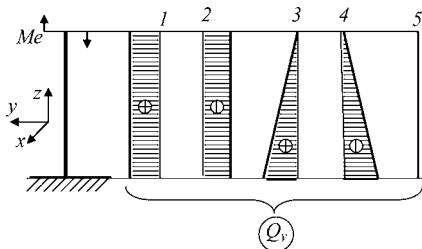
39. Какая из показанных эпюр изгибающих моментов  $M$  соответствует расчетной схеме?



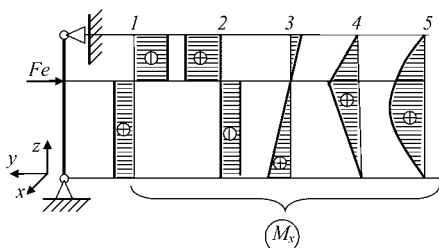
40. Какая из показанных эпюр поперечных сил  $Q_y$  соответствует расчетной схеме?



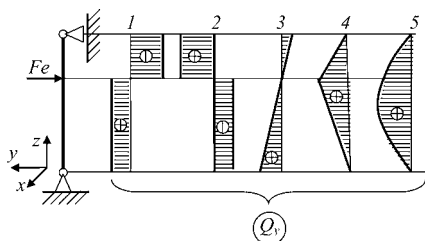
41. Какая из показанных эпюр поперечных сил  $Q_y$  соответствует расчетной схеме?



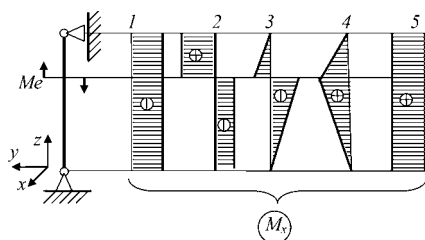
42. Какая из показанных эпюр изгибающих моментов  $M$  соответствует расчетной схеме?



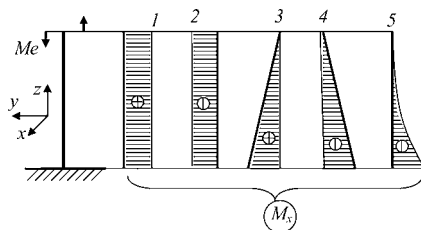
43. Какая из показанных эпюр поперечных сил  $Q_y$  соответствует расчетной схеме?



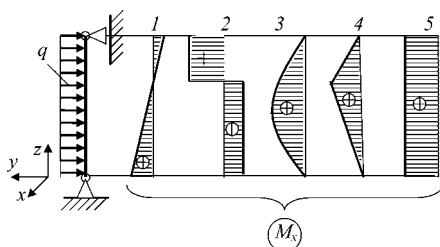
44. Какая из показанных эпюр изгибающих моментов  $M$  соответствует расчетной схеме?



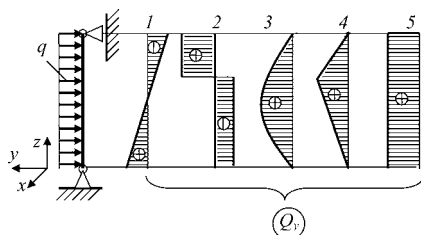
45. Какая из показанных эпюр моментов соответствует расчетной схеме?



46. Какая из показанных эпюр изгибающих моментов  $M$  соответствует расчетной схеме?



47. Какая из показанных эпюр поперечных сил  $Q_y$  соответствует расчетной схеме?



**ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ.**  
*Дифференциальные и универсальные уравнения для определения углов поворота и прогибов упругой линии балки и их интегрирование*

**8.1.**  
**ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ**

При каждом виде сопротивления мы учились определять на каждом  $i$ -м участке внутренние силовые факторы, напряжения и перемещения при растяжении–сжатии:

- внутренние силовые факторы в виде продольной силы  $N_i$ ;
- нормальные напряжения  $\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}$ ;
- продольные перемещения  $\Delta_i = \Delta_{i-1} + \Delta l_i$ , где  $\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$ .

При кручении:

- внутренние силовые факторы в виде  $T_i$ ;
- максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях

$$\tau_i = \frac{T_i}{I_{Pi}} \rho_{\max} = \frac{T_i}{W_{Pi}};$$

- угловые перемещения в виде угла поворота поперечных сечений бруса  $\varphi_i = \varphi_{i-1} + \Delta\varphi_i$ , где  $\Delta\varphi_i = \frac{T_i l_i}{G_i I_{Pi}}$ .

При изгибе:

- внутренние силовые факторы в виде поперечной силы  $Q_i$  и изгибающего момента  $M_i$ ;
- максимальные нормальные напряжения от изгибающего момента

$\sigma_i = \frac{M_{xi}}{I_{xi}} y_{\max} = \frac{M_{xi}}{W_{xi}}$  и касательных на-

пряжений  $\tau_i = \frac{Q_i S_x^{\text{отс}}}{I_{xi} b_i}$  от поперечной силы.

Теперь познакомимся с перемещениями при изгибе.



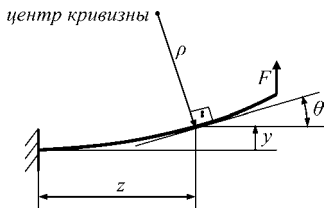


Рис. 8.1  
Упругая линия  
нагруженной балки

Положение плоской линии в сечении  $z$ , имеющей радиус кривизны  $\rho$ , определяется двумя параметрами: поперечным перемещением оси балки ( $y$ ), называемом прогибом, и углом поворота оси балки ( $\theta$ ) (рис. 8.1). Эти два параметра связаны очевидным из рисунка соотношением

$$\frac{dy}{dz} = y' = \operatorname{tg} \theta \approx \theta. \quad (8.1)$$

Знак примерного равенства справедлив, поскольку в практических случаях обычно имеем  $\theta \sim 0,001 \dots 0,01$  рад.

## 8.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВ ПОВОРОТА И ПРОГИБОВ УПРУГОЙ ЛИНИИ БАЛКИ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

При выводе формулы нормальных напряжений при изгибе в тех пределах, где выполняется закон Гука, получено

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (8.2)$$

Из курса высшей математики известна связь между параметрами гладкой кривой линии

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}. \quad (8.3)$$

Так как  $\theta \sim 0,001 \dots 0,01$  радиан, то  $(y')^2 \approx \theta^2 \ll 1$  и из (8.3) получаем

$$\frac{1}{\rho} \approx y''. \quad (8.4)$$

Сравнив (8.4) с (8.2), имеем

$$y'' = \frac{M}{EI} \text{ или } M = EI y''. \quad (8.5)$$

Так как  $y'' = \frac{\partial(y')}{\partial z}$ , то, интегрируя (8.5), последовательно получаем

$$\begin{aligned} y' &= \int \frac{M}{EI} dz + C_1, \\ y &= \int y' dz + C_2 = \iint \left( \int \frac{M}{EI} dz + C_1 \right) dz + C_2, \end{aligned} \quad (8.6)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, определяемые с помощью дополнительных уравнений, называемых граничными условиями. При этом следует иметь в виду, что на каждом участке появляются по две произвольные постоянные. Так, для балки с двумя участками имеем четыре произвольных постоянных, для балки с тремя участками — шесть и т. д.

Произведение  $EI$  называют **жесткостью при изгибе**.

По формулам (8.6) можно определить значение угла поворота и прогиба в любой координате  $z$  и, значит, построить эпюру углов поворота и форму упругой линии балки.

### 8.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

**Граничные условия** — это априори известные значения вычисляемых функций в определенных местах, на границах и краях участков, т. е. при известных значениях координаты  $z$ .

Приведем примеры граничных условий для распространенных расчетных схем (см. рис. 8.2), в которых начало координат берется произвольно.

Для расчетной схемы по рис. 8.2а имеем два граничных условия. В заделке, где  $z = 0$ , прогиб и угол поворота должны быть равны нулю:

$$y|_{z=0} = 0, y'|_{z=0} = 0. \quad (8.7)$$

Для расчетной схемы по рис. 8.2б имеем два граничных условия: в обеих опорах, где  $z = 0$  и  $z = l$ , прогибы равны нулю:

$$y|_{z=0} = 0, y|_{z=l} = 0. \quad (8.8)$$



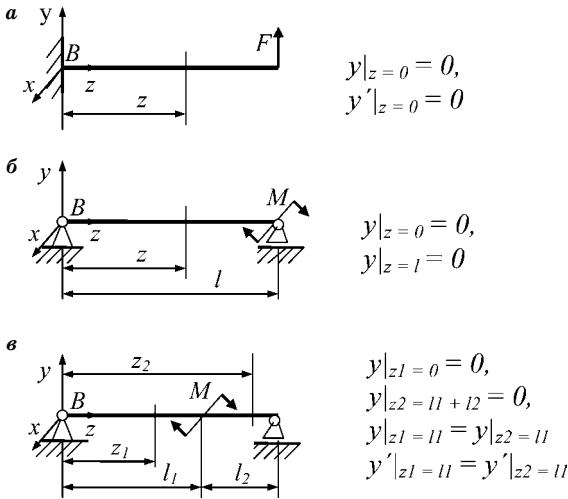


Рис. 8.2

Типовые примеры балок и граничные условия для них

Для расчетной схемы по рис. 8.2в имеем четыре граничных условия: в обоих опорах, где  $z_1 = 0$  и  $z_2 = l_1 + l_2$ , прогибы равны нулю, а также на общей границе двух участков, где  $z_1 = z_2 = l$ , прогибы равны друг другу и углы поворота равны друг другу:

$$\begin{aligned}
 y|_{z_1=0} &= 0, \\
 y|_{z_2=l_1+l_2} &= 0, \\
 y|_{z_1=l} &= y|_{z_2=l}, \\
 y'|_{z_1=l} &= y'|_{z_2=l}.
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

#### 8.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ ИЗГИБА

Вспомним, что для каждого участка можем записать дифференциальные зависимости Журавского–Шведлера по (7.1) и (7.2):

$$q = \frac{dQ}{dz} = Q', \tag{8.10}$$

$$Q = \frac{dM}{dz} = M'. \tag{8.11}$$



Значит, с учетом (8.6) можем составить общую дифференциальную последовательность из параметров изгиба:

$$\begin{aligned}
 & y, \\
 & \text{по (8.1)} \quad y' \approx \theta, \\
 & \text{по (8.5)} \quad EI(y')' = M, \\
 & \text{по (7.2)} \quad EIy''' = M' = Q, \\
 & \text{по (7.1)} \quad EIy^{IV} = Q' = q.
 \end{aligned}
 \tag{8.12}$$

Эта последовательность указывает на дифференциальную взаимосвязь между эпюрами функций  $q \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow \theta \rightarrow y$ . В ней форма линии каждой эпюры описывается функцией, имеющей аргумент  $z$  в каждом следующем параметре на порядок выше, т. е. функция становится на порядок сложнее. Так, если  $q = \text{const}$ , то  $Q = f_1(z)$ ,  $M = f_2(z^2)$ ,  $\theta = f_3(z^3)$ ,  $y = f_4(z^4)$ .

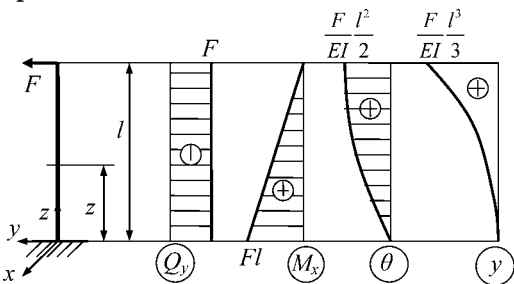
**Пример 8.1.**

Д а н о: консольная балка постоянного поперечного сечения (изгибная жесткость постоянна,  $EI = \text{const}$ ) по рис. 8.3.

Т р е б у е т с я: построить эпюры внутренних силовых факторов, углов поворота и упругую линию прогибов балки.

*Решение.* Упругую линию прогибов балки, в отличие от других параметров, не называют эпюрой, потому что построенный график функции  $y$  представляет собой истинный вид упругой кривой оси балки.

В сечении координаты  $z$  определяем функции искомых параметров.



**Рис. 8.3**  
Пример расчета параметров консольной балки



Поперечная сила

$$Q = -F$$

является функцией прямой постоянной линии.

Изгибающий момент

$$M = F(l - z)$$

является функцией прямой наклонной линии.

Для функции угла поворота по (8.6)

$$\theta = \int \frac{F(l-z)}{EI} dz + C = - \int \frac{F(l-z)}{EI} d(l-z) + C = - \frac{F}{EI} \frac{(l-z)^2}{2} + C$$

должно выполняться граничное условие

$$\theta|_{z=0} = 0.$$

Значит,

$$C = \frac{F l^2}{EI 2}$$

и окончательно имеем

$$\theta = \frac{F}{EI} \left( lz - \frac{z^2}{2} \right),$$

т. е. функция углов поворота соответствует кривой второго порядка.

Для функции прогибов по (8.6)

$$y = \int \theta dz + D = \int \left( - \frac{F}{EI} \frac{(l-z)^2}{2} + \frac{F}{EI} \frac{l^2}{2} \right) dz + D = \frac{F}{EI} \left( l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + D$$

должно выполняться граничное условие

$$y|_{z=0} = 0.$$

Значит,

$$D = 0$$

и окончательно имеем

$$y = \frac{F}{EI} \left( l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right),$$

т. е. функция прогибов соответствует кривой третьего порядка.

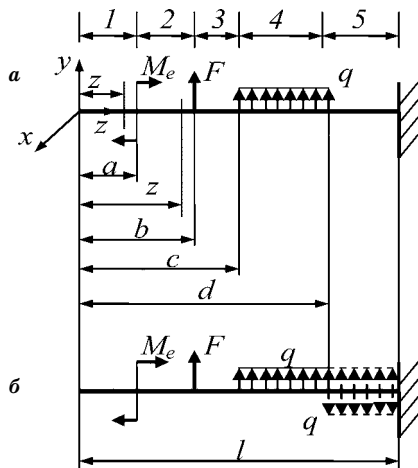
Вычисляем значения  $\theta$  и  $y$  при нескольких промежуточных значениях  $z$  и строим эпюры. Эпюра  $\theta$  на свободном краю балки имеет экстремум, поскольку здесь эпюра  $M$  имеет нулевое значение.

Обратим внимание на то, что правила контроля при построении эпюр внутренних силовых факторов распространяются и на эпюру  $\theta$ , и на форму упругой линии балки (функцию  $y$ ). Поскольку этот график отражает истинный вид оси балки, то он обычно не штрихуется.

### 8.5. УНИВЕРСАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВ ПОВОРОТА ОСИ БАЛКИ

Пусть имеется балка с постоянной изгибной жесткостью ( $EI = \text{const}$ ), нагруженная сосредоточенными моментами ( $M$ ), силой ( $F$ ) и распределенной (погонной) постоянной нагрузкой ( $q$ ) (рис. 8.4а). Таким образом, балка имеет пять участков.

Требуется найти единую формулу функции углов поворота и единую формулу функции прогибов. Каждая из этих функций должна описывать любой участок балки.



**Рис. 8.4**  
Балка, нагруженная  $M_e, F, q$



Эти зависимости будем искать, пользуясь формулами (8.6).

1. Выберем положение начала координатных осей на свободном краю балки. Выбор его положения произволен, но начало координат удобно назначать на любом краю балки. Положительными будут те нагрузки, которые стремятся переместить свободный край балки в сторону положительного направления оси  $y$ .

2. В формулы (8.6) входят функции моментов по участкам. Значит, сначала необходимо определить функции моментов на всех пяти участках:

$$\begin{aligned} 1\text{-й участок: } 0 \leq z \leq a &\rightarrow M_1 = 0; \\ 2\text{-й участок: } a \leq z \leq b &\rightarrow M_2 = M_e; \\ 3\text{-й участок: } b \leq z \leq c &\rightarrow M_3 = M_e + F(z-b); \\ 4\text{-й участок: } c \leq z \leq d &\rightarrow M_4 = M_e + F(z-b) + q \frac{(z-c)^2}{2}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Как видим, функция каждого последующего участка включает в себя функцию предыдущего. Чтобы сохранить необходимую в дальнейшем такую форму функций на 5-м участке, будем считать, что распределенная нагрузка продолжается на нем вплоть до правого края балки (пунктир, направленный вверх, на рис. 8.4б). А для того, чтобы компенсировать действие этой несуществующей нагрузки, введем на пятом участке противоположно направленную такую же по величине распределенную нагрузку (пунктир, направленный вниз, на рис. 8.4б). Тогда на 5-м участке будем иметь:

$$\begin{aligned} 5\text{-й участок: } d \leq z \leq l &\rightarrow M_5 = \\ &= M_e + F(z-b) + q \frac{(z-c)^2}{2} - q \frac{(z-d)^2}{2}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

3. Определим функции углов поворота балки по участкам. Для упрощения записи представим (8.6) в виде ( $EI = \text{const}$ , поэтому это произведение можно вынести за знак интеграла)

$$EI\theta_i \approx EIy_i' = \int M_i dz + C_i. \quad (8.15)$$

Проинтегрируем (8.15) по участкам, подставляя туда последовательно (8.13) и (8.14):

$$\begin{aligned}
 EI\theta_1 &= \int M_1 dz + C_1 = 0 + C_1 = C_1; \\
 EI\theta_2 &= \int M_2 dz + C_2^* = \int M_e d(z-a) + C_2 = C_2 + M_e(z-a); \\
 EI\theta_3 &= \int M_3 dz + C_3 = C_3 + M_e(z-a) + F \frac{(z-b)^2}{2}; \\
 EI\theta_4 &= \int M_4 dz + C_4 = C_4 + M_e(z-a) + F \frac{(z-b)^2}{2} + q \frac{(z-c)^3}{2 \cdot 3}; \\
 EI\theta_5 &= \int M_5 dz + C_5 = C_5 + M_e(z-a) + F \frac{(z-b)^2}{2} + \\
 &+ q \frac{(z-c)^3}{2 \cdot 3} - q \frac{(z-d)^3}{2 \cdot 3}.
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Заметим, что в слагаемых правой части знаменатель представляет собой факториал числа, возрастающего в каждом последующем члене на единицу. При этом степень при  $z$  и число факториала равны друг другу.

На общих границах смежных участков имеем равные углы поворота упругой балки, т. е.

$$y_i'|_{z=z_k} = y_{i+1}'|_{z=z_k}. \tag{8.17}$$

Например, на границе между 2-м и 3-м участками имеем

$$\begin{aligned}
 EI\theta_2|_{z=b} &= EI\theta_3|_{z=b} \rightarrow C_2 + M_e(b-a) = \\
 &= C_3 + M_e(b-a) + F \frac{(b-b)^2}{2},
 \end{aligned}$$

откуда

$$C_2 = C_3.$$

Таким же образом можно показать, что произвольные постоянные  $C_i$  на всех участках одинаковы:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C = EI\theta_0, \tag{8.18}$$

где постоянную  $C$  обозначили как  $EI\theta_0$ .

Формула для 5-го участка является наиболее полной и общей. Ее слагаемыми можно описать функции углов поворота любого участка. При определении угла поворота



на  $i$ -м участке в этой формуле следует использовать слагаемые только от той внешней нагрузки, которая имеется в интервале  $0 \dots z_i$ , т. е. от начала координат до конца данного  $i$ -го участка, что показано ниже выделением углом:

$$EI\theta = \underbrace{EI\theta_0}_1 \underbrace{+ M_e(z-a)}_2 \underbrace{+ F \frac{(z-b)^2}{2!}}_3 \underbrace{+ q \frac{(z-c)^3}{3!}}_4 \underbrace{- q \frac{(z-d)^3}{3!}}_5. \quad (8.19)$$

Формула (8.19) называется универсальным уравнением углов поворота балки метода начальных параметров при изгибе.

### 8.6. УНИВЕРСАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОГИБОВ ОСИ БАЛКИ

Определим функции прогибов балки по участкам. Для этого запишем (8.6) в виде

$$EIy_i = \int EIy'_i dz + D_i. \quad (8.20)$$

Проинтегрируем по участкам (8.20), подставляя туда последовательно (8.16) с учетом (8.18):

$$\begin{aligned} EIy_1 &= \int C_1 dz + D_1 = \int EI\theta_0 dz + D_1 = D_1 + EI\theta_0 z; \\ EIy_2 &= D_2 + EI\theta_0 z + M_e \frac{(z-a)^2}{2}; \\ EIy_3 &= D_3 + EI\theta_0 z + M_e \frac{(z-a)^2}{2} + F \frac{(z-b)^3}{2 \cdot 3}; \\ EIy_4 &= D_4 + EI\theta_0 z + M_e \frac{(z-a)^2}{2} + F \frac{(z-b)^3}{2 \cdot 3} + q \frac{(z-c)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}; \\ EIy_5 &= D_5 + EI\theta_0 z + M_e \frac{(z-a)^2}{2} + F \frac{(z-b)^3}{2 \cdot 3} + q \frac{(z-c)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - q \frac{(z-d)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

На общих границах смежных участков имеем равные прогибы упругой балки, т. е.

$$y_i|_{z=z_k} = y_{i+1}|_{z=z_k}. \quad (8.22)$$

Например, на границе между 2-м и 3-м участками имеем

$$EIy_2 \Big|_{z_2=b} = EIy_3 \Big|_{z_3=b} \rightarrow$$

$$D_2 + EI\theta_0 b + M_e \frac{(b-a)^2}{2} = D_3 + EI\theta_0 b + M_e \frac{(b-a)^2}{2} + F \frac{(b-b)^3}{2 \cdot 3},$$

откуда

$$D_2 = D_3.$$

Таким же образом можно показать, что произвольные постоянные на всех участках одинаковы:

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D = EIy_0, \quad (8.23)$$

где постоянную  $D$  обозначили как  $EIy_0$ .

Следовательно, формула для 5-го участка включает в себя слагаемые, которыми можно описать функции прогибов любого участка. В этой формуле также следует использовать слагаемые только от той внешней нагрузки, которая имеется в интервале  $z_i$ , т. е. от начала координат до данного участка.

$$EIy = \underbrace{EIy_0 + EI\theta_0 z_1}_{1} + \underbrace{M_e \frac{(z-a)^2}{2!}}_2 + \underbrace{F \frac{(z-b)^3}{3!}}_3 + \underbrace{q \frac{(z-c)^3}{4!}}_4 - \underbrace{q \frac{(z-d)^4}{4!}}_5. \quad (8.24)$$

Если какая-либо нагрузка встречается несколько раз, она вводится в формулы (8.19) и (8.24) при каждом новом ее появлении, т. е. записывается несколько раз с учетом своего знака.

В формулы (8.19) и (8.24) вне зависимости от количества участков входят лишь две произвольные постоянные (параметры  $EIy_0$  и  $EI\theta_0$ ), которые определяются с помощью граничных условий. Эти постоянные появляются в формулах первого участка при  $z_1 = 0$  и равны углу поворота ( $EI\theta_0$ ) и прогибу ( $EIy_0$ ) в начале координат. Поэтому они называются начальными параметрами.

Формулы (8.19) и (8.24) позволяют определять угол поворота и прогиб в любой точке упругой линии балки. Поэтому эти формулы называются **универсальными уравнениями**.



Обратим внимание на то, что в формулах (8.19) и (8.24) любой внешний силовой параметр ( $M$ ,  $F$ ,  $q$ ) находится в первой степени. Значит, эти функции описывают линейно деформируемые системы (рост нагрузки любого вида вызывает пропорциональный ему рост деформации), и к ним применим принцип суперпозиции.

Методика применения универсальных уравнений функций углов поворота и прогибов балки заключается в следующем:

1) выбирают начало координат на одном из концов балки;

2) записывают универсальные уравнения для заданной расчетной схемы, последовательно увеличивая  $z$  от 0 (начало координат) до величины общей длины балки (до другого конца балки) и вписывая в них внешнюю нагрузку (в том числе реакции опор) по мере ее появления в интервале  $0 \dots z$ ;

3) записывают граничные условия;

4) определяют произвольные постоянные, подставляя граничные условия в универсальные уравнения; при этом используется только та часть универсальных уравнений, которая охватывается интервалом  $0 \dots z$ ;

5) записывают универсальные уравнения с вычисленными произвольными постоянными;

6) определяют углы поворота и прогибы балки для нескольких промежуточных фиксированных значений координаты  $z$ ; при этом используется только та часть универсальных уравнений, которая охватывается назначаемым интервалом  $0 \dots z$ ;

7) строят эпюру углов поворота (штрихуется) и упругую линию балки (не штрихуется); при этом для проверки следует контролировать дифференциальную связь между ними по (8.12).

### Пример 8.2.

**Дано:** двухопорная балка, имеющая постоянную изгибную жесткость ( $EI = \text{const}$ ), по рис. 8.5.

**Требуется:** построить эпюры углов поворота и прогибов балки, используя метод начальных параметров.

**Решение.** Между  $q$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $EI\theta$  и  $EIy$  существует дифференциальная связь по (8.12), которая позволяет уточнить





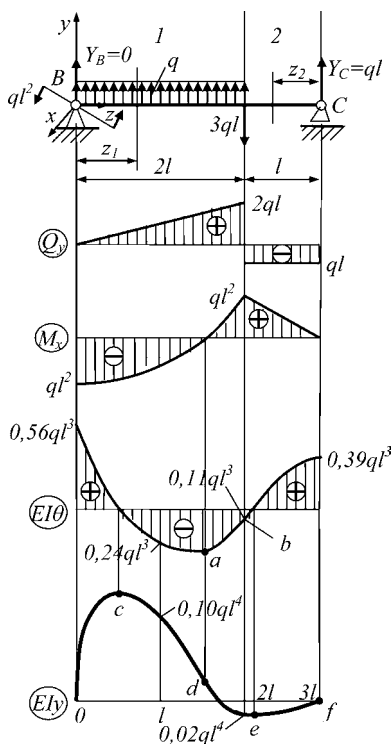


Рис. 8.5  
Результаты решения примера 8.2

построение эпюр ВСФ и перемещений. Поэтому построим вначале эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

1. Вначале определяем реакции в опорах:

$$\sum M_{xB} = 0 \rightarrow Y_C l - 3ql \cdot 2l + q \cdot 2l \cdot l + ql^2 = 0 \rightarrow Y_C = ql;$$

$$\sum M_{xC} = 0 \rightarrow ql^2 - Y_B \cdot 3l - q \cdot 2l \cdot (l + 2l/2) + 3ql \cdot l = 0 \rightarrow Y_B = 0.$$

Полученное в этом примере значение  $Y_B = 0$  является частным случаем. В общем случае  $Y_B \neq 0$ .

2. Затем строим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  по двум участкам:

1-й участок (слева):  $0 \leq z_1 \leq 2l$ :

$$Q_y = qz_1 \rightarrow Q_y|_{z_1=0} = 0; Q_y|_{z_1=2l} = 2ql.$$

$$M_x = -ql^2 + qz_1^2/2 \rightarrow M_x|_{z_1=0} = -ql^2; M_x|_{z_1=2l} = ql^2.$$

2-й участок (справа):  $0 \leq z_2 \leq l$ :

$$Q_y = -ql.$$

$$M_x = qlz_2 \rightarrow M_x|_{z_2=0} = 0; M_x|_{z_2=l} = ql^2.$$

3. Начало координат поместим в левой шарнирной опоре. От нее будет начинаться 1-й участок.

4. Записываем общий вид универсальных уравнений для всей расчетной схемы:

$$EI\theta = EI\theta_0 - ql^2z + q \frac{z^3}{3!} \Big|_1 - 3ql \frac{(z-2l)^2}{2!} - q \frac{(z-2l)^3}{3!};$$

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0z - ql^2 \frac{z^2}{2} + q \frac{z^4}{4!} \Big|_1 - 3ql \frac{(z-2l)^3}{3!} - q \frac{(z-2l)^4}{4!}.$$

Здесь углом отделены слагаемые, относящиеся к 1-му участку. Если бы реакция  $Y_B$  оказалась отличной от нуля, то слагаемое от нее следовало бы включить в оба уравнения после слагаемого с моментом  $ql^2$ .

5. Начальные параметры определяем с помощью граничных условий

$$EIy|_{z=0} = EIy_0 = 0;$$

$$EIy|_{z=3l} = 0 \rightarrow 0 =$$

$$= EI\theta_0 3l - ql^2 \frac{(3l)^2}{2} + q \frac{(3l)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 3ql \frac{(3l-2l)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - q \frac{(3l-2l)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

откуда

$$EI\theta_0 = 0,56ql^3.$$

6. Значит, окончательно универсальные уравнения имеют вид

$$EI\theta = 0,56ql^3 - ql^2z + q \frac{z^3}{3!} \Big|_1 - 3ql \frac{(z-2l)^2}{2!} - q \frac{(z-2l)^3}{3!};$$

$$EIy = 0,56ql^3z - ql^2 \frac{z^2}{2} + q \frac{z^4}{4!} \Big|_1 - 3ql \frac{(z-2l)^3}{3!} - q \frac{(z-2l)^4}{4!}.$$

7. Подставляя в них значения  $z$ , соответствующие различным точкам балки в пределах  $0 \dots 3l$ , определяем углы поворота и прогибы в этих точках и сводим их в таблицу 8.1.



Таблица 8.1

Таблица результатов расчета примера 8.2

$z$	0	$l$	$2l$	$3l$
$EI\theta$	$0,56ql^3$	$-0,27ql^3$	$-0,11ql^3$	$0,39ql^3$
$EIy$	0	$0,1ql^4$	$-0,02ql^4$	0

При этом для 1-го участка используем лишь первые три слагаемых, для 2-го — все.

8. По данным таблицы строим эпюру  $EI\theta$  и упругую линию балки  $EIy$ . При этом учитываем дифференциальную связь между параметрами  $q$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $EI\theta$ ,  $EIy$ :

- там, где эпюра моментов проходит через ноль, на эпюре  $EI\theta$  — экстремум (точки  $a_1$  и  $a_2$ );
- там, где на эпюре моментов максимум, на эпюре  $EI\theta$  — точка перегиба (точка  $b$ );
- там, где эпюра  $EI\theta$  проходит через ноль, в функции прогибов — экстремум (точки  $c_1$  и  $c_2$ );
- там, где на эпюре  $EI\theta$  экстремумы, в функции прогибов — точка перегиба (точка  $d$ ).

### Пример 8.3.

Д а н о: консольная балка под нагрузкой (рис. 8.6).

Т р е б у е т с я: составить универсальные уравнения функций углов поворота и прогибов балки, построить эпюру  $EI\theta$  и кривую прогибов  $EIy$ .

*Решение.* Построение эпюр поперечных сил и моментов этого примера было дано в разделе 7 (пример 7.2, рис. 7.14), поэтому здесь приводятся лишь сами эпюры.

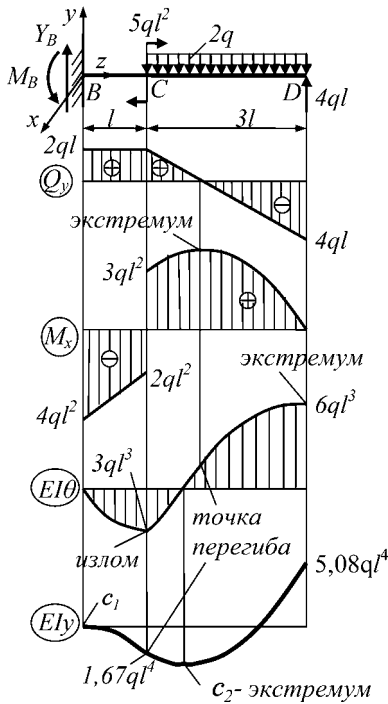
Начало координат разместим в заделке. Обратим внимание на то, что в заделке (сечение  $B$ ) возникают реактивные поперечная сила  $Y_B = 2ql^2$  и момент  $M_B = -4ql^2$ . С их учетом универсальные уравнения будут иметь следующий общий вид:

$$EI\theta = EI\theta_0 - 4ql^2(z-0) + 2ql \left. \frac{(z-0)^2}{1 \cdot 2} \right|_1 + 5ql^2(z-l) - 2q \left. \frac{(z-l)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right|_1;$$

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 z - 4ql^2 \left. \frac{(z-0)^2}{1 \cdot 2} \right|_1 + 2ql \left. \frac{(z-0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right|_1 +$$

$$+ 5ql^2 \left. \frac{(z-l)^2}{1 \cdot 2} \right|_1 - 2q \left. \frac{(z-l)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right|_1.$$





**Рис. 8.6**  
Результаты решения примера 8.3

С учетом того, что оба начальных параметра в заделке равны нулю ( $EI\theta_0 = 0$ ,  $EIy_0 = 0$ ), уравнения упрощаются до

$$EI\theta = -4ql^2(z-0) + 2ql \frac{(z-0)^2}{1 \cdot 2} \Big|_1 + 5ql^2(z-l) - 2q \frac{(z-l)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$EIy = -4ql^2 \frac{(z-0)^2}{1 \cdot 2} + 2ql \frac{(z-0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Big|_1 + 5ql^2 \frac{(z-l)^2}{1 \cdot 2} - 2q \frac{(z-l)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Для участка  $BC$  ( $0 \leq z \leq l$ ) используется часть уравнений, относящаяся только к 1-му участку:

$$EI\theta = -4ql^2(z-0) + 2ql \frac{(z-0)^2}{1 \cdot 2} \Big|_1;$$

$$EIy = \frac{-4ql^2 \frac{(z-0)^2}{1 \cdot 2} + 2ql \frac{(z-0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{1}$$

Для участка  $CD$  ( $l \leq z \leq 4l$ ) используются полные формы уравнений.

Составляем таблицу 8.2, в которую сведем результаты расчетов.

Таблица 8.2

Таблица результатов расчета примера 8.3

$z$	0	$l$	$2l$	$3l$	$4l$
$EI\theta$	0	$-3ql^3$	$0,67ql^3$	$4,33ql^3$	$6,0ql^3$
$EIy$	0	$-1,67ql^4$	$-2,91ql^4$	$-0,33ql^4$	$5,08ql^4$

По таблице строим эпюру углов поворота ( $EI\theta$ ) и упругую линию балки ( $EIy$ ). При этом обращаем внимание на то, что по зависимостям (8.12) имеем:

- там, где на эпюре моментов скачок, на эпюре углов поворота — излом;
- там, где на эпюре моментов экстремум, на эпюре углов поворота — точка перегиба;
- там, где эпюра моментов проходит через ноль, на эпюре углов поворота — экстремум.

Аналогичная связь прослеживается между функциями углов поворота и прогибов.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ»

*Дифференциальные и универсальные уравнения для определения углов поворота и прогибов упругой линии балки и их интегрирование»*

1. Какие виды перемещений возникают при растяжении и сжатии, при кручении, при сдвиге?
2. Какие виды перемещений возникают при изгибе?
3. Какая аналитическая связь между перемещениями при изгибе?
4. Для каких величин углов поворота справедлива формула

$$\frac{dy}{dz} = y' = tg\theta \approx \theta?$$



5. Что называют граничными условиями, для чего их используют?
6. В чем выражается графически дифференциальная взаимосвязь между функциями  $q \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow \theta \rightarrow y$ ?
7. Как определяются знаки внешней нагрузки в универсальных уравнениях?
8. Как называются и что означают произвольные постоянные в универсальных уравнениях?
9. Какие граничные условия используются в опорах?
10. Какие граничные условия используются на границе смежных участков?
11. Почему «универсальные формулы» так называются?
12. Почему метод начальных параметров так называют?
13. Как составляют универсальные уравнения, если определенный вид нагрузки встречается несколько раз?

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ МЕТОДОМ МОРА

### 9.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

**В** дисциплине «Соппротивление материалов» рассматриваются линейно деформируемые системы, в которых изменение нагрузки вызывает пропорциональный рост деформации. Это демонстрируется в лабораторных работах, сопровождающих изучение дисциплины и отражено в основанных на такой пропорциональности универсальных уравнениях функций углов поворота и прогибов балки. Поэтому к таким системам применим принцип суперпозиции (принцип независимости действия сил).

В дальнейшем нам понадобятся несколько новых определений.

**Обобщенная сила ( $F$ )** — внешняя нагрузка любого вида (сила, момент и др.).

**Единичная сила** — безразмерная сила, равная единице ( $F = 1$ ). Обозначается просто как 1. То же относится и к моменту ( $M = 1$ ): обозначается как 1. Обе единичные нагрузки безразмерны.

**Обобщенное перемещение ( $\Delta$ )** — линейное или угловое перемещение. При изгибе линейным перемещением является прогиб  $y$ , угловым перемещением — угол поворота  $\theta$ .

В дальнейшем для простоты будем называть обобщенную силу просто силой и обобщенное перемещение просто перемещением.

**Состояние системы** — это совокупность ее параметров (перемещения, энергия, внутренние силовые факторы и др.), которые возникли при некоторой данной внешней нагрузке.

сила (или система сил) и перемещения 1-го состояния

сила (или система сил) и перемещения 2-го состояния

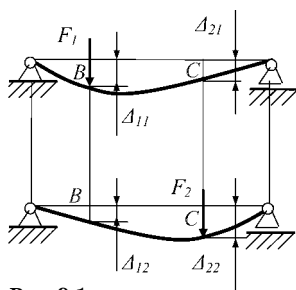


Рис. 9.1

Система 1-го и 2-го состояний

Пример балки в двух состояниях показан на рис. 9.1, где  $F_1$  — обобщенная сила (или система сил) 1-го состояния,  $F_2$  — обобщенная сила (или система сил) 2-го состояния,  $\Delta_{ij}$  — обобщенное перемещение (может быть прогибом, как на данном рисунке, либо углом поворота) по направлению силы  $i$ -го состояния (первый индекс), вызванное силами  $j$ -го состояния (второй индекс).

В 1-м состоянии под действием силы  $F_1$  балка прогнется в точке  $B$  на величину  $\Delta_{11}$ , а в точке  $C$  — на величину  $\Delta_{21}$ . Во 2-м состоянии под действием силы  $F_2$  балка прогнется в точке  $B$  на величину  $\Delta_{12}$ , а в точке  $C$  — на величину  $\Delta_{22}$ .

Если сила (момент) безразмерна и равна единице ( $F_i = 1$ ), то вызываемое ею обобщенное перемещение называют **единичным перемещением** и обозначают как  $\delta_{ii}$  или  $\delta_{ij}$ .

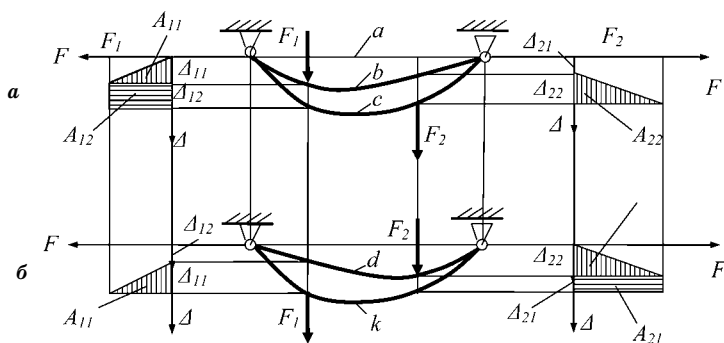
## 9.2.

### РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ. ВИРТУАЛЬНАЯ РАБОТА

Для простоты графического изображения рассмотрим действие только внешней силы, хотя это может быть момент или любая совокупность внешней нагрузки.

Определим по рис. 9.2 работу внешних сил при последовательном нагружении балки сначала нагрузкой 1-го состояния и последующим догружением балки нагрузкой 2-го состояния. Работа ( $A$ ) на графиках «сила — ее перемещение» ( $F — \Delta$ ) определяется заштрихованной площадью.





**Рис. 9.2**  
К определению работ 1-го и 2-го состояний

Заметим, что работа силы  $F$  совершается на прогибах  $\Delta$  под самой силой и по ее направлению, хотя приводит и к повороту балки; работа момента  $M$  совершается на его углах поворота  $\theta$  вместе с балкой, хотя приводит и к прогибу балки. На рис. 9.2 графики слева относятся к силе  $F_1$ , справа — к силе  $F_2$ .

Определим работу внешних сил при приложении вначале нагрузки 1-го состояния (от  $F_1$ ) с последующим дополнением системы нагрузкой 2-го состояния (от  $F_2$ ) (рис. 9.2а).

При приложении к балке внешней нагрузки только 1-го состояния работа совершается на перемещениях этой нагрузки по ее направлению (говорят: «на собственных перемещениях»).

С ростом силы  $F$  от 0 до  $F_1$  прогиб балки растет от 0 до  $\Delta_{11}$ . При этом между величинами силы и прогиба существует пропорциональная связь, что на верхнем графике слева отражается наклонной прямой (см. раздел 3.10). Поэтому сила  $F_1$  совершает на своих собственных перемещениях работу, соответствующую площади заштрихованного треугольника,

$$A_{11} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11}. \quad (9.1)$$

В этот период сила  $F_2$  отсутствует, что на верхнем графике справа иллюстрирует ее нулевое значение на отрезке  $\Delta_{21}$ .

Теперь прикладываем к балке 1-го состояния силу  $F_2$ , которая растёт от 0 до  $F_2$ , вызывая под собой рост прогибов от  $\Delta_{21}$  до  $\Delta_{21} + \Delta_{22}$ . Поэтому сила  $F_2$  совершает на своих собственных перемещениях работу

$$A_{22} = \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22}. \quad (9.2)$$

В это же время сила  $F_1$  остаётся постоянной, лишь перемещаясь на величину  $\Delta_{12}$ , и поэтому совершает работу, соответствующую площади прямоугольника,

$$A_{12} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{12}. \quad (9.3)$$

Работа по (9.3) носит название **виртуальной**, т. е. **возможной**, поскольку сила  $F_1$  не совершила бы работы  $A_{12}$ , если бы не была приложена сила  $F_2$ .

Значит, полная работа при последовательном приложении сначала нагрузки 1-го состояния, затем добавления нагрузки 2-го состояния (обозначим как  $A_{1+2}$ ) составит

$$A_{1+2} = A_{11} + A_{12} + A_{22} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + F_1 \Delta_{12} + \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22}. \quad (9.4)$$

Теперь рассмотрим систему с иной последовательностью приложения внешней нагрузки (рис. 9.2б): вначале прикладываем нагрузку 2-го состояния (силу  $F_2$ ) и затем — нагрузку 1-го состояния (силу  $F_1$ ). Обозначим работу такой последовательности нагружения как  $A_{2+1}$ .

Рассуждая аналогично сказанному выше, получим выражение полной работы для второй последовательности нагружения

$$A_{2+1} = A_{22} + A_{21} + A_{11} = \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} + F_2 \Delta_{21} + \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11}, \quad (9.5)$$

где силой  $F_2$  на перемещениях, вызванных силой  $F_1$ , совершается виртуальная работа

$$A_{21} = F_2 \Delta_{21}. \quad (9.6)$$

Таким образом, виртуальная работа  $A_{ij}$  ( $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ) совершается  $i$ -й нагрузкой на ее перемещениях (по линии

ее действия), вызванных  $j$ -й нагрузкой. Виртуальная работа ( $A_{ij}$ ) совершается нагрузкой одного состояния ( $i$ -го) на перемещениях, вызванных нагрузкой другого состояния ( $j$ -го).

Поскольку выполняется принцип суперпозиции, то работы внешней нагрузки при обеих последовательностях нагружения равны друг другу:  $A_{\Sigma(1+2)} = A_{\Sigma(2+1)}$ , откуда

$$A_{12} = A_{21}, \quad (9.7)$$

$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21}, \quad (9.8)$$

т. е. говорят, что **виртуальные работы взаимны** (равны друг другу).

Равенство (9.8) является математическим выражением результата вывода **теоремы Бетти**: работа внешней нагрузки 1-го состояния на перемещениях, вызванных нагрузкой 2-го состояния, равна работе внешней нагрузки 2-го состояния на перемещениях, вызванных нагрузкой 1-го состояния.

Аналогично можно показать взаимность виртуальных работ для любого вида внешней нагрузки ( $F$ ,  $M$ ,  $q$ ) и ее сочетаний.

Если внешние нагрузки единичны ( $F_i = 1$ , б/р), то (9.8) превратится в

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \quad (9.9)$$

Равенство (9.9) является математическим выражением **теоремы Максвелла**: перемещение точки приложения первой единичной нагрузки по ее направлению, вызванное приложением второй единичной нагрузки, равно перемещению точки приложения второй единичной нагрузки по ее направлению, вызванному приложением первой единичной нагрузки.

При этом если в (9.8) одной единичной нагрузкой является сила ( $F_1 = 1$ ), а другой — единичный момент ( $M_2 = 1$ ), то по (9.9) одно единичное перемещение будет отражать прогиб ( $\delta_{12}$ ), другое — угол поворота ( $\delta_{21}$ ). Однако они будут иметь одинаковую размерность и по (9.9) равны друг другу.



### 9.3. НАКОПЛЕННАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ ОТ ВИРТУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

Работа внешних сил приводит к упругим деформациям и потому — к накоплению потенциальной энергии. Значит, виртуальная работа ( $A_{ij}$ ) приводит к накоплению виртуальной накопленной потенциальной энергии упругой деформации ( $U_{ij}$ ). При этом

$$A_{ij} = U_{ij}. \quad (9.10)$$

По (9.7)

$$A_{12} = U_{12} = A_{21} = U_{21}. \quad (9.11)$$

Определим виртуальную накопленную потенциальную энергию упругой деформации действующими ВСФ.

Выделим в балке бесконечно малый элемент длиной  $dz$  (рис. 9.3а). Покажем его вначале в балке без нагрузки (рис. 9.3б).

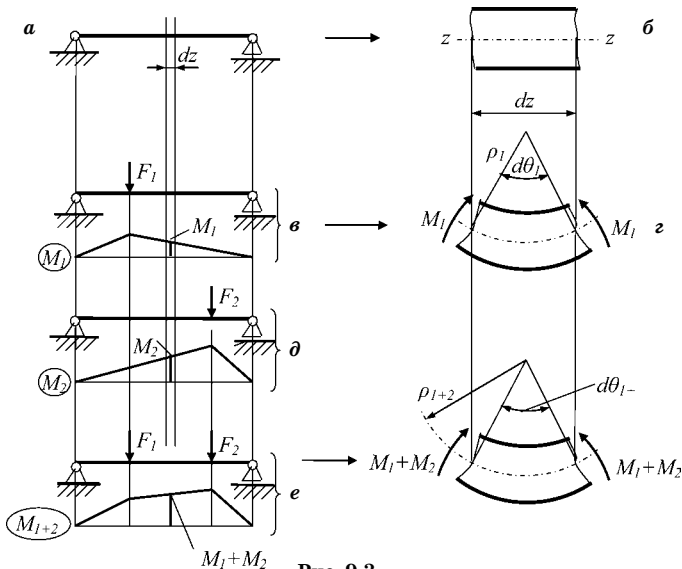


Рис. 9.3

К определению накопленной потенциальной энергии упругой деформации

Нагрузим балку нагрузкой 1-го состояния (силой  $F_1$ ), дающей эпюру  $M_1$  (рис. 9.3в). Тогда ось элемента  $dz$  примет форму дуги (рис. 9.3з). По боковым граням элемента будут действовать внутренние силовые факторы в виде изгибающих моментов  $M_1$ , которые в общем случае являются функцией от  $z$ . Обозначим радиус кривизны дуги как  $\rho_1$ .

Имеем

$$dz = d\theta_1 \rho_1 = d\theta_1 = \frac{1}{\rho_1} dz \quad (9.12)$$

и по (7.18)

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{M_1}{EI}. \quad (9.13)$$

После подстановки (9.13) в (9.12) имеем

$$d\theta_1 = \frac{M_1}{EI} dz. \quad (9.14)$$

Догрузим балку нагрузкой 2-го состояния, силой  $F_2$ , и получим эпюру моментов  $M_{1+2}$  (рис. 9.3е). Эта эпюра складывается из эпюры  $M_1$  (рис. 9.3в) и эпюры  $M_2$  (рис. 9.3д). Элемент  $dz$  изогнется дугой, имеющей  $\rho_{1+2}$  и  $d\theta_{1+2}$  (рис. 9.3ж). По его боковым граням будут действовать  $M_1 + M_2$ . Подстрочные индексы 1+2 параметров балки указывают на последовательность приложения нагрузки: сначала нагрузки 1-го состояния (1), затем добавления нагрузки 2-го состояния (2).

В результате по (9.12) и (7.18) имеем

$$dz = d\theta_{1+2} \rho_{1+2} \rightarrow d\theta_{1+2} = \frac{1}{\rho_{1+2}} dz, \quad (9.15)$$

$$\frac{1}{\rho_{1+2}} = \frac{M_1 + M_2}{EI}. \quad (9.16)$$

После подстановки (9.16) в (9.15) получаем

$$d\theta_{1+2} = \frac{M_1 + M_2}{EI} dz. \quad (9.17)$$

Формально элемент  $dz$  можно рассматривать как балку, нагруженную по краям внешними моментами  $M_1$  (рис. 9.3з) или  $M_1 + M_2$  (рис. 9.3е). Тогда виртуальная на-



скопленная потенциальная энергия упругой деформации в элементе  $dz$  при совместном действии сил обоих состояний  $dU_{12}$  может рассматриваться и вычисляться как виртуальная работа сил 1-го состояния, т. е. момента  $M_1$ , на перемещениях (угол поворота), созданных силами 2-го состояния, т. е. от момента  $M_2$ . Она равна моменту  $M_1$ , умноженному на угол его поворота при изгибе балки только силами 2-го состояния  $d\theta_{12}$ :

$$dU_{12} = M_1 d\theta_{12}. \quad (9.18)$$

Величина  $d\theta_{12}$  равна разности между углами поворота элемента  $dz$  от совместного действия сил 1-го и 2-го состояний  $d\theta_{1+2}$  и сил 1-го состояния  $d\theta_1$ . С учетом (9.14) и (9.17) получаем

$$d\theta_{12} = d\theta_{1+2} - d\theta_1 = \frac{M_1 + M_2}{EI} dz - \frac{M_1}{EI} dz = \frac{M_2}{EI} dz, \quad (9.19)$$

где функция  $M_2$  берется по условию нагружения только силами 2-го состояния (рис. 9.3*д*).

Отметим, что окончательное выражение в (9.19) могло быть получено непосредственно из условия нагружения балки лишь силами 2-го состояния, поскольку именно к этому сводится смысл вычитания в (9.19). Выражение (9.10) совместно с определением виртуальной работы в предыдущем параграфе приводит к тому же.

Подставим (9.19) в (9.18) и проинтегрируем

$$U_{12} = \int M_1 \frac{M_2}{EI} dz. \quad (9.20)$$

Поскольку выполняется условие (9.11), в котором

$$A_{21} = U_{12},$$

то с учетом (9.3) имеем

$$F_2 \Delta_{21} = \int \frac{M_1 M_2}{EI} dz. \quad (9.21)$$

Если балка имеет несколько участков (например,  $t$ ), то суммируются виртуальные накопленные потенциальные энергии упругой деформации всех  $t$  участков:

$$F_2 \Delta_{21} = \sum_{k=1}^t \int \frac{M_1 M_2}{EI} dz. \quad (9.22)$$

С учетом (9.3) и (9.11) равенство (9.22) эквивалентно равенству

$$F_1 \Delta_{12} = \sum_{k=1}^t \int \frac{M_2 M_1}{EI} dz. \quad (9.23)$$

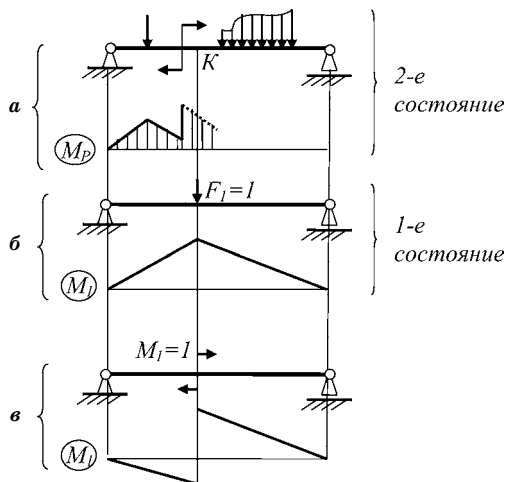
В (9.22) и (9.23) под знаком суммы стоят интегралы  $\int \frac{M_1 M_2}{EI} dz$  для каждого из  $t$  участков.

Конечно, по (9.11) в (9.22) и (9.23) тождественно равны друг другу и правые, и левые части.

### 9.4. МЕТОД МОРА

Для определения перемещений в любой конкретной координате оси  $z$  Дж. Максвеллом и О. Мором разработан метод, который в отечественной технической литературе получил название «метод Мора». Метод оказывается сколь неожиданно прост, столь и эффективен при определении перемещений в конкретной координате.

Пусть имеем прямой изгиб системы с произвольной нагрузкой, дающий некоторую эпюру моментов  $M_P$  (рис. 9.4а).



**Рис. 9.4**  
К выводу формулы определения перемещений методом Мора

Обычно  $M_p$  называют **грузовой эпюрой моментов** (грузовой, т. е. от внешней нагрузки расчетной схемы). Требуется определить прогиб в некоторой точке  $K$  ( $\Delta_K$ ).

Обозначим состояние от внешней нагрузки индексом 2, т. е.

$$M_p = M_2. \quad (9.24)$$

Рассмотрим 1-е состояние системы.

К исходной балке без нагрузки прикладываем в точке  $K$  единичную силу  $F_1 = 1$  (б/р) по предполагаемому направлению искомого прогиба (рис. 9.4б). Состояние системы от единичной силы  $F_1$  (вспомогательное состояние) обозначено индексом 1. Строим от нее эпюру единичных моментов  $M_1$  с учетом реакций, возникающих от  $F_1$  в опорах. Эпюры моментов от единичных нагрузок не штрихуются.

Так как фактически перемещение от заданной нагрузки в точке  $K$  ( $\Delta_K$ ) определяет виртуальную работу силы  $F_1$  по ее направлению, т. е.

$$\Delta_{12} = \Delta_K, \quad (9.25)$$

то (9.23) с учетом (9.24) примет вид

$$F_1 \Delta_K = \int \frac{M_p M_1}{EI} dz. \quad (9.26)$$

Поскольку  $F_1 = 1$ , то левая часть (9.26) является искомым перемещением

$$\Delta_K = \int \frac{M_p M_1}{EI} dz. \quad (9.27)$$

Выражение (9.27) называют **интегралом Мора**.

В (9.27) функция  $M_1$  определяется по расчетной схеме, в которой к основной системе приложена только единичная нагрузка. Для нее строится собственная эпюра моментов. Если требуется определить прогиб, то единичной нагрузкой является поперечная сила  $F_1 = 1$ . Если требуется определить угол поворота, то единичной нагрузкой является момент  $M_1 = 1$ .

Таким образом, интегралом Мора определено перемещение (прогиб или угол поворота) балки в точке  $K$ .



Особенностью использования формулы (9.26) является требование неизменности вида функций  $M_P$  и  $M_1$  в пределах участка интегрирования. Так как вид функций  $M_P$  и  $M_1$  в большей части задач меняется по длине балки, то балка делится на количество участков  $n$ , на каждом из которых вид этих функций неизменен, но хотя бы у одной из них меняется от участка к участку. В этом случае интеграл Мора выразится суммой интегралов по всем  $n$  участкам:

$$\Delta_K = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{Pi} M_{1i}}{E_i I_i} dz. \quad (9.28)$$

Если необходимо определить угол поворота в некоторой точке  $K$  ( $\theta_K$ ), то к балке следует приложить в этой точке единичный момент ( $M_1 = 1$ , б/р) по предполагаемому направлению искомого угла поворота балки в заданном сечении (по направлению движения часовой стрелки или против него) и построить от него с учетом возникающих реакций эпюру единичных моментов (рис. 9.4б).

Если в результате получаем отрицательное значение прогиба или угла поворота ( $\Delta_K < 0$  или  $\theta_K < 0$ ), то это означает только то, что действительное перемещение от внешней нагрузки (прогиб или угол поворота) направлено противоположно показанному направлению единичной нагрузки.

Поскольку виртуальная накопленная потенциальная энергия упругой деформации создается всеми внутренними силовыми факторами, то в общем случае для плоской системы получают выражение, называемое **полным интегралом Мора**:

$$\Delta = \int_l \frac{N_P N_1}{EA} dz + \int_l \frac{k Q_P Q_1}{GA} dz + \int_l \frac{M_P M_1}{EI} dz, \quad (9.29)$$

где коэффициент  $k$  отражает неравномерность распределения напряжений по поперечному сечению бруса.

В практических задачах, связанных с расчетом деталей технологического оборудования, существенными оказываются лишь составляющие перемещений от изгиба. Поэтому в расчетах используют интеграл Мора в форме (9.28).



### 9.5. ФОРМУЛА (ПРАВИЛО) ВЕРЕЩАГИНА

Интегрирование даже простых алгебраических функций требует проводить при использовании интеграла Мора довольно трудоемкие преобразования и вычисления. Но их упрощает формула (правило) Верещагина.

Пусть имеется балка, испытывающая изгиб в вертикальной плоскости. В некоторой ее координате определяют перемещение методом Мора. Рассмотрим ее участок постоянной изгибной жесткости ( $EI = \text{const}$ ), на котором эпюра моментов  $M_P$  имеет произвольный вид и эпюра единичных моментов  $M_1$  линейна (рис. 9.5). В этом случае (9.27) упростится до

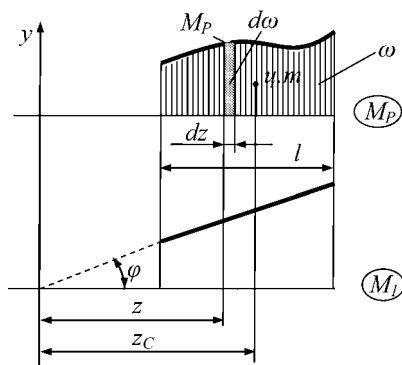
$$\Delta = \int_l \frac{M_P M_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int_l M_1 M_P dz. \quad (9.30)$$

Обозначим элементарную площадь под эпюрой как  $d\omega$ . Поскольку

$$M_P dz = d\omega, \quad (9.31)$$

то (9.30) примет вид

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_{\omega} M_1 d\omega. \quad (9.32)$$



**Рис. 9.5**  
К выводу формулы Верещагина

Продолжим линию эпюры единичных сил до пересечения с осью  $z$  (штриховая линия на рис. 9.5). Тогда также имеем

$$M_1 = z \operatorname{tg} \varphi. \quad (9.33)$$

Значит, (9.32) может быть преобразовано в

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{EI} \int_{\omega} z \cdot \operatorname{tg} \varphi d\omega = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{EI} \int_{\omega} z d\omega = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{EI} S_{y\omega} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{EI} z_C \omega = \frac{\bar{M}_1}{EI} \omega, \end{aligned} \quad (9.34)$$

где статический момент сечения относительно оси  $y$  площади  $\omega$ :

$$S_{y\omega} = \int_{\omega} z d\omega = z_C \omega, \quad (9.35)$$

и величина момента на эпюре единичных моментов под центром тяжести площади  $\omega$  равна

$$\bar{M}_1 = \operatorname{tg} \varphi \cdot z_C. \quad (9.36)$$

Если на участке площадь под эпюрой представляет собой сложную фигуру, то вследствие аддитивности интеграла эту площадь можно разбить на несколько простых фигур. Для  $n$  участков или простых площадей, составляющих данную эпюру  $M_p$ , по (9.34) получаем

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{M}_{1i}}{(EI)_i} \omega_i. \quad (9.37)$$

Если изгибная жесткость  $EI_i$  постоянна для всех участков, то (9.37) примет вид

$$\Delta = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n \bar{M}_{1i} \omega_i. \quad (9.38)$$

Выражение (9.38) представляет собой формулу (правило) Верещагина. Она заменяет интегрирование по (9.28) суммой произведений величин площадей простых фигур эпюры  $M_p$  на ординаты  $M_1$  под центрами тяжести этих фигур. Ординаты на эпюре единичных сил обозначены как  $M_{1i}$ . Формулы для определения площадей основных простых фигур и координат их центров тяжести даны в конце учебного пособия.



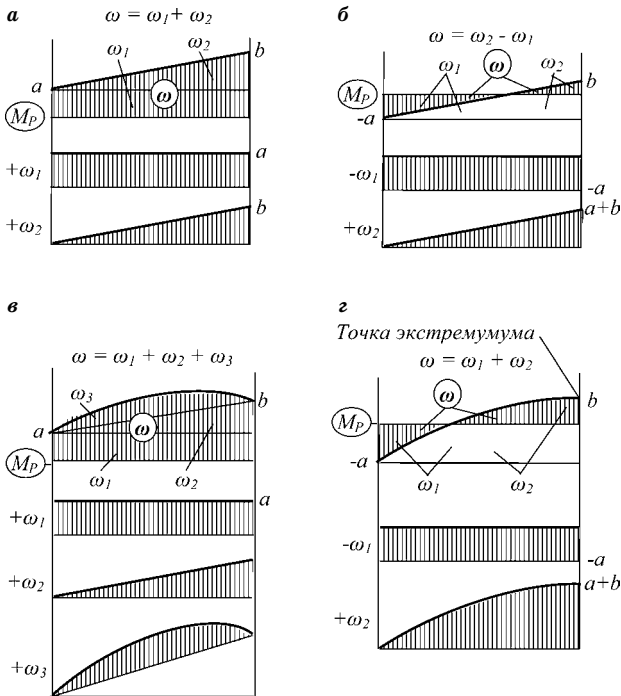


Рис. 9.6

Графическое пояснение к выбору элементарных площадей

Если  $M_p$  линейная функция, то безразлично, на какой эпюре выделяют площадки элементарных фигур: на  $M_p$  или на  $M_1$ . Величины моментов берут на другой эпюре под центром тяжести каждой выделенной площадки  $\omega$ .

Эпюра  $M_p$  штрихуется как обычно, а эпюра  $M_1$  не штрихуется. Знаки на них не ставят, чтобы не мешали дальнейшим построениям при вычислении  $M_1$ . Со знаком показывают сами значения моментов на границах выделяемых участков.

Часто эпюра моментов образует достаточно сложную заштрихованную площадь (рис. 9.6). Аддитивность интеграла в формулах (9.27) или (9.28) позволяет разделять площадь под эпюрой на отдельные фигуры, а также добавлять и одновременно вычитать нужные для упрощения вида площадей фигуры.

В случае, показанном на рис. 9.6а, представляем заштрихованную площадь эпюры в виде двух площадей: положительных площадей прямоугольника ( $\omega_1$ ) и треугольника ( $\omega_2$ ); в случае, показанном на рис. 9.6б, — в виде двух фигур: отрицательной площади прямоугольника ( $-\omega_1$ ) и положительной треугольника ( $\omega_2$ ); в случае, показанном на рис. 9.6в, — в виде трех фигур: положительных площадей прямоугольника ( $\omega_1$ ), треугольника ( $\omega_2$ ) и сегмента ( $\omega_3$ ). При этом сегмент может иметь или не иметь экстремум в какой-либо точке на участке. Если квадратичная кривая эпюры моментов (т. е. от  $q = \text{const}$ ) на границе участка имеет экстремум в точке  $b$  (эпюра  $Q$  должна проходить через ноль), то для эпюры моментов по рис. 9.6г достаточно выделить две элементарные площади: отрицательную площадь прямоугольника ( $-\omega_1$ ) и положительную площадь выпуклого криволинейного треугольника ( $\omega_2$ ). Численные примеры представления сложных площадей простыми фигурами даны ниже.

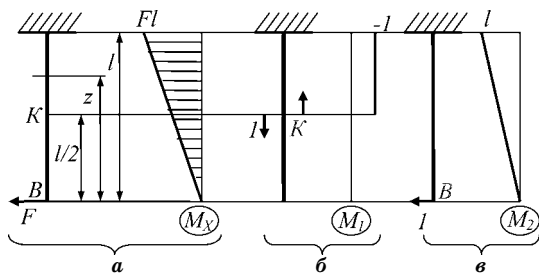
**Пример 9.1.**

Рассмотрим пример расчета угла поворота и прогиба балки методом Мора.

**Дано:** консольная балка постоянной жесткости ( $EI = \text{const}$ ) по рис. 9.7а.

**Требуется:** рассчитать угол поворота балки в точке  $K$  и прогиб в точке  $B$  с помощью интегралов Мора по (9.23).

**Решение.** 1. Строим эпюру моментов от внешней заданной нагрузки, обозначая эпюру моментов в вертикальной



**Рис. 9.7**  
К решению примера 9.1



плоскости как  $M_P = M_x$  (см. рис. 9.7а). Момент в сечении  $z$  будет определяться функцией

$$M_x = Fz. \quad (9.39)$$

2. Для определения угла поворота в точке  $K$  к исходной балке без нагрузки прикладываем в этой же точке единичный момент и строим эпюру единичных моментов  $M_1$  (рис. 9.7б). Направление единичного момента произвольное. Если в результате расчета получим положительное значение угла, значит, балка в точке  $K$  повернется по направлению единичного момента. Если получим отрицательное значение угла, значит, балка повернется в противоположную сторону. Единичный момент в сечении  $z$  будет определяться функцией

$$M_1 = -1. \quad (9.40)$$

3. Записываем интеграл Мора по (9.30), куда подставляем (9.39) и (9.40) и выносим за знак интеграла постоянный знаменатель  $EI = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \theta_K &= \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l M_x M_1 dz = \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l F \cdot z \cdot (-1) \cdot dz = \\ &= -\frac{F}{EI} \frac{z^2}{2} \Big|_{l/2}^l = -\frac{F}{EI} \frac{l^2 - (l/2)^2}{2} = -\frac{3}{8} \frac{F}{EI} l^2. \end{aligned}$$

Поскольку получили знак «минус», следовательно, балка повернется по часовой стрелке на угол  $\frac{3}{8} \frac{F}{EI} l^2$  рад (против направления единичного момента).

4. Для определения прогиба в точке  $B$  к исходной балке без нагрузки прикладываем в этой точке единичную силу и строим эпюру единичных моментов  $M_2$  (рис. 9.7в). Направление единичной силы произвольное. В данном случае выбрано — влево.

Единичный момент для выбранного направления единичной силы будет определяться в сечении  $z$  функцией

$$M_2 = 1z. \quad (9.41)$$

5. Записываем интеграл Мора по (9.30), куда подставляем (9.39) и (9.41) и выносим за знак интеграла  $EI = \text{const}$ :

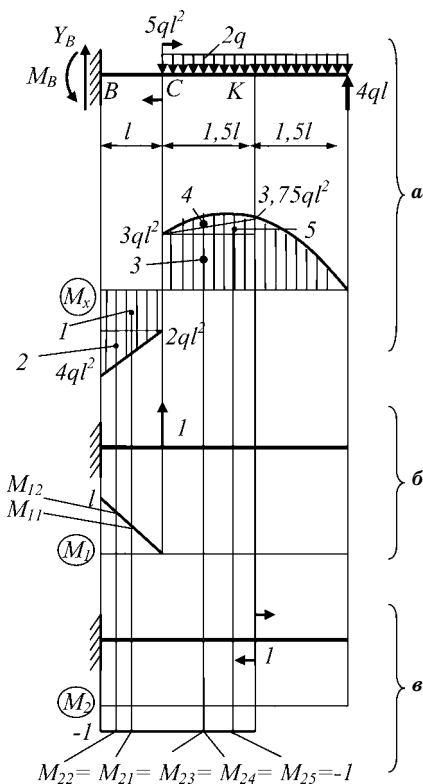
$$y_B = \frac{1}{EI} \int_0^l M_x M_1 dz = \frac{1}{EI} \int_0^l F \cdot z \cdot z \cdot dz = \frac{F}{EI} \frac{z^3}{3} \Big|_0^l = \frac{F l^3}{EI \cdot 3}.$$

Поскольку получили положительное значение прогиба, следовательно, балка в точке *B* сместится влево (по направлению единичной силы).

**Пример 9.2.** Рассмотрим пример расчета угла поворота и прогиба балки по формуле Верещагина.

**Дано:** расчетная схема и решение примера 8.3 (рис. 8.6).

**Требуется:** определить в расчетной схеме прогиб в точке *C* и угол поворота в точке *K* (рис. 9.8*a*) с помощью формулы Верещагина (9.38).



**Рис. 9.8**  
К решению примера 9.2

Воспользуемся расчетами примера 8.3 (см. рис. 8.6). Определим в расчетной схеме с помощью формулы Верещагина (9.38) прогиб в точке  $C$  и угол поворота в точке  $K$  (рис. 9.8а).

*Решение.* 1. Для определения прогиба прикладываем к балке без нагрузки единичную силу в точке  $C$ . Направление силы выбирается по предполагаемому направлению прогиба. Считаем, что балка в точке  $C$  сместится вверх, и потому единичную силу направляем вверх. Строим от нее эпюру единичных моментов  $M_1$ , которая не штрихуется (рис. 9.8б).

На участке от 0 до  $l$  от заделки, т. е. на участке существования эпюры  $M_1$ , выделяем на эпюре  $M_x$  две элементарные фигуры с отрицательными знаками площадей:

$$1) \text{ прямоугольник } \left( \omega_1 = -2ql^2l, M_{11} = \frac{1}{2} \right);$$

$$2) \text{ треугольник } \left( \omega_2 = -\frac{1}{2}2ql^2l, M_{12} = \frac{2l}{3} \right).$$

Величины площадей и координаты их центров тяжести получены с учетом таблицы, данной в конце учебного пособия (формулы для определения площадей основных простых фигур и координат их центров тяжести) и эпюр рис. 9.7. Поэтому по (9.38)

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^2 \omega_i \bar{M}_{1i} = \frac{1}{EI} (\omega_1 \bar{M}_{11} + \omega_2 \bar{M}_{12}) = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ (-2ql^2l) \frac{l}{2} + \left( -\frac{1}{2}2ql^2l \right) \frac{2l}{3} \right] = -1,67 \frac{ql^4}{EI}, \end{aligned}$$

что соответствует значению, полученному с помощью универсального уравнения (рис. 8.6).

2. Для определения угла поворота прикладываем к балке без нагрузки единичный момент в точке  $K$ . Направление момента выбирается по предполагаемому направлению поворота балки в этой точке. Считаем, что балка в точке  $K$  повернется по часовой стрелке, и потому единичный момент направляем по часовой стрелке. Строим от него эпюру единичных моментов  $M_2$ , которая также не штрихуется (рис. 9.8в).



3. Выделяем на эпюре  $M_x$  элементарные фигуры площа- док. На всей эпюре  $M_x$  (на участке протяженности эпюры  $M_2$ , т. е. на участке  $BK$ ) имеем пять простых фигур: отрица- тельные площади прямоугольника 1 ( $\omega_1 = -2ql^2l, M_{11} = \frac{l}{2}$ ); и треугольника 2 ( $\omega_2 = -\frac{1}{2}2ql^2l, M_{21} = -1$ ); положительные площади прямоугольника 3 ( $\omega_3 = 3ql^21,5l, M_{23} = -1$ ), сег- мента 4 ( $\omega_4 = \frac{2q(1,5l)^3}{12}, M_{24} = -1$ ) и треугольника 5 ( $\omega_5 = -\frac{1}{2}0,75ql^21,5l, M_{25} = -1$ ). Значения ординат  $M_{1i}$  определя- ли из соотношений подобных треугольников.

4. В соответствии с (9.38) имеем

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \sum_{j=1}^4 \omega_j \bar{M}_{1j} = \frac{1}{EI} [(-2ql^2l)(-1) + \left(-\frac{1}{2}2ql^2l\right)(-1) + 3ql^21,5l(-1) + \frac{2q(1,5l)^3}{12}(-1) + \frac{1}{2}0,75ql^21,5l(-1)] = -2,63 \frac{ql^3}{EI}.$$

Знак «минус» указывает на то, что угол поворота проти- воположен направлению  $M_1$ , т. е. правый край балки при- поднимается, как и получилось в примере 8.3 (см. рис. 8.6).

### Пример 9.3.

Д а н о: расчетная схема и решение примера 8.2.

Т р е б у е т с я: определить с помощью формулы Верещ- агина (9.38) угол поворота балки в точке  $D$  (см. рис. 9.9).

*Решение.* 1. Прикладываем к балке без нагрузки еди- ничный момент в точке  $D$ .

2. Определяем опорные реакции  $Y'_B$  и  $Y'_C$ .

3. Строим эпюру единичных моментов  $M_1$ .

4. Выделяем на эпюре  $M_x$  площади простых фигур. Для упрощения вычислений эпюру на участке  $BD$  представля- ем в виде положительной величины площади прямоуголь- ника 1 ( $\omega_1 = -2ql^2l, M_{11} = \frac{l}{2}$ ) и отрицательных площадей треугольника 2 ( $\omega_2 = -\frac{1}{2}2ql^22l, M_{12} = \frac{1}{3}\frac{2}{3}$ ) и сегмента 3

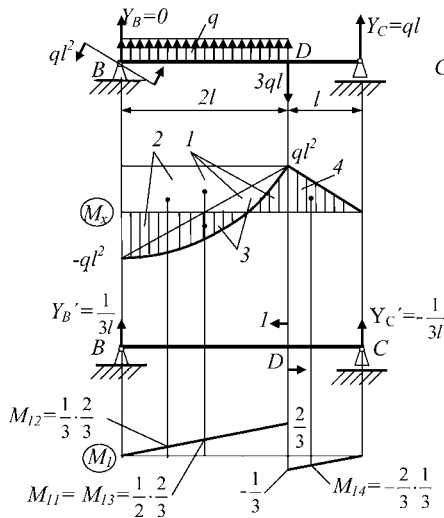


Рис. 9.9  
К решению примера 9.3

$\left( \omega_3 = \frac{2q(2l)^3}{12}, M_{13} \frac{1}{3} \frac{2}{3} \right)$ . На участке  $DC$  имеем треугольник

4  $\left( \omega_4 = \frac{1}{2}ql^2l, M_{12} = \frac{1}{3} \frac{2}{3} \right)$ . При составлении слагаемого от

сегмента обратим внимание на то, что здесь величина распределенной нагрузки  $2q$  и длина участка  $BD$  равна  $2l$ .

5. Записываем формулу Верещагина для данного случая:

$$\theta_D = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^4 \omega_i \bar{M}_{1i}.$$

6. Определяем величины элементарных фигур  $\omega_i$  и на эпюре единичных моментов  $M_1$  вычисляем величины единичных моментов  $M_{1i}$ , имеющих координаты центров тяжести фигур  $\omega_i$ .

7. Вычисляем угол поворота в точке  $D$ :

$$\begin{aligned} \theta_D &= \frac{1}{EI} \left[ (ql^2 2l) \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) + \left( -\frac{1}{2} 2ql^2 2l \right) \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-q(2l)^3}{12} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} ql^2 l - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right] = -0,11 \frac{ql^3}{EI}. \end{aligned}$$

Отрицательный знак указывает на то, что поворот балки в точке  $D$  противоположен направлению единичного момента  $M_1$ , т. е. направлен по направлению движения часовой стрелки. Полученное значение угла поворота в точке  $D$  совпадает с решением, полученным с помощью универсальных уравнений (см. рис. 8.5).

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ  
«ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ МЕТОДОМ МОРА»**

1. Какие системы называются линейно деформируемыми?
2. В каких лабораторных работах подтверждена линейная деформируемость систем?
3. В чем заключается принцип суперпозиции?
4. Что означает термин «обобщенная сила»?
5. Что означает термин «обобщенное перемещение»?
6. Что означает термин «состояние системы»?
7. Что обозначают как  $\Delta_{ii}$  и как  $\Delta_{ij}$ ?
8. Что обозначают как  $\delta_{ii}$  и как  $\delta_{ij}$ ?
9. Почему работа силы на собственных перемещениях равна  $\frac{1}{2} F_1 \Delta_{11}$ ?
10. Почему работа силы на перемещениях, вызванных другой нагрузкой, определяется формулой  $F_1 \Delta_{12}$ ?
11. Какую работу называют виртуальной?
12. В чем смысл теоремы Бетти?
13. В чем смысл теоремы Максвелла?
14. Что означают члены в равенстве (9.5)?
15. Что означают члены в равенстве (9.11)?
16. Что называют грузовой эпюрой моментов?
17. Что называют эпюрой единичных сил?
18. Какую единичную нагрузку, почему и в каком месте следует приложить при определении прогиба?
19. Какую единичную нагрузку, почему и в каком месте следует приложить при определении угла поворота?
20. В чем заключается методика определения перемещений методом Мора?
21. Что называют интегралом Мора?
22. Какой вид приобретает интеграл Мора для нескольких участков?
23. В чем преимущество формулы Верещагина?
24. Для каких балок применяют формулу Верещагина?
25. Можно ли использовать формулу Верещагина для балок переменного сечения?

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПРИ ИЗГИБЕ

### 10.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

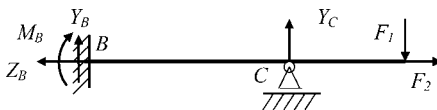
Для изучения методик расчета статически неопределимых систем при изгибе нам необходимо вспомнить некоторые положения из выше изложенных параграфов:

1. Для пространственной системы сил имеем шесть независимых уравнений статики, для плоской системы непараллельных сил — три, для плоской системы параллельных сил — два, для линейной системы — одно.

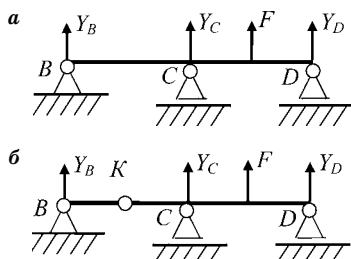
2. Если число связей равно числу уравнений статики, то такую систему называют статически определимой.

3. Если число связей превышает число независимых уравнений статики для данной системы, то ее называют статически неопределимой.

4. Число связей, которые можно отбросить, сохраняя статичность системы, называют числом «лишних» (в дальнейшем будем писать без кавычек) связей. Его также называют степенью статической неопределимости системы, которая соответствует числу необходимых дополнительных уравнений (к уравнениям статики) для определения неизвестных реакций и внутренних силовых факторов. Раскрыть статическую неопределимость — значит найти величины усилий в лишних связях. На рис. 10.1 показана система статически неопределимая один раз.



**Рис. 10.1**  
Статически неопределимая балка



**Рис. 10.2**  
Балка без шарнира и балка с шарниром статики

5. Наличие шарнира, соединяющего две части балки, позволяет составить для любой из них уравнение равновесия в виде равенства нулю суммы моментов относительно оси шарнира. В этом уравнении учитывается нагрузка лишь по одну сторону шарнира.

Схемы на рис. 10.2 иллюстрируют влияние наличия шарниров на число уравнений статики для заданной системы.

Так, для балки с системой параллельных сил имеем два независимых уравнения статики (рис. 10.2а):

$$\sum M = 0 \text{ и } \sum F = 0, \quad (10.1)$$

при трех опорных реакциях. Следовательно, система по рис. 10.2а один раз статически неопределима.

Для балки с шарниром (рис. 10.2б) имеем три уравнения статики: два по (10.1) и добавляющееся к ним равенство нулю в точке  $K$  моментов от нагрузки в расчетной схеме справа или слева от шарнира:

$$\begin{aligned} \sum M K_{\text{лев}} &= 0 \\ \text{или } \sum M K_{\text{прав}} &= 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Следовательно, система по рис. 10.2б статически определима.

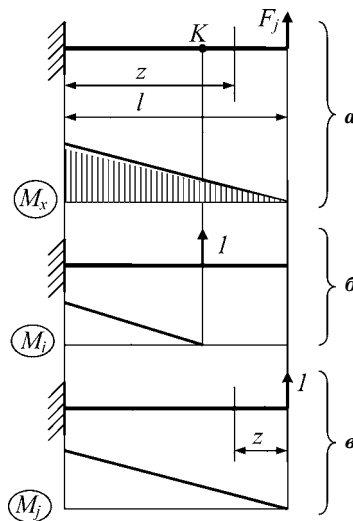
Для раскрытия статической неопределимости неизвестных необходимо составить столько уравнений, дополнительных к уравнениям статики, сколько раз статически неопределима система. Эти дополнительные уравнения составляют исходя из условий совместности перемещений элементов системы. Их вид определяется тем, какой применяется метод раскрытия статической неопределимости.

## 10.2. ГРУЗОВЫЕ И ЕДИНИЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Чтобы определить перемещение оси балки по  $i$ -му направлению в некоторой точке  $K$  методом Мора, необходимо знать функцию моментов  $M_x$  от внешней нагрузки (рис. 10.3а) и функцию моментов  $M_i$  (рис. 10.3б) только от единичной нагрузки, приложенной в точке  $K$  по  $i$ -му направлению. При этом если надо найти прогиб, то в точке  $K$  следует приложить единичную силу, если — угловое перемещение, то в точке  $K$  следует приложить единичный момент.

Перемещения в виде прогиба или угла поворота в некоторой точке  $K$  в  $i$ -м направлении от внешней нагрузки  $F_j$  (силы или момента) обозначают как  $\Delta_{iF}$ . Они называются грузовыми. Интеграл Мора для их вычисления перемещения в точке  $K$  от силы  $F_j$  имеет вид

$$\Delta_{iF} = \int \frac{M_x M_i}{EI} dz. \quad (10.3)$$



**Рис. 10.3**  
Грузовая и единичные эпюры моментов балки

На рис. 10.3а–б показано определение перемещения в виде прогиба в точке  $K$ , поскольку в ней приложена единичная сила, а не единичный момент.

Единичное перемещение в  $i$ -м направлении от единичной нагрузки, приложенной в  $j$ -й точке по направлению силы  $F_j$  (рис. 10.3б–в), определяется интегралом Мора в виде

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_j M_i}{EI} dz, \quad (10.4)$$

где  $M_i$  и  $M_j$  — функции моментов от единичных нагрузок, приложенных в  $i$ -м и  $j$ -м направлениях соответственно.

Поскольку  $M_i M_j = M_j M_i$ , то этим же интегралом определяется единичное перемещение в  $j$ -м направлении от единичной нагрузки, приложенной в  $i$ -й точке. Для этого утверждения не имеет значения, какой вид единичной нагрузки приложен в  $i$ -й или  $j$ -й точке: единичная сила или единичный момент.

Функция моментов в сечении  $z$  от внешних сил будет иметь вид

$$M_x = F_j(l - z), \quad (10.5)$$

значит,

$$\Delta_{iF} = \int \frac{F_j(l - z)M_i}{EI} dz = F_j \int \frac{(l - z)M_i}{EI} dz. \quad (10.6)$$

Если вместо  $F_j$  подставим по ее направлению в том же сечении  $j$ -ю единичную силу (рис. 10.3в), то единичный момент от нее будет равен

$$M_j = 1(l - z). \quad (10.7)$$

Подставим (10.7) в (10.6) и получим

$$\Delta_{iF} = F_j \int \frac{M_j M_i}{EI} dz = F_j \delta_{ij}. \quad (10.8)$$

Из формулы (10.8) следует, что грузовое перемещение от нагрузки (силы или момента) может быть определено через единичное перемещение  $\delta_{ij}$  от такой же по виду и там же приложенной нагрузки, но единичной по величине. Для этого по (10.8) достаточно найденное единичное перемещение  $\delta_{ij}$  умножить на модуль грузовой нагрузки.



### 10.3. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СИСТЕМА

Систему, освобожденную от лишних связей и всей нагрузки, называют **основной системой**. Для одной статически неопределимой системы могут быть выбраны различные лишние связи. Это означает, что для одной статически неопределимой системы могут быть выбраны различные основные системы.

Так, в плоской раме по рис. 10.4а с шестью реакциями при трех независимых уравнениях статики имеем три лишних связи. Варианты сочетаний трех лишних связей могут быть выбраны различающимися. Поэтому основные системы также окажутся различными:

- по рис. 10.4б убрана правая опора с ее тремя связями;
- по рис. 10.4в разрезан горизонтальный стержень рамы с его тремя внутренними силовыми факторами (убраны момент, поперечная и продольная силы и получена основная система в виде двух Г-образных рам);
- по рис. 10.4г заменены обе заделки шарнирными опорами, одна из которых стала подвижной (убраны моменты в обеих опорах и продольная сила в правой опоре);
- по рис. 10.4д в каждый из трех брусьев врезан шарнир (убрано в каждом брусее по моменту).

Непрерывным условием правильного выбора основной системы является то, что оставшиеся связи должны обеспечивать кинематическую неподвижность системы в целом и ее отдельных частей. Кинематически неподвижной названа система, в которой перемещения всей системы или отдельных нагруженных ее элементов не могут происхо-

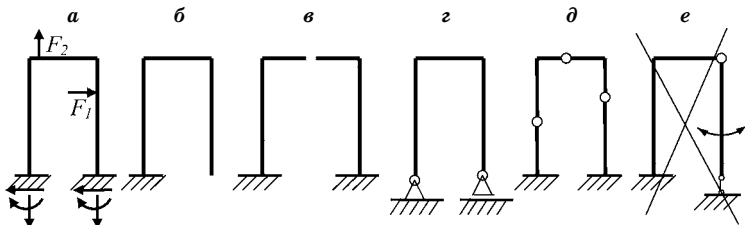


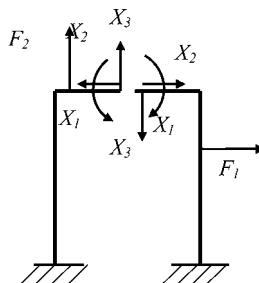
Рис. 10.4  
Рамная система и варианты ее основных систем



дить без деформации. Так, последний вариант основной системы по рис. 10.4е невозможен, поскольку правая вертикальная ветвь может совершать вращательное в некоторых пределах движение вокруг вставленного верхнего шарнира.

Наиболее рациональным с точки зрения простоты дальнейшего построения эпюр является выбор основной системы, состоящей из консолей (рис. 10.4в).

**Эквивалентная система** — это основная система, дополненная всей заданной нагрузкой и реакциями отброшенных связей. Реакции отброшенных связей обозначают символом  $X_i$  (рис. 10.5). Здесь обозначены:  $X_1$  — момент,  $X_2$  и  $X_3$  — соответственно силы продольная и поперечная. Продольную силу и изгибающий момент называют симметричными силовыми факторами, поперечную силу — кососимметричным. При этом если лишними связями приняты внутренние силовые факторы в стержне, то показанные вместо них в эквивалентной системе  $X_i$  рассматриваются уже как внешняя нагрузка (рис. 10.5).



**Рис. 10.5**  
Три раза статически неопределимая эквивалентная система

#### 10.4. РАСКРЫТИЕ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ МЕТОДОМ СИЛ. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

**Раскрыть статическую неопределимость** значит найти величины реакций лишних связей.

**Методом сил** называют метод раскрытия статической неопределимости, в котором за неизвестные принимают усилия, возникающие в лишних связях.

Существует также **метод деформаций**, при котором за неизвестные принимают деформации. И тот и другой методы равноценны и могут быть применены в машинных алгоритмах решений на ПК.

Вначале рассмотрим простой пример (см. рис. 10.6).

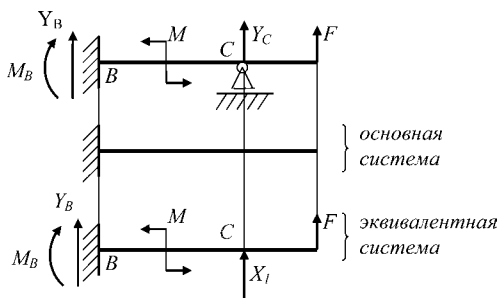


Рис. 10.6

Последовательность построения эквивалентной системы

В показанной расчетной схеме имеются три неизвестные реакции при двух уравнениях статики. Значит, задача является один раз статически неопределимой.

Выбираем основную систему, отбрасывая шарнирную подвижную опору. Дополняем основную систему до эквивалентной, заменяя реакцию отброшенной связи неизвестной силой  $X_1$ . Ее направление вверх или вниз по вертикальной линии действия отброшенной реакции выбирается произвольно. С этого момента решаем эквивалентную систему.

Для определения всех реакций необходимо еще одно уравнение. Его получаем из геометрической стороны задачи: прогиб по направлению силы  $X_1$  должен быть равен нулю, поскольку эта сила заменяет опору  $C$ :

$$\Delta_1^C = 0. \quad (10.9)$$

Этот прогиб по направлению реакции первой отброшенной связи (в точке  $C$ )  $\Delta_1^C$  складывается из прогиба только от силы  $X_1$  ( $\Delta_{1X_1}$ ) и прогиба только от известной внешней нагрузки ( $\Delta_{1P}$ ):

$$\Delta_1^C = \Delta_{1X_1} + \Delta_{1P} \rightarrow \Delta_{1X_1} + \Delta_{1P} = 0. \quad (10.10)$$

Представим по (10.8) неизвестную вектор-силу  $X_1$  как произведение единичной вектор-силы  $\mathbf{1}$  по направлению  $X_1$  на модуль силы  $X_1$ :

$$X_1 = \mathbf{1} \cdot X_1. \quad (10.11)$$

Тогда в соответствии с (10.8) перемещение от реакции отброшенной связи будет равно произведению перемещения от единичной нагрузки на величину модуля этой реакции

$$\Delta_{1X1} = \delta_{11}X_1. \quad (10.12)$$

Поэтому с учетом (10.9) имеем

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (10.13)$$

В (10.13)  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  могут быть определены по физической стороне задачи, поскольку известны величины и направления создающих их нагрузок. Значит, в (10.13) остается лишь одна неизвестная —  $X_1$ , которую и определяем.

В общем случае можем составить столько дополнительных уравнений по типу (10.13), сколько имеем лишних связей, т. е. сколько получили неизвестных  $X_i$ . Именно такого количества дополнительных уравнений нам не хватало для того, чтобы определить все неизвестные.

Для  $n$  неизвестных  $X_n$  имеем  $n$  геометрических условий в виде  $n$  дополнительных уравнений, которые составим по типу (10.13):

$$\begin{aligned} \Delta_1 = 0 &\rightarrow \Delta_{1X1} + \Delta_{1X2} + \Delta_{1X3} + \dots + \Delta_{1Xn} + \Delta_{1P} = 0, \\ \Delta_2 = 0 &\rightarrow \Delta_{2X1} + \Delta_{2X2} + \Delta_{2X3} + \dots + \Delta_{2Xn} + \Delta_{2P} = 0, \\ \Delta_3 = 0 &\rightarrow \Delta_{3X1} + \Delta_{3X2} + \Delta_{3X3} + \dots + \Delta_{3Xn} + \Delta_{3P} = 0, \\ &\dots \\ \Delta_n = 0 &\rightarrow \Delta_{nX1} + \Delta_{nX2} + \Delta_{nX3} + \dots + \Delta_{nXn} + \Delta_{nP} = 0. \end{aligned} \quad (10.14)$$

По аналогии с (10.12) имеем

$$\Delta_{iXj} = \delta_{ij}X_j. \quad (10.15)$$

Тогда (9.50) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \dots + \delta_{3n}X_n + \Delta_{3P} &= 0, \\ &\dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Эти недостающие дополнительные уравнения называются **каноническими уравнениями метода сил** (каноническими, т. е. имеющими устоявшуюся, традиционную форму записи).

### 10.5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРИ РАСКРЫТИИ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ МЕТОДОМ СИЛ

Метод сил состоит из следующей последовательности операций.

1. Выбор основной системы и дополнение ее до эквивалентной, в которой направление реакций в отброшенных лишних связях,  $X_i$ , выбирают произвольно.

2. Геометрическая сторона задачи: составление канонических уравнений.

3. Статическая сторона задачи: без учета отброшенных лишних связей определение оставшихся в эквивалентной системе опорных реакций с помощью уравнений статики и построение эпюры моментов, которую называют грузовой и обозначают как  $M_p$ .

4. Физическая сторона задачи: определение грузовых и единичных перемещений для канонических уравнений метода сил, для чего к основной системе поочередно прикладывают единичные силы строго по направлению  $X_i$ . От этих единичных сил строят фиктивные эпюры  $M_i$ .

5. Синтез: определение лишних неизвестных усилий  $X_i$  решением системы канонических уравнений, в которые подставлены выражения найденных единичных и грузовых перемещений. Если величину какого-либо  $X_i$  получили отрицательной, значит, истинное направление реакции отброшенной связи противоположно выбранному. После этого задача становится статически определимой.

6. Определение остальных силовых факторов (истинных реакций и внутренних силовых факторов) с учетом найденных  $X_i$  и всей заданной внешней нагрузки.

7. Построение эпюр истинных внутренних силовых факторов.

8. Проверка правильности определения реакций лишних связей: вычисление перемещения в некотором сечении с учетом всей действующей на систему нагрузки  $\Delta_i$ , включая найденные лишние связи. При этом должны получить подтверждение его равенства величине, допускаемой имеющейся здесь связью (нулю прогиба и угла поворота в жестких опорах, нулю прогибов в шарнирных опорах).

9. Расчет на прочность.

### 10.6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ ПРИ РАСКРЫТИИ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ

Данный вопрос рассмотрим в виде конкретного примера.

Пусть имеется балка с симметричной нагрузкой и постоянной изгибной жесткостью (см. рис. 10.7а).

Для получения основной системы сделаем по оси симметрии расчетной схемы мысленный разрез — получим две консоли (рис. 10.7б).

Продольная сила  $N$  и изгибающий момент  $M$  являются **симметричными силовыми факторами**, поперечная сила  $Q$  — **кососимметричным силовым фактором**.

В общем случае на свободных краях консолей возникают изгибающий момент и поперечная сила, которые в эквивалентной системе обозначим  $X_1$  и  $X_2$  соответственно (рис. 10.7в). Продольного внутреннего силового фактора в данном случае не возникает. Значит, система два раза статически неопределима, и для нее будут иметь место два канонических уравнения по (9.52):

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0.\end{aligned}$$

Для определения коэффициентов (поперечные и угловые перемещения единичные  $\delta_{ij}$  и грузовые  $\Delta_{iP}$ ) строим эпюры моментов от заданной внешней нагрузки (рис. 10.7г) и эпюры единичных моментов от единичного момента (рис. 10.7д) и единичной силы (рис. 10.7е).



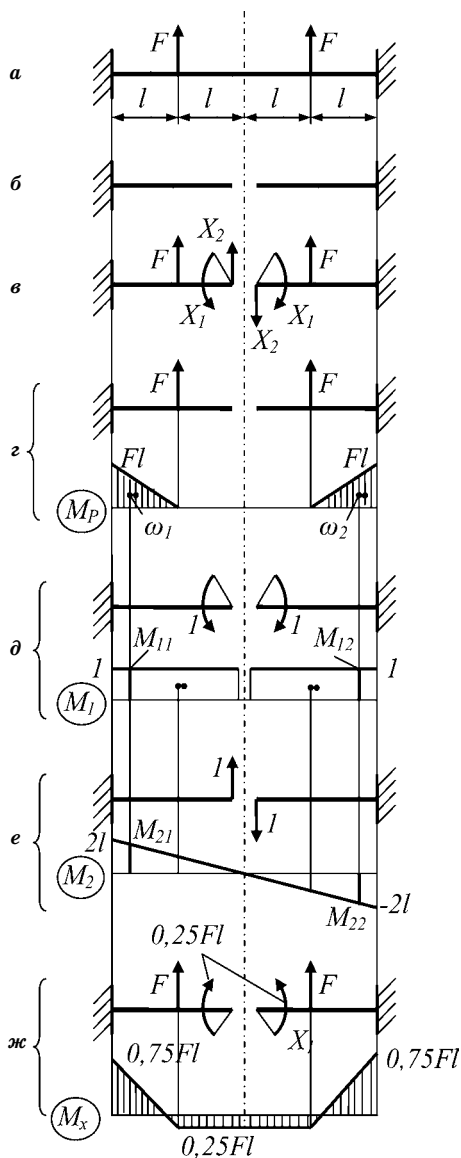


Рис. 10.7

Пример влияния свойств симметрии  
на количество неизвестных

Перемещения определяем по формуле Верещагина (9.33) с учетом того, что изгибная жесткость постоянна.

Грузовой прогиб по первому направлению определяем, используя эпюры  $M_P$  и  $M_1$ :

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^2 \bar{M}_{1i} \omega_i = \frac{2}{EI} \left( \frac{1}{2} Fl \right) 1 = \frac{Fl}{EI}.$$

Грузовой прогиб по второму направлению определяем, используя эпюры  $M_P$  и  $M_2$ :

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EI} \sum_{j=1}^2 \bar{M}_{1j} \omega_j = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} Fl \right) \frac{5}{3} l + \left( \frac{1}{2} Fl \right) \left( -\frac{5}{3} l \right) \right] = 0.$$

Прогиб от первой единичной нагрузки по ее собственному направлению определяем, используя эпюру  $M_1$  сначала как грузовую от этой единичной нагрузки и затем ее же как единичную:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \sum_{k=1}^1 \bar{M}_{1k} \omega_k = \frac{1}{EI} (1 \cdot 4l) 1 = 4 \frac{l}{EI}.$$

Прогиб от первой единичной нагрузки по направлению второй единичной нагрузки определяем, используя эпюры  $M_1$  как грузовую и  $M_2$  как единичную:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \sum_{t=1}^2 \bar{M}_{1t} \omega_t = \frac{1}{EI} \left[ (1 \cdot 2l) \frac{1}{2} 2l + (1 \cdot 2l) \left( -\frac{1}{2} 2l \right) \right] = 0.$$

Прогиб от второй единичной нагрузки по ее собственному направлению определяем аналогично  $\delta_{11}$ , но используя эпюру  $M_2$ :

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{1}{EI} \sum_{n=1}^1 \bar{M}_{2n} \omega_n = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} 2l 2l \right) \frac{2}{3} 2l + \left( -\frac{1}{2} 2l 2l \right) \left( -\frac{2}{3} 2l \right) \right] = \frac{16}{3} \frac{l^3}{EI}. \end{aligned}$$

Подставляя значения коэффициентов в канонические уравнения метода сил, получаем

$$X_2 = 0,$$

$$X_1 = -\frac{1}{4} Fl.$$



Кососимметричный силовой фактор оказался равным нулю ( $X_2 = 0$ ), потому что параметры симметричных эпюр перемножаются на параметры кососимметричных. Такое перемножение в многочленах в результате дает нуль.

Заметим, что в силу симметрии задачи можно было без проделанных выкладок сказать, что по оси симметрии будет иметь место чистый изгиб. Поэтому поперечная сила (кососимметричный силовой фактор) должна быть равна нулю.

Вывод: в симметричных системах по их оси симметрии кососимметричный силовой фактор равен нулю; в кососимметричных системах по их оси симметрии симметричный силовой фактор также равен нулю.

В других местах все внутренние силовые факторы могут быть отличны от нуля. Поэтому такие системы удобно решать, создавая основную систему разрезом по оси симметрии. Тогда получаем меньшее число канонических уравнений метода сил на величину отсутствующих связей по оси симметрии.

С момента определения величин реакций лишних связей задача становится статически определимой: определяют истинные реакции, строят эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  (на рис. 10.7ж построена только эпюра моментов) уже от всей нагрузки, проводят расчет на прочность.

### Пример 10.1.

**Д а н о:** расчетная схема балки постоянной изгибной жесткости (рис. 10.8а).

**Т р е б у е т с я:** раскрыть статическую неопределимость балки.

Раскроем статическую неопределимость балки с постоянной изгибной жесткостью.

Имеем три опорные реакции и два уравнения статики, следовательно, задача один раз статически неопределима.

Выбираем основную систему в виде консольной балки (рис. 10.8б). Дополняем ее до эквивалентной (рис. 10.8в). Записываем канонические уравнения по (10.16):

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$



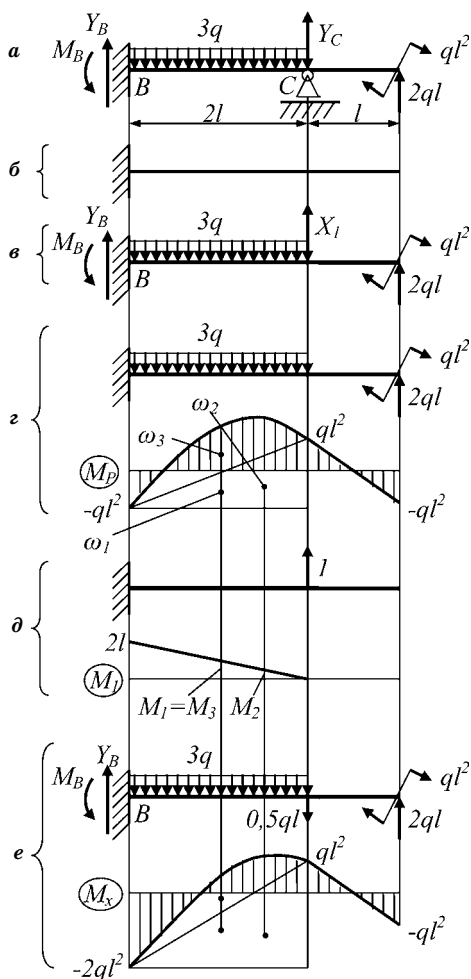


Рис. 10.8  
К решению примера 10.1

Определяем коэффициенты по формуле Верещагина (9.33) с учетом того, что изгибная жесткость постоянна.

С этой целью показываем основную систему, дополненную заданной внешней нагрузкой, и строим для нее грузовую эпюру моментов (рис. 10.8г). Затем к основной системе прикладываем единичную силу по направлению

отброшенной связи  $X_1$ , полагая ее направленной вверх, и строим для нее эпюру  $M_1$  (рис. 10.8*д*). В соответствии с эпюрами  $M_P$  и  $M_1$  выделяем три элементарных фигуры на эпюре  $M_P$  и определяем величины координат моментов:

$$M_1 = M_3 = \frac{1}{2} 2l = l \quad \text{и} \quad M_2 = \frac{1}{3} 2l = \frac{2}{3} l.$$

Тогда коэффициенты будут

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^2 \bar{M}_{1i} \omega_i = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ (-ql^2 2l)l + \frac{1}{2} 2ql^2 2l \frac{2}{3} l + \frac{3q(2l)^3}{12} l \right] = \frac{4ql^4}{3EI}, \\ \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \sum_{k=1}^1 \bar{M}_{1k} \omega_k = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 2l 2l \frac{2}{3} 2l = \frac{8l^3}{3EI}. \end{aligned}$$

Подставляем найденные коэффициенты в канонические уравнения:

$$\frac{8l^3}{3EI} X_1 + \frac{4ql^4}{3EI} = 0,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{1}{2} ql.$$

С этого момента задача стала статически определимой.

Показываем основную систему с заданной внешней нагрузкой и найденной реакцией отброшенной связи с учетом полученного ее знака, строим эпюру  $M_x$  (рис. 10.8*е*).

Делаем энергетическую проверку правильности полученного результата. Для этого определим прогиб балки по рис. 10.8*е* в точке отброшенной связи по формуле Верещагина (9.33). Прогиб должен быть равен нулю, поскольку здесь в исходной балке имеется заделка.

Действительно,

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^2 \bar{M}_{1i} \omega_i = \frac{1}{EI} \left[ (-2ql^2 2l)l + \frac{1}{2} 3ql^2 2l \frac{2}{3} l + \frac{3q(2l)^3}{12} l \right] = 0.$$

Значит, реакция найдена верно.

### Пример 10.2.

Дано: расчетная схема балки постоянной изгибной жесткости с двумя заделками и шарниром (рис. 10.9*а*).

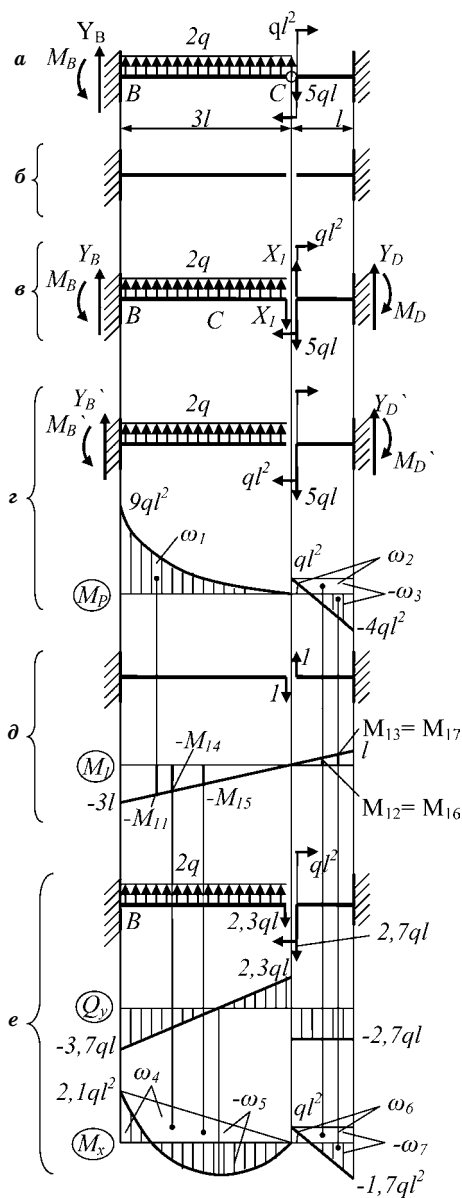


Рис. 10.9  
К решению примера 10.2

Т р е б у е т с я: раскрыть статическую неопределимость балки.

Раскроем статическую неопределимость балки с двумя заделками и шарниром.

Шарнир не передает момент, поэтому удобно выбрать основную систему с разрезом по шарниру: получим две консоли (рис. 10.9б).

Дополняем основную систему до эквивалентной, прикладывая к первой всю заданную внешнюю нагрузку и реакцию отброшенной связи — поперечную силу, обозначенную  $X_1$  (рис. 10.9в).

Каноническое уравнение для этой системы имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Определяем коэффициенты по формуле Верещагина (9.33). С этой целью показываем основную систему, дополненную заданной внешней нагрузкой, и строим для нее грузовую эпюру моментов (рис. 10.9г). Затем к основной системе прикладываем единичную силу по направлению отброшенной связи  $X_1$  и строим для нее эпюру  $M_1$  (рис. 10.9д). В соответствии с эпюрами  $M_P$  и  $M_1$  выделяем на эпюре  $M_P$  три элементарных фигуры ( $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ ) и определяем под их центрами тяжести величины координат моментов  $M_{11}$ ,  $M_{12}$  и  $M_{13}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^3 \omega_i \bar{M}_{1i} = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{3} 9ql^2 3l \right) \left( -\frac{3}{4} 3l \right) + (ql^2 l) \frac{1}{2} l + \left( -\frac{1}{2} 5ql^2 l \right) \frac{2}{3} l \right] = -\frac{257}{12} \frac{ql^4}{EI}, \\ \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \sum_{k=1}^2 \Omega_k \bar{M}_{1k} = \frac{1}{EI} \left[ \left( -\frac{1}{2} 3l 3l \right) \left( -\frac{2}{3} 3 \right) l + \left( \frac{1}{2} ll \right) \frac{2}{3} l \right] = \frac{28}{3} \frac{l^3}{EI}. \end{aligned}$$

Подставляем найденные коэффициенты в каноническое уравнение:

$$\frac{28}{3} \frac{l^3}{EI} X_1 + \left( -\frac{257}{12} \frac{ql^4}{EI} \right) = 0,$$

откуда

$$X_1 \approx 2,30ql.$$

С этого момента задача стала статически определимой.

Показываем основную систему с заданной внешней нагрузкой и найденной реакцией отброшенной связи с учетом полученного знака и строим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  (рис. 10.9e). Эпюру  $Q_y$  построили для проверки правильности эпюры  $M_x$ .

Делаем энергетическую проверку правильности полученного результата. Для этого определим взаимное поперечное смещение концов балки (по направлению  $X_1$ ) по формуле Верещагина (9.33). Оно должно быть равно нулю. Действительно,

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \sum_{i=4}^7 \omega_i \bar{M}_{1i} = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{3} 2,1ql^2 3l \right) \left( -\frac{3}{4} 3l \right) + \left( -\frac{2q(3l)^3}{12} \right) \left( -\frac{1}{2} 3l \right) + (ql^2 l) \frac{1}{2} l + \left( -\frac{1}{2} 2,7ql^2 l \right) \frac{2}{3} l \right] = 0,05 \frac{ql^4}{EI} \approx 0.$$

Значит, реакция найдена верно. Погрешность результата проверки появилась за счет округления  $X_1$ .

### Пример 10.3.

Раскроем статическую неопределимость балки по рис. 10.10a.

**Д а н о:** расчетная схема балки постоянной изгибной жесткости по рис. 10.10a.

**Т р е б у е т с я:** раскрыть статическую неопределимость балки.

**Решение.** Последовательность решения аналогична решениям в предыдущих примерах и пронумерована на рис. 10.10 теми же позициями (a...e). Здесь приводятся лишь расчетные схемы и результаты их расчетов в графическом виде.

### Пример 10.4.

**Д а н о:** статически неопределимая рама, имеющая одинаковую и постоянную изгибную жесткость относительно осей  $x$  и  $y$  (см. темы 5 и 7). Рама составлена из брусьев одинакового круглого поперечного сечения и материала (рис. 10.11a).

**Т р е б у е т с я:** раскрыть статическую неопределимость рамы.



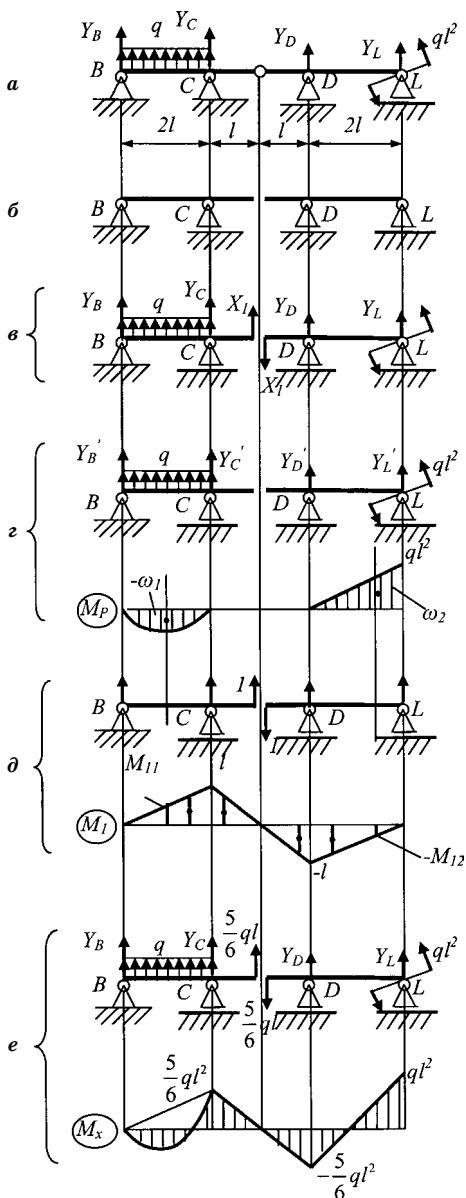


Рис. 10.10  
К решению примера 10.3

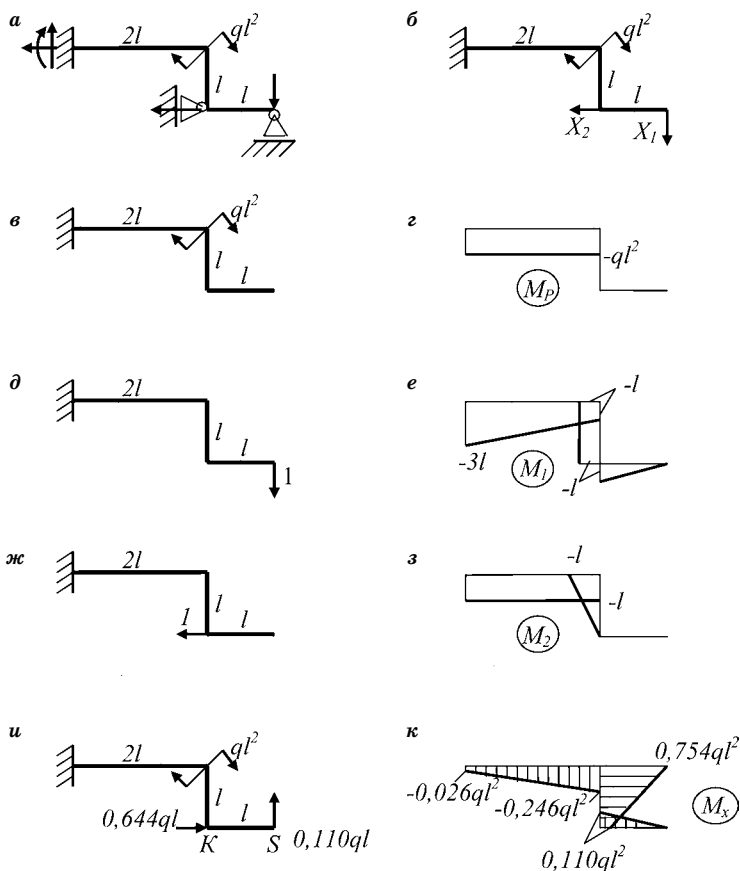


Рис. 10.11.  
К решению примера 10.4

Определим реакции в статически неопределимой раме, имеющей одинаковую и постоянную изгибную жесткость относительно осей  $x$  и  $y$  (см. темы 5 и 7). Например, рама может быть составлена из брусьев одинакового круглого поперечного сечения и материала (рис. 10.11а).

*Решение.* В опорах рамы возникают пять реакций: три — в заделке и по одной — в шарнирных опорах. Следовательно, расчетная схема, для которой можно записать три независимых уравнения статики, является два раза

статически неопределимой и для нее нужно записать два дополнительных канонических уравнения.

В качестве основной системы примем консоль с левой заделкой. Поэтому эквивалентная система будет иметь вид, показанный на рис. 10.11б.

Записываем канонические уравнения:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0.\end{aligned}$$

Определяем коэффициенты в канонических уравнениях. С этой целью:

- для основной системы рамы с заданной внешней нагрузкой (рис. 10.11в) строим грузовую эпюру  $M_P$  (рис. 10.11з);
- для основной системы рамы с единичной силой по направлению  $X_1$  (рис. 10.11д) строим грузовую эпюру  $M_1$  (рис. 10.11е);
- для основной системы рамы с единичной силой по направлению  $X_2$  (рис. 10.11ж) строим грузовую эпюру  $M_2$  (рис. 10.11з).

Тогда коэффициенты будут:

$$\begin{aligned}\Delta_{1P} &= \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^2 \bar{M}_{1i} \omega_i = \frac{1}{EI} (-ql^2 2l)(-2l) = 4 \frac{ql^4}{EI}, \\ \Delta_{2P} &= \frac{1}{EI} \sum_{j=1}^2 \bar{M}_{1j} \omega_j = \frac{1}{EI} (-ql^2 2l)(-l) = 2 \frac{ql^4}{EI}, \\ \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \sum_{k=1}^1 \bar{M}_{1k} \omega_k = \frac{1}{EI} \left[ \left( -\frac{1}{2} ll \right) \left( -\frac{2}{3} l \right) + (-ll)(-l) + \right. \\ &\quad \left. + (-l2l)(-2l) + \left( -\frac{1}{2} 2l2l \right) \left( -\frac{2}{3} 2l-l \right) \right] = 10 \frac{l^3}{EI}, \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \frac{1}{EI} \sum_{t=1}^2 \bar{M}_{1t} \omega_t = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ (-ll) \left( -\frac{1}{2} l \right) + (-l2l)(-l) + \left( -\frac{1}{2} 2l2l \right) (-l) \right] = \frac{9}{2} \frac{l^3}{EI}, \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EI} \sum_{n=1}^1 \bar{M}_{1n} \omega_n = \frac{1}{EI} \left[ \left( -\frac{1}{2} ll \right) \left( -\frac{2}{3} l \right) + (-l2l)(-l) \right] = \frac{7}{3} \frac{l^3}{EI}.\end{aligned}$$



Следует обратить внимание на то, что при определении  $\delta_{11}$  в третьем и четвертом слагаемых второй сомножитель представляет собой величину всей ординаты трапеции третьего участка, хотя само  $\omega$  берется лишь от прямоугольника и треугольника эпюры этого участка.

После подстановки найденных значений коэффициентов в канонические уравнения и решения системы двух уравнений получим

$$X_1 = -0,110ql \text{ и } X_2 = -0,644ql.$$

Значит, реакции в опорах направлены в противоположную сторону.

Показываем основную систему с заданной внешней нагрузкой и полученными с учетом знаков реакциями отброшенных связей (рис. 10.11*у*). По этой расчетной схеме строим истинную эпюру моментов  $M_x$  (рис. 10.11*к*).

Делаем энергетическую проверку правильности полученного результата. Для этого определим прогиб балки (рис. 10.11*у*) в точке  $K$  по направлению найденной реакции связи по формуле Верещагина (9.33). Он должен быть равен нулю, поскольку в исходной балке имеется опора.

Для определения горизонтального смещения в точке  $K$  используются эпюры  $M_x$  и  $M_2$ . Строго говоря, должна быть построена эпюра  $M_3$  от единичной силы, направленной также, как реакция в точке  $K$ , слева направо. Эпюра  $M_2$  построена для единичной силы справа налево (рис. 10.11*ж, з*) по предполагавшемуся направлению реакции. Однако  $M_3$  будет отличаться лишь знаком, что легко принять во внимание.

Действительно,

$$\begin{aligned} \Delta_K &= \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^2 \bar{M}_{1i} \omega_i = \frac{1}{EI} [0,11ql^2l(-\frac{l}{2}) + \frac{1}{2}0,644ql^2l(-\frac{2}{3}l) + \\ &+ (-0,026ql^2 2l)(-l) + (-\frac{1}{2}0,22ql^2 2l(-l))] = -0,002 \frac{ql^4}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Значит, реакция найдена верно.

Проверим правильность определения реакции  $X_1$ . Перемещение рамы в точке  $S$  по направлению силы  $0,11ql^2$



тоже должно быть равно нулю. Для этого используем эпюры  $M_x$  и  $M_1$  (эпюра  $M_1$  используется с той же оговоркой, что и  $M_2$ ).

$$\begin{aligned} \Delta_S &= \frac{1}{EI} \sum_{j=1}^2 \bar{M}_{1j} \omega_j = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} 0,11ql^2l \left( -\frac{2}{3}l \right) + 0,11ql^2l(-l) + \frac{1}{2} 0,644ql^2l(-l) + \right. \\ &\quad \left. + (-0,026ql^2 2l(-2l) + \left( -\frac{1}{2} 0,22ql^2 2l \right) \left( -\frac{5}{3}l \right) \right] = \\ &= 0,002 \frac{ql^4}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Значит, и эта реакция найдена верно.

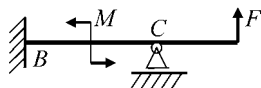
Имеющаяся небольшая погрешность возникает в связи с округлением промежуточных результатов и полностью исчезает при решении задачи в виде неправильных дробей.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПРИ ИЗГИБЕ»

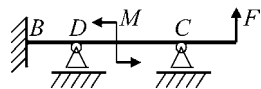
1. Какие внутренние силовые факторы называют симметричными?
2. Какие внутренние силовые факторы называют кососимметричными?
3. Что называют внешней статической неопределимостью?
4. Что называют внутренней статической неопределимостью?
5. Какие перемещения называют грузовыми?
6. Какие перемещения называют единичными?
7. Какую систему называют основной?
8. Какую систему называют эквивалентной?
9. Какой метод называют методом сил при раскрытии статической неопределимости балок?
10. Какой метод называют методом деформаций при раскрытии статической неопределимости балок?
11. На чем основывают канонические уравнения метода сил?
12. Почему канонические уравнения так называют?
13. Какой принцип курса «Сопrotивление материалов» дает возможность записать канонические уравнения метода сил?
14. Что означают слагаемые в канонических уравнениях метода сил (на конкретном примере)?
15. В чем заключается смысл энергетической проверки правильности определения реакций «лишних» связей?



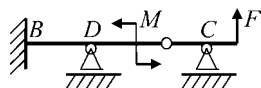
16. Какие системы называют симметричными?
17. Какой силовой фактор равен нулю в симметричных системах по их оси симметрии?
18. Какой силовой фактор равен нулю в кососимметричных системах по их оси симметрии?
19. Сколько раз статически неопределимой является система?



20. Сколько раз статически неопределимой является система?



21. Сколько раз статически неопределимой является система?



22. Как называется выражение  $\Delta_{iF} = \int \frac{M_x M_i}{EI} dz$ ?

23. Что определяет выражение  $\delta_{ij} = \int \frac{M_j M_i}{EI} dz$ ?

## СЛОЖНЫЕ ВИДЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОДНООСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

### 11.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Нормальные и касательные напряжения формируют в поперечных сечениях внутренние силовые факторы. До сих пор рассматривались виды сопротивления, при которых в элементах конструкций напряжениями формировался лишь один из шести видов внутренних силовых факторов. Такие виды сопротивления принято называть простым сопротивлением. О причинах того, что поперечный изгиб и осевое нагружение в цилиндрических пружинах были также отнесены к простому сопротивлению, сказано в разделах 1, 4 и 7.

Продольная сила при растяжении–сжатии и момент при изгибе формируются нормальными напряжениями, действующими в поперечных сечениях вдоль оси балки. Других напряжений нет, поэтому имеет место одноосное напряженное состояние. Сдвиг и кручение не рассматриваются в данном разделе.

Случаи сопротивления, при которых в поперечных сечениях формируются два и более внутренних силовых фактора, называют сложным сопротивлением. Особенность задач сложного сопротивления при одноосном напряженном состоянии состоит в том, что каждый вид внутреннего силового фактора в поперечном сечении формируется только частью общего нормального напряжения вдоль единого направления. В рассматриваемых задачах оно действует вдоль оси  $z$ , и простое алгебраическое суммирование напряжений, формирующих разные внутренние силовые факторы, дает результирующую единого напряжения  $\sigma$ .

По нему записывается условие прочности

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma]. \quad (11.1)$$

В задачах сопротивления материалов вначале определяют внутренние силовые факторы, а уже по ним — создающие их напряжения. Поэтому, исходя из принципа суперпозиции, т. е. принципа независимости действия сил, составляющие  $\sigma_i$  результирующего общего напряжения  $\sigma$  будем определять от каждого внутреннего силового фактора в отдельности и затем алгебраически их суммировать.

## 11.2. БАЛКА ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

При классификации видов изгиба в разделе 7.1 введены понятия прямого и косоугольного изгибов. Там же даны понятия силовой плоскости и плоскости деформации. До сих пор мы рассматривали прямой изгиб, при котором плоскость деформации совпадала с силовой плоскостью. При этом нулевая линия в поперечном сечении была перпендикулярна силовой плоскости. Косым изгибом называют такой вид изгиба, при котором плоскость деформации не совпадает с силовой плоскостью, а пересекается с ней под непрямым углом. Значит, нулевая линия в поперечном сечении балки оказывается не перпендикулярной силовой плоскости.

Напомним, условие перпендикулярности двух прямых линий состоит в том, что их первые производные являются друг для друга обратными функциями. Так, если имеем

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1 x = \operatorname{tg} \alpha_1 x, \\ y_2 &= k_2 x = \operatorname{tg} \alpha_2 x, \end{aligned} \quad (11.2)$$

то условием перпендикулярности функций  $y_1$  и  $y_2$  является равенство

$$y_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 + 90^\circ)x = -\operatorname{ctg} \alpha_1 x = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} x = -\frac{1}{k_1} x. \quad (11.3)$$

Значит, для перпендикулярности прямых на плоскости должно выполняться условие

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (11.4)$$



### 11.2.1. НАПРЯЖЕНИЯ И НУЛЕВАЯ ЛИНИЯ

Рассмотрим консоль с главными центральными осями инерции  $x$ - $y$  поперечного сечения при чистом изгибе (рис. 11.1а). Обозначим угол между положительным направлением оси  $x$  и силовой плоскостью (ее следом) как  $\alpha$  (рис. 11.1а, б).

Уравнение следа силовой плоскости на плоскости поперечного сечения, который назовем **силовой линией**, имеет вид

$$y_{c.п.} = \operatorname{tg} \alpha x = k_1 x. \quad (11.5)$$

Проекции момента  $M_e$  относительно осей  $x$ ,  $y$  по рис. 11.1б:

$$\begin{aligned} M_x &= M_e \sin \alpha, \\ M_y &= M_e \cos \alpha. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Напряжения от них составят

$$\begin{aligned} \sigma_{M_x} &= \frac{M_x}{I_x} y, \\ \sigma_{M_y} &= \frac{M_y}{I_y} x. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Поскольку выполняется принцип суперпозиции, а также с учетом (11.6) и (11.7), суммарное напряжение в произвольной точке  $K$  составит

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = M_e \left( \frac{y}{I_x} \sin \alpha + \frac{x}{I_y} \cos \alpha \right). \quad (11.8)$$

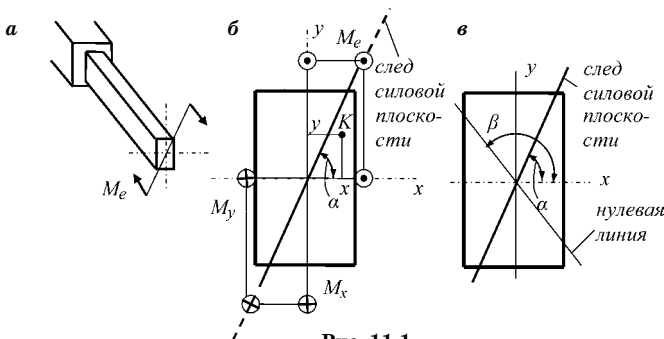


Рис. 11.1  
Косой изгиб консольной балки

Полагая в (11.8)  $\sigma = 0$ , получим функцию нулевой линии, которая является нормалью к плоскости деформации,

$$y_{\text{н.л.}} = -\frac{I_x}{I_y} \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} x = \operatorname{tg}\beta x = k_2 x, \quad (11.9)$$

или

$$k_2 = -\frac{I_x}{I_y} \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{I_x}{I_y} \frac{1}{k_1}, \quad (11.10)$$

где обозначено  $k_2 = \operatorname{tg}\beta$ .

Как видим, в общем случае (при  $\frac{I_x}{I_y} \neq 1$ ) не выполняется условие перпендикулярности (11.4), т. е. нулевая линия не перпендикулярна силовой линии, т. е. силовой плоскости (рис. 11.1в). Значит, это условие является признаком возможности **косого изгиба**, т. е. такого изгиба, при котором нулевая линия напряжений в сечении не перпендикулярна силовой плоскости. Значит, плоскость деформации не совпадает с силовой плоскостью.

Чтобы нулевая линия была перпендикулярна силовой плоскости, т. е. чтобы имел место прямой изгиб, надо в (11.10):

- либо иметь  $\alpha = 0$  (или  $90^\circ$ ), тогда  $\operatorname{tg}\alpha = k_1 = 0$  (или  $\infty$ ) и, следовательно,  $k_2 = \infty$  (или  $0$ ), и его величина не будет зависеть от  $I_x/I_y$ ;
- либо иметь сечение с

$$\frac{I_x}{I_y} = 1. \quad (11.11)$$

Условие (11.11) при любом  $\alpha$  всегда дает (11.4), т. е. прямой изгиб.

Из (11.11) следует:

- если  $\alpha \neq 0$  и  $\alpha \neq 90^\circ$ , а также  $I_x/I_y \neq 1$ , то имеет место косой изгиб;
- если  $I_x = I_y$ , т. е.  $I_x = I_y = I_{x1} = I_{y1} = I_{xi} = I_{yi} = \text{const}$ , что означает: любая пара центральных осей является парой главных центральных осей инерции сечения, в этом случае при любой ориентации силовой плоскости имеет место прямой изгиб;

Примерами сечений, для которых косой изгиб невозможен ( $I_x = I_y$ ), могут служить круг, кольцо, квадрат, квадратный короб и др.



### 11.2.2. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

При косом изгибе, как и при прямом изгибе, обычно проводится расчет на прочность по допускаемым напряжениям. Поэтому его максимальная суммарная рабочая величина не должна превышать допускаемое напряжение.

У балки прямоугольного сечения имеем с учетом (11.5) условие прочности (рис. 11.2) для наиболее нагруженных точек 1 и 3:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{(1,3)} = \sigma_{M_x} = \sigma_{M_y} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (11.12)$$

Здесь проекциями  $M$  (рис. 11.2а) являются по (11.6) моменты относительно осей  $M_x$  и  $M_y$  (рис. 11.2б).

Момент  $M_x$  образуется напряжениями растяжения в верхней части сечения и напряжениями сжатия — в нижней. Максимальные напряжения растяжения  $\sigma_{M_x}$  возникают по верхней границе сечения — грань 2–3, максимальные напряжения сжатия — по нижней границе, грань 1–4 (рис. 11.2в).

Момент  $M_y$  образуется напряжениями растяжения в дальней части сечения и напряжениями сжатия — в ближней. Максимальные напряжения растяжения  $\sigma_{M_y}$  возникают по дальней границе сечения — грань 3–4, максимальные напряжения сжатия — по ближней границе, грань 1–2 (рис. 11.2в).

Их общее напряжение определяется алгебраической суммой действующих в точке напряжений. Максималь-

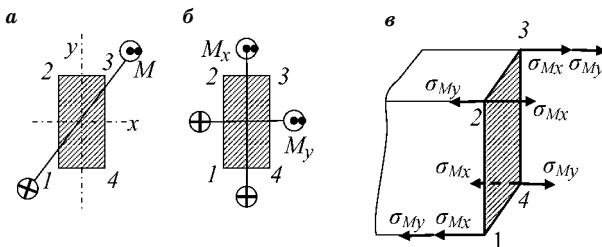


Рис. 11.2

Пример определения опасной точки при косом изгибе



ное без учета знака напряжения окажется в точках 1 и 3. Оно равно

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y}.$$

У балки круглого сечения  $I_x = I_y$ , поэтому кривой изгиб невозможен. С учетом  $W_x = W_y$  для круглых сечений следует по (11.12) определять общие моменты, действующие в каждом  $i$ -м сечении:

$$M_{ni} = \sqrt{M_{xi}^2 + M_{yi}^2}. \quad (11.13)$$

Строим эпюру моментов  $M_{ni}$ . Для сечения с наибольшим моментом записываем условие прочности (рис. 11.3):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{ni}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (11.14)$$

Здесь моменты относительно осей  $M_x$  и  $M_y$  (рис. 11.3а) составляют момент  $M_{ni}$  (рис. 11.3б).

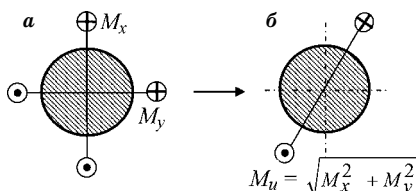


Рис. 11.3  
Пример определения  $M_{изг}$

Для бруса сложного поперечного сечения наибольшие напряжения сжатия и растяжения будут в общем случае различными по абсолютной величине. В этом случае для хрупкого материала условие прочности записывается в зонах растяжения и сжатия для точек сечения, наиболее удаленных от нулевой линии. Координаты точек с наибольшими напряжениями определяются графически или вычисляются из геометрических соображений.

Перемещения при косом изгибе определяют, также исходя из принципа суперпозиции: отдельно рассматривают перемещения от проекций нагрузки на ось  $x$  и проекций нагрузки на ось  $y$ , после чего результирующее перемещение подсчитывают как геометрическую сумму найденных перемещений.

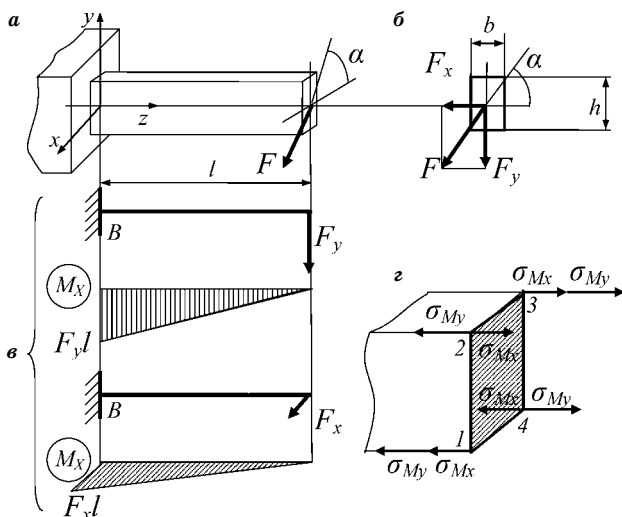


Рис. 11.4  
К решению примера 11.1

### Пример 11.1.

Дано: горизонтальная консольная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена силой  $F$  (рис. 11.4а). При этом  $h = 30$  мм,  $b = 15$  мм,  $l = 0,4$  м,  $\alpha = 60^\circ$ . Материал бруса хрупкий и имеет  $\sigma_{\text{пч.р}} = 150$  МПа,  $\sigma_{\text{пч.с}} = 650$  МПа. Коэффициент запаса прочности принять  $n = 3$ .

Требуется: определить допускаемую величину силы  $[F]$ .

*Решение.* 1. Раскладываем силу  $F$  на вертикальную  $F_y = F \sin \alpha$  и горизонтальную  $F_x = F \cos \alpha$  составляющие (рис. 11.4б).

2. Строим от них эпюры моментов  $M_x$  и  $M_y$  (рис. 11.4в). При этом эпюра  $M_y$  строится в горизонтальной плоскости, и штриховка должна быть параллельна оси  $x$ .

3. Для опасного сечения  $B$  показываем направления напряжений  $\sigma_{M_x}$  и  $\sigma_{M_y}$ , образующих  $M_x$  и  $M_y$  соответственно, и находим опасную точку. Ею оказывается точка 3, так как материал имеет  $\sigma_{\text{пч.р}} < \sigma_{\text{пч.с}}$  (рис. 11.4г).

4. Записываем условие прочности для материала в сечении  $B$  по (11.12):

$$\sigma_{\max} = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{F \sin \alpha \cdot l}{bh^2/6} + \frac{F \cos \alpha \cdot l}{hb^2/6} \leq [\sigma_{\text{пч.р}}].$$

5. Отсюда производим вычисления  $[F]$  с учетом того, что  $[\sigma_{\text{пч.р}}] = \sigma_{\text{пч.р}}/n$ :

$$[F] = \frac{\sigma_{\text{пч.р}}/n}{\frac{\sin \alpha \cdot l}{bh^2/6} + \frac{\cos \alpha \cdot l}{hb^2/6}} = \frac{(150 \cdot 10^6)/3}{\frac{\sin 60^\circ \cdot 0,4}{(15 \cdot 10^{-3})(30 \cdot 10^{-3})^2/6} + \frac{\cos 60^\circ \cdot 0,4}{(30 \cdot 10^{-3})(15 \cdot 10^{-3})^2/6}} = 151 \text{ Н.}$$

**Пример 11.2.**

Д а н о: горизонтальная консольная балка из равнобокого уголка № 8, нагруженная вертикальной силой  $F = 100 \text{ кг}$  (рис. 11.5а). При этом длина консоли  $l = 1,2 \text{ м}$ , материал балки — сталь Ст3, имеющая  $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ . Коэффициент запаса прочности принять  $n = 1,5$ .

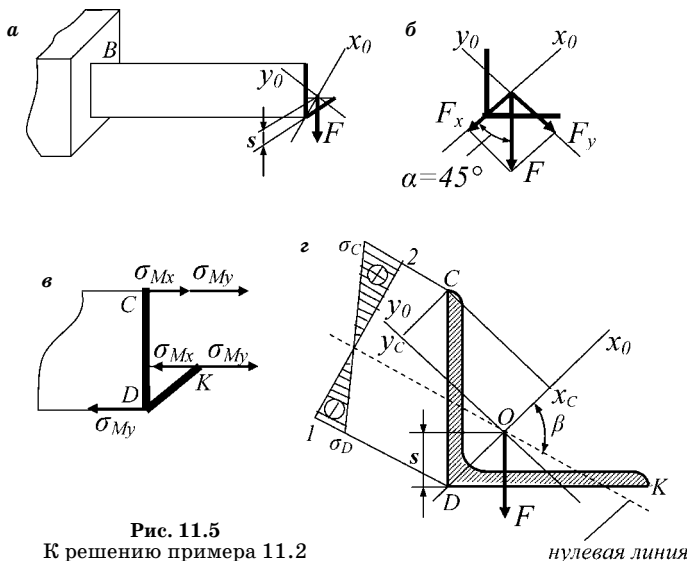


Рис. 11.5  
К решению примера 11.2



Т р е б у е т с я : сделать поверочный расчет на прочность, показать положение нулевой линии, определить графически опасную точку и построить эпюру напряжений в опасном сечении.

*Решение.* 1. По таблицам сортамента прокатной стали находим для равнобокого уголка № 8:  $I_{x0} = 90,4 \text{ см}^4$ ,  $I_{y0} = 23,5 \text{ см}^4$ ,  $s = 2,19 \text{ см}$ ,  $b = 80 \text{ мм}$ .

2. Раскладываем силу  $F$  на ее проекции по главным центральным осям:  $F_y = F \sin 45^\circ$  и  $F_x = F \cos 45^\circ$  (рис. 11.5б).

3. Напряжения в опасном сечении  $B$ , т. е. в заделке (рис. 11.5е):

- от силы  $F_y$ , создающей момент  $M_x$ , растягивающие  $\sigma_{Mx}$  в точке  $C$  и сжимающие в точке  $K$  (в точке  $D$  они равны нулю);
- от силы  $F_x$ , создающей момент  $M_y$ , растягивающие  $\sigma_{My}$  в точках  $C$  и  $K$ , сжимающие в точке  $D$ .

Значит, в точке  $C$  напряжения суммируются и являются наибольшими:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = \sigma_C = \sigma_{Mx} + \sigma_{My} &= \frac{F_y l}{I_{x0}} y_C + \frac{F_x l}{I_{y0}} x_C = \\ &= -F \cdot l \left( \frac{\sin 45^\circ}{I_{x0}} y_C + \frac{\cos 45^\circ}{I_{y0}} x_C \right) = \\ &= 100 \cdot 10 \cdot 1,2 \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{90,4 \cdot 10^{-8}} 5,66 \cdot 10^{-2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{23,5 \cdot 10^{-8}} 2,56 \cdot 10^{-2} \right) = \\ &= 146 \cdot 10^6 \text{ Па}, \end{aligned}$$

где координаты точки  $C$  соответствуют значениям:  $y_C = 8 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 45^\circ = 5,66 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  и  $x_C = (8 \cos 45^\circ - 2,19 / \cos 45^\circ) \times 10^{-2} = 2,56 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

4. Значит, условие прочности

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = 146 \cdot 10^6 \text{ Па} &\leq [\sigma] = \sigma_T / n_T = \\ &= 240 \cdot 10^6 / 1,5 = 160 \cdot 10^6 \text{ Па} \end{aligned}$$

выполняется.

Уравнение нулевой линии по (11.9) определяется функцией

$$y_{н.л} = -\frac{I_{x0}}{I_{y0}} \frac{1}{\operatorname{tg}45^\circ} x = -\frac{90,4 \cdot 10^{-8}}{23,5 \cdot 10^{-8}} \frac{1}{1} x = -3,85x.$$

Значит,  $k_{н.л} = \operatorname{tg}\beta = -3,85$  и  $\beta = \operatorname{arctg}(-3,85) = -75,4^\circ$ . Нулевая линия показана на рис. 11.5з штрихом. Как видим, она не перпендикулярна направлению силы  $F$ .

Построим эпюру напряжений. С этой целью из наиболее удаленных от нулевой линии точек (здесь ими оказались точки  $C$  и  $D$ ) проводим прямые, параллельные ей. На перпендикуляре между ними (прямая 1–2), как на оси, строим эпюру  $\sigma$ .

В точке  $C$  откладываем в выбранном масштабе значение  $\sigma_C = 146 \cdot 10^6$  Па и проводим отсюда прямую таким образом, чтобы она прошла через точку пересечения нулевой линии с прямой 1–2, и продолжаем ее до пересечения с линией 1– $D$ . Это пересечение покажет длиной отрезка на линии 1– $D$ , умноженной на выбранный масштаб, величину напряжений сжатия в точке  $D$ , т. е. величину  $\sigma_D$ . Графически это составляет примерно  $-110$  МПа.

Для проверки определим  $\sigma_D$  аналитически:

$$\begin{aligned} \sigma_D = \sigma_{My} &= -\frac{F_x l}{I_{y0}} x_D = -\frac{F \cdot \cos 45^\circ \cdot l}{I_{y0}} x_D = \\ &= -\frac{F \cdot \cos 45^\circ \cdot l}{I_{y0}} \frac{s}{\cos 45^\circ} = \\ &= -\frac{100 \cdot 10 \cdot 1,2 \cdot 2,19 \cdot 10^{-2}}{23,5 \cdot 10^{-8}} = -112 \cdot 10^6 \text{ Па.} \end{aligned}$$

Как видим, графически определенная величина  $\sigma_D$  с достаточной степенью точности воспроизводит результат аналитического расчета.

### Пример 11.3.

По данным примера 11.1 определить перемещение свободного конца консоли при допускаемой величине силы  $[F] = 151$  Н.

*Решение.* После получения эпюр моментов  $M_x$  и  $M_y$  строим эпюры моментов от вертикальной и горизонтальной единичных сил (см. рис. 11.6а, б).

Подсчитываем прогибы в горизонтальном и вертикальном направлении по формуле Верещагина:



$$\begin{aligned}
 y_C &= \frac{1}{EI_x} \sum \omega_1 M_1 = \frac{1}{EI_x} \omega_1 M_1 = \frac{12}{Ebh^3} \frac{1}{2} (-F_y l) \left( -\frac{2}{3} l \right) = \\
 &= \frac{12}{Ebh^3} \frac{1}{2} (-[F](\sin \alpha) l) \left( -\frac{2}{3} l \right) = \frac{4}{Ebh^3} [F] l^2 \sin \alpha = \\
 &= \frac{4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 15 \cdot 10^{-3} (30 \cdot 10^{-3})^3} 151 \cdot 0,4^2 \sin 60^\circ = 1,026 \cdot 10^{-3} \text{ м.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{1}{EI_y} \sum \omega_2 M_2 = \frac{\omega_2 M_2}{EI_y} = \frac{12}{Ehb^3} \frac{1}{2} (-F_x l) \left( -\frac{2}{3} l \right) = \\
 &= \frac{12}{Ehb^3} \frac{1}{2} (-[F](\cos \alpha) l) \left( -\frac{2}{3} l \right) = \frac{4}{Ehb^3} [F] l^2 \cos \alpha = \\
 &= \frac{4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 30 \cdot 10^{-3} (15 \cdot 10^{-3})^3} 151 \cdot 0,4^2 \cos 60^\circ = 2,39 \cdot 10^{-3} \text{ м.}
 \end{aligned}$$

Подсчитываем общее перемещение свободного края бруса (рис. 11.6е):

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \sqrt{y_C^2 + x_C^2} = \sqrt{(1,026 \cdot 10^{-3})^2 + (2,39 \cdot 10^{-3})^2} = \\
 &= 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,6 \text{ мм.}
 \end{aligned}$$

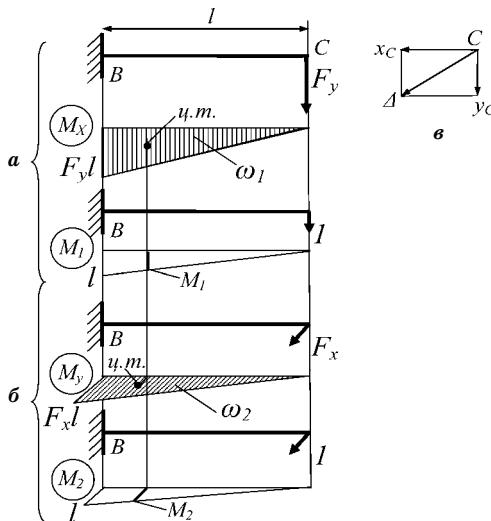


Рис. 11.6  
К решению примера 11.3

### 11.3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ

**Пространственным изгибом** прямолинейной балки называется изгиб, при котором деформированная ось бруса представляет собой пространственную кривую, не лежащую в плоскости. При этом внешняя нагрузка должна располагаться не в одной плоскости (пространственная нагрузка).

Рассмотрим следующий пример (рис. 11.7а).

Поскольку в рассматриваемых задачах выполняется принцип суперпозиции, то рассматриваем отдельно действие нагрузки сначала в вертикальной (рис. 11.7б), затем в горизонтальной (рис. 11.7в) плоскостях. Отдельно для горизонтальной и вертикальной нагрузок строим эпюры моментов. При этом надо иметь в виду то, что количество участков для нагрузок в вертикальной и горизонтальной плоскостях может оказаться разным. Количество участков для построения эпюры  $M_x$  будет определяться числом

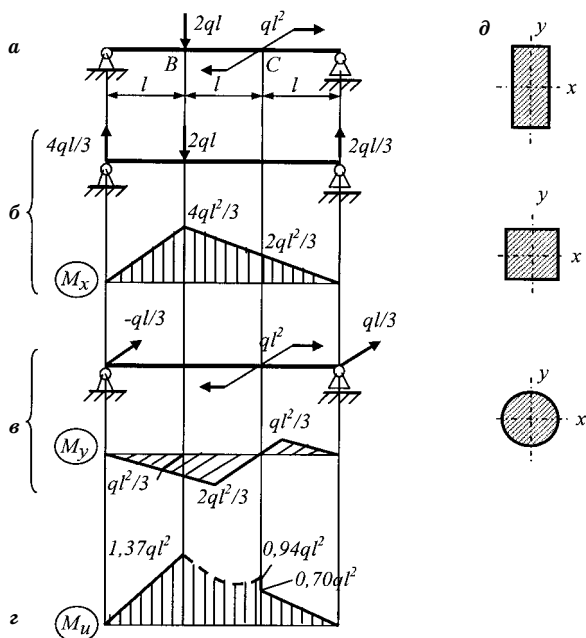


Рис. 11.7  
Пример пространственного изгиба балки



координат на оси  $z$ , где меняется вид функции на эпюрах  $M_x$  и  $M_y$ . Так, эпюры  $M_x$  и  $M_y$  имеют по два участка, а эпюра  $M_{и}$  имеет три участка (рис. 11.7). Значения  $M_{иi}$  определяем по границам участков по (11.3). Вычисления для построения эпюры опущены в силу их простоты.

При построении эпюры  $M_{и}$  следует помнить, что геометрическое сложение значений двух пересекающихся прямых дает прямую линию, а сложение значений перекрещивающихся прямых (не имеющих общей точки пересечения) дает в плоском изображении кривую сложной функции. График изменения  $M_{и}$  показывают условным штриховой линией (рис. 11.7з).

Для каждого из предложенных сечений (рис. 11.7д) записывается свое условие прочности:

а) для прямоугольника должны записать условия прочности по (11.12) для сечений в точках  $B$  и  $C$ , поскольку  $W_x > W_y$  и потому неизвестно, в каком из этих сечений суммарные напряжения окажутся больше:

$$\sigma_{\max B} = \frac{4}{3}ql^2 \frac{1}{W_x} + \frac{1}{3}ql^2 \frac{1}{W_y} \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\max C} = \frac{2}{3}ql^2 \frac{2}{W_x} + \frac{2}{3}ql^2 \frac{1}{W_y} \leq [\sigma];$$

б) для квадрата со стороной  $a$  с учетом того, что  $W_x = W_y$ , должны записать только одно условие прочности по (11.12) для сечения в точке  $B$ :

$$\sigma_{\max B} = \frac{\frac{4}{3}ql^2 + \frac{1}{3}ql^2}{W_x} \leq [\sigma],$$

поскольку  $\sigma_{\max B} > \sigma_{\max C}$  и условие прочности для сечения  $C$  будет обеспечено;

в) для круглого сечения должны построить эпюру  $M_{и}$  (рис. 11.7з) и записать одно условие прочности по (11.14):

$$\sigma_{\max B} = \frac{1,37ql^2}{W_x} \leq [\sigma].$$

Значения  $M_{иi}$  для эпюры  $M_{и}$  определяются на границах участков по (11.13).



### 11.4. СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И РАСТЯЖЕНИЯ–СЖАТИЯ

Если на брус совместно действуют продольные и поперечные нагрузки, то в поперечных сечениях возникают продольная сила  $N$  и изгибающие моменты  $M$ . Влиянием касательных напряжений от поперечной нагрузки  $F_2$ , образующих поперечную силу  $Q$ , пренебрегаем по причине их малости в практических случаях (см. главу 7.6).

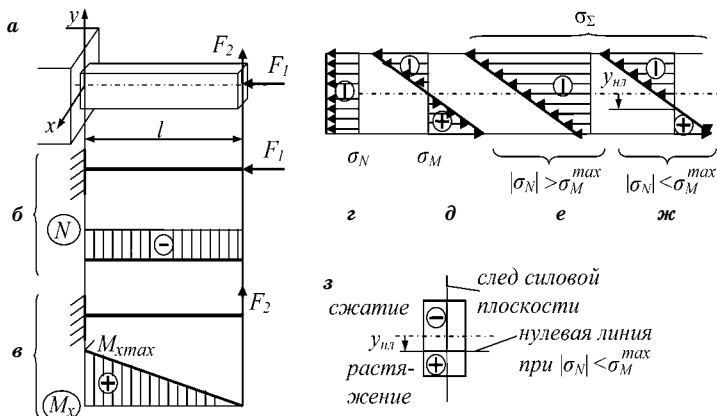
По рис. 11.8а от сжимающей силы  $F_1$  возникает продольная сила  $N$ , образуемая напряжениями  $\sigma_N$  (рис. 11.8б, з), от силы  $F_2$  — момент, образуемый напряжениями  $\sigma_{M_x}$  (рис. 11.8в, д).

Суммарные напряжения подсчитываются по формуле

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y. \quad (11.15)$$

Их величины в наиболее удаленных от нулевой линии крайних точках (здесь — максимум сверху и минимум снизу) равны

$$\sigma_{\max/\min} = \sigma_N \pm \sigma_M^{\max} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} = -\frac{F_1}{A} \pm \frac{F_2 l}{W_x}. \quad (11.16)$$



**Рис. 11.8**  
Пример последовательности решения бруса при совместном действии изгиба и сжатия



Если  $|\sigma_N| \geq \sigma_M^{\max}$ , то в поперечном сечении возникают суммарные нормальные напряжения одного знака (рис. 11.8е), если  $|\sigma_N| < \sigma_M^{\max}$  — то разных знаков (рис. 11.8ж, з).

Для пластичного материала в обоих случаях в условие прочности войдет суммарное напряжение, составляющие которого берут с одинаковым знаком:

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} \right| \leq [\sigma]. \quad (11.17)$$

Для хрупких материалов в случае, показанном на рис. 11.8ж, требуется записать два условия прочности: по растягивающим и сжимающим напряжениям:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma_p], \quad (11.18)$$

$$|\sigma|_{\max} = \left| -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} \right| \leq [\sigma_c]. \quad (11.19)$$

### 11.5. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ

Продольная сила (параллельна оси  $z$ ), приложенная вне центра тяжести сечения, вызывает внецентренное растяжение или внецентренное сжатие. При этом напряженное состояние остается одноосным: в поперечных сечениях будут действовать только нормальные напряжения  $\sigma_z = \sigma_{1(3)}$ .

Пусть имеется консольный брус, нагруженный в точке  $K$  с координатами  $(x_F, y_F)$  продольной силой  $F$ , т. е. она приложена с эксцентриситетом  $e$  относительно оси  $z$  (рис. 11.9а).

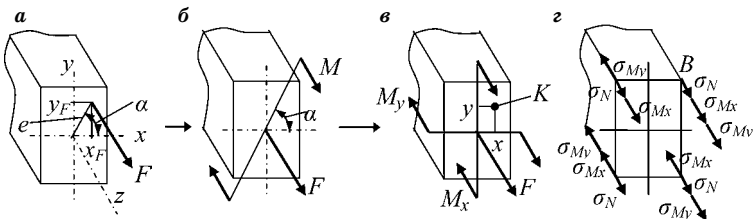


Рис. 11.9

Пример определения опасной точки при внецентренном растяжении

При переносе силы в центр тяжести сечения необходимо добавить момент  $M = Fe$  (рис. 11.9б).

Разложение момента на проекции относительно осей даст (рис. 11.9в)

$$M_x = Msin\alpha = Fesin\alpha, M_y = Mcos\alpha = Fecos\alpha. \quad (11.20)$$

Для расчетной схемы по рис. 11.9в напряжения в произвольной точке  $K$  сечения с учетом (11.16):

$$\begin{aligned} \sigma_K &= \sigma_{KN} + \sigma_{KM_x} + \sigma_{KM_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = \\ &= F \left( \frac{1}{A} + \frac{e \cdot \sin\alpha}{I_x} y + \frac{e \cdot \cos\alpha}{I_y} x \right) = F \left( \frac{1}{A} + \frac{y_F}{I_x} y + \frac{x_F}{I_y} x \right). \end{aligned} \quad (11.21)$$

Условие прочности по максимальным напряжениям, которые возникают в верхнем правом углу поперечного сечения, в точке  $B$  (рис. 11.9г), будет иметь вид

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = F \left( \frac{1}{A} + \frac{y_F}{W_x} + \frac{x_F}{W_y} \right) \leq [\sigma]. \quad (11.22)$$

### Пример 11.4.

Дано: расчетная схема бруса прямоугольного поперечного сечения шириной  $b$  (рис. 11.10а).

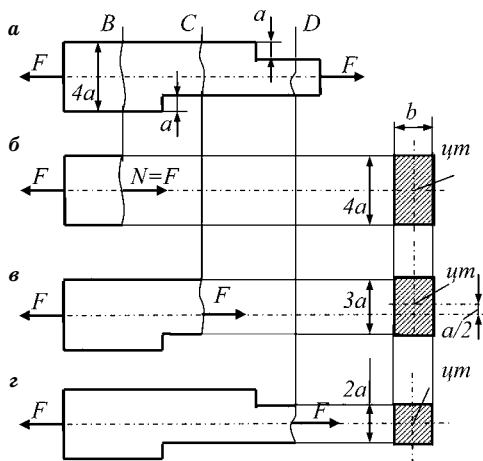


Рис. 11.10  
Сравнительный пример влияния внецентральной нагрузки

**Т р е б у е т с я:** сравнить величины максимальных напряжений, возникающих на трех разных участках (сечения  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ) бруса.

*Решение.* В сечении  $B$  сила  $N = F$  приложена в центре тяжести сечения (рис. 11.10б), поэтому

$$\sigma_B = \frac{N}{A} = \frac{1}{4} \frac{F}{ab}.$$

Для сечения  $C$  сила  $F$  приложена с эксцентриситетом  $e = a/2$  относительно центра тяжести сечения (рис. 11.10в). Поэтому здесь будут действовать продольная сила  $N$  и изгибающий момент  $M_x$ , а максимальное напряжение предполагается по его нижнему контуру

$$\sigma_C = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} = \frac{F}{3ab} + \frac{F0,5a}{b(3a)^2/6} = \frac{2}{3} \frac{F}{ab}.$$

В сечении  $D$  сила  $N = F$  приложена в центре тяжести сечения (рис. 11.10г), поэтому

$$\sigma_D = \frac{N}{A} = \frac{1}{2} \frac{F}{ab}.$$

Таким образом, получили

$$\sigma_B < \sigma_D < \sigma_C,$$

т. е. наибольшее напряжение действует на том участке, где продольная сила приложена внецентренно, а не на том, где наименьшая площадь.

### Пример 11.5.

**Д а н о:** брус круглого поперечного сечения диаметром  $D = 100$  мм из чугуна серого СЧ21–40 с  $\sigma_{пч.р} = 210$  МПа,  $\sigma_{пч.с} = 950$  МПа. Коэффициент запаса прочности принять  $n = 3$ . К брусу приложена сжимающая сила  $F_1$  в точке  $K_1$  с эксцентриситетом  $e = 0,2D = 20$  мм (рис. 11.11а, б).

**Т р е б у е т с я:** определить положение нулевой линии, допускаемое значение силы  $[F_1]$ , для случая осевого приложения ( $e = 0$ ) силы  $F_2$  в точке  $K_2$  допускаемую нагрузку  $[F_2]$  (рис. 11.11в, г), сравнить  $[F_1]$  и  $[F_2]$ .

*Решение.* Суммарное нормальное напряжение

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{My}.$$

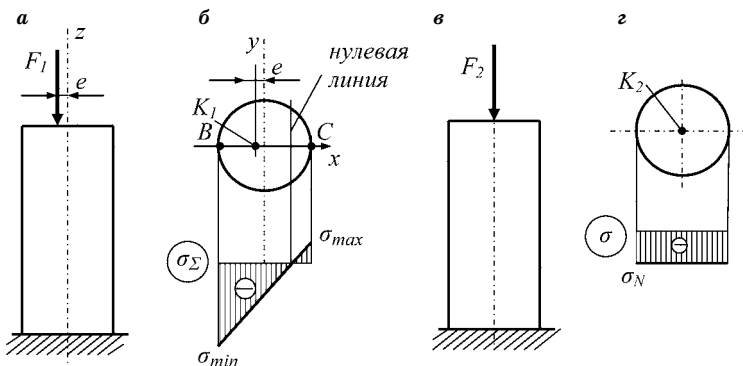


Рис. 11.11  
К решению примера 11.4

Приравнявая нулю в (11.21) напряжения по нулевой линии, последовательно получаем

$$0 = \sigma_N + \sigma_{My} \rightarrow \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} x_{н.л.} = 0 \rightarrow \frac{-F_1}{\pi \cdot D^2/4} + \frac{-F_1 \cdot (-e)}{\pi \cdot D^4/64} x_{н.л.} = 0,$$

откуда

$$x_{н.л.} = \frac{D^2}{16e} = \frac{(100 \cdot 10^{-3})^2}{16 \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 0,0313 \text{ м} = 31,3 \text{ мм}.$$

Выражение  $x_{н.л.} = 31,3$  является уравнением прямой, параллельной оси  $y$ . Оно указывает на то, что нулевая линия проходит в пределах сечения, так как

$$x_{н.л.} = 31,3 \text{ мм} < D/2 = 100/2 = 50 \text{ мм}$$

(рис. 11.11б). Значит, напряжения в сечении будут отрицательные в пределах изменения аргумента  $-D/2 < x < 31,3$  мм и положительные в пределах изменения аргумента  $31,3 \text{ мм} < x < D/2$ .

Функция суммарных напряжений  $\sigma$  по (11.21) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} x = \frac{-F_1}{\pi \cdot D^2/4} + \frac{-F_1 \cdot (-e)}{\pi \cdot D^4/64} x = \\ &= \frac{-4F_1}{\pi \cdot D^2} \left( 1 - \frac{16e}{D^2} x \right) = \frac{-4F_1}{\pi \cdot D^2} \left( 1 - \frac{16 \cdot 0,2D}{D^2} x \right) = \frac{-4F_1}{\pi \cdot D^2} \left( 1 - \frac{3,2}{D} x \right). \end{aligned}$$

В бруске возникают значительные отрицательные напряжения в точке  $B$  (со стороны приложения направленной к брусу силы  $F_1$ ) и в точке  $C$  меньшие по абсолютной величине положительные с противоположной стороны (рис. 11.11б). Построим эпюру напряжений для двух крайних значений  $x = \pm D/2$ :

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \sigma|_{x=-D/2} = \sigma_{\min} = \\ &= \frac{-4F_1}{\pi \cdot D^2} \left( 1 - \frac{3,2}{D} \left( -\frac{D}{2} \right) \right) = -10,4 \frac{F_1}{\pi \cdot (100 \cdot 10^{-3})^2} = -331F_1. \\ \sigma_C &= \sigma|_{x=+D/2} = \sigma_{\max} = \frac{-4F_1}{\pi \cdot D^2} \left( 1 - \frac{3,2}{D} \frac{D}{2} \right) = \\ &= 2,4 \frac{F_1}{\pi \cdot (100 \cdot 10^{-3})^2} = 76F_1.\end{aligned}$$

Условие прочности по напряжениям сжатия (в точке  $B$ )  $|\sigma_c|_{\max} \leq [\sigma_c]$  дает

$$\begin{aligned}331F_1 \leq \sigma_{\text{пч.с}} / n \rightarrow [F_1]_B &= \frac{\sigma_{\text{пч.с}}}{331n} = \frac{950 \cdot 10^6}{331 \cdot 3} = \\ &= 0,96 \cdot 10^6 \text{ Н} = 0,96 \text{ МН}.\end{aligned}$$

Условие прочности по напряжениям растяжения (в точке  $C$ )  $\sigma_{\text{р.макс}} \leq [\sigma_{\text{р}}]$  дает

$$\begin{aligned}76F_1 \leq \sigma_{\text{пч.р}} / n \rightarrow [F_1]_C &= \frac{\sigma_{\text{пч.р}}}{76n} = \frac{210 \cdot 10^6}{76 \cdot 3} = \\ &= 0,92 \cdot 10^6 \text{ Н} = 0,92 \text{ МН}.\end{aligned}$$

Допускаемое значение силы в зоне растяжения, в точке  $C$ , меньше (хотя и ненамного), чем в зоне сжатия. Значит, допускаемой силой, удовлетворяющей обоим условиям прочности, является сила, равная 0,92 МН.

Если бы к брусу была приложена осевая сила  $F_2$ , то возникли бы только напряжения сжатия  $|\sigma_c| = \frac{4F_2}{\pi \cdot D^2}$ , одинаковые по всему брусу. Тогда по условию прочности  $|\sigma_c| \leq [\sigma_c]$  получаем

$$\begin{aligned}\frac{4F_2}{\pi \cdot D^2} \leq \frac{\sigma_{\text{пч.с}}}{n} \rightarrow [F_2] &= \frac{\sigma_{\text{пч.с}} \pi \cdot D^2}{4n} = \frac{950 \cdot 10^6 \pi (100 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 3} = \\ &= 2,48 \cdot 10^6 \text{ Н} = 2,48 \text{ МН}.\end{aligned}$$

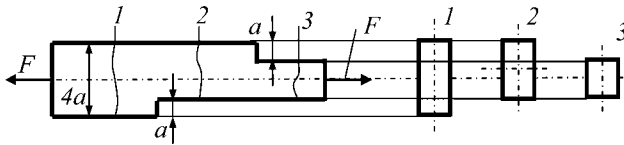
Как видим, достаточно смещения осевой силы на  $e = 0,2D$ , т. е. всего на 20%, и ее допускаемая величина снижается с 2,48 МН до 0,92 МН, т. е. почти в три раза. Полученные результаты дают наглядное представление об интенсивности отрицательного влияния на прочностные показатели системы неточного по оси бруса приложения продольной силы.

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ  
«СЛОЖНЫЕ ВИДЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ  
ОДНООСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ»**

1. Какой вид сопротивления называют простым?
2. Какой вид сопротивления называют сложным?
3. Какие внутренние силовые факторы действуют в поперечном сечении витка цилиндрической пружины с малым шагом?
4. Почему работу пружин, в поперечных сечениях которых возникают два внутренних силовых фактора  $Q$  и  $T$ , можно относить к простому виду сопротивления?
5. Где в цилиндрической пружине растяжения располагаются наибольшие напряжения (наиболее нагруженные точки)?
6. Где в цилиндрической пружине сжатия располагаются наибольшие напряжения (наиболее нагруженные точки)?
7. Что называют осадкой цилиндрической пружины?
8. Что называют жесткостью цилиндрической пружины?
9. Какое условие означает перпендикулярность прямых линий?
10. Какова величина угла между силовой плоскостью и нулевой линией при прямом изгибе?
11. Выполняется ли условие перпендикулярности нулевой линии к силовой плоскости при косом изгибе?
12. Совпадают ли силовая плоскость и плоскость деформации при прямом изгибе?
13. Совпадают ли силовая плоскость и плоскость деформации при косом изгибе?
14. При каких условиях возможен косой изгиб?
15. Как в решении задач сопротивления материалов рассматривается внешняя нагрузка, не совпадающая с осями системы?
16. Балки с какими поперечными сечениями не могут иметь косоугольного изгиба?
17. В каком месте возникают наибольшие напряжения при косом изгибе?



18. Как определяют положение точки симметричного поперечного сечения, где действует наибольшее напряжение?
19. Как определяют положение точки несимметричного поперечного сечения, где действует наибольшее напряжение?
20. Какой изгиб называют пространственным?
21. Какой вид нагружения называют внецентренным растяжением (сжатием)?
22. Чем опасно для хрупкого материала внецентренное сжатие?
23. Какой участок является опасным для схемы с сечениями 1...3, чем это вызвано?





## ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

### 12.1. НАЗНАЧЕНИЕ ГИПОТЕЗ

**Предельное состояние** — это возникновение условий (пластических деформаций или разрушений), нарушающих работоспособность конструкций. Предельным состоянием считается достижение в материале текучести, т. е.  $\sigma_T$ , или разрушения, т. е.  $\sigma_{пч}$  или  $\sigma_B$ . Предельные состояния устанавливают экспериментально при одноосном напряженном состоянии образца и по нему определяют значение допускаемых напряжений  $[\sigma]$ . Таким образом, допускаемое напряжение определяет максимальные рабочие напряжения  $\sigma_{\max}$  в детали конструкции лишь в случае одноосного напряженного состояния ее материала. Именно для него можем сразу составить условие прочности:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (12.1)$$

Но нередко имеет место неодноосное напряженное состояние. Так, в практических задачах часто встречается совместное действие кручения и растяжения–сжатия или изгиба. При этом в поперечном сечении возникают соизмеримые и нормальные, и касательные напряжения, создающие двухосное напряженное состояние — по двум главным площадкам действуют главные нормальные напряжения. В этом случае условие прочности (12.1) дает возможность учесть лишь какое-либо одно из двух реально действующих главных напряжений. Более того, предельное состояние соответствует тому напряженному состоянию, при котором оно определялось, и может изменить свой характер со сменой вида напряженного состояния. Например, хрупкий чугун в условиях высокого всестороннего давления



(трехосное напряженное состояние сжатия) разрушается с образованием пластических деформаций. В образцах из чугуна, растягиваемых под внешним боковым давлением, образуется шейка. Узкая выточка в образце из пластичного материала приводит к неодноосному напряженному состоянию и хрупкому разрушению без образования шейки. Пластичная сталь в приосевой области шейки разрушается по типу хрупкого материала. Следовательно, переход материала в рассматриваемой точке в предельное состояние зависит от вида напряженного состояния. Поэтому в задачах с неодноосным напряженным состоянием условие прочности в виде (12.1) записывать нельзя: предельные напряжения экспериментально определены при одноосном напряженном состоянии. Предельные и допускаемые напряжения при чистом сдвиге соответствуют частному случаю двухосного напряженного состояния — главные напряжения по обоим площадкам одинаковы и различаются лишь знаком. Их определяют экспериментально в образце, подвергаемом такому же двухосному напряженному состоянию. В силу тождественности видов напряженного состояния получаемые значения предельных и допускаемых напряжений могут непосредственно сравниваться в виде обычного условия прочности. Однако они не распространяются на другие соотношения главных напряжений даже двухосного напряженного состояния.

Но появляется вопрос: как надо правильно определять прочность при общем случае напряженного состояния? Ставить эксперименты по переводу материала в предельное состояние для всех возможных сочетаний главных напряжений практически нереально по экономическим соображениям. Кроме того, смоделировать сложное напряженное состояние чаще всего весьма трудно.

Для решения этой задачи необходимо найти соответствие, эквивалентность между реальным сложным напряженным состоянием и некоторым гипотетическим одноосным. Напряжение такого эквивалентного одноосного состояния можно считать левой частью условия прочности (12.1).

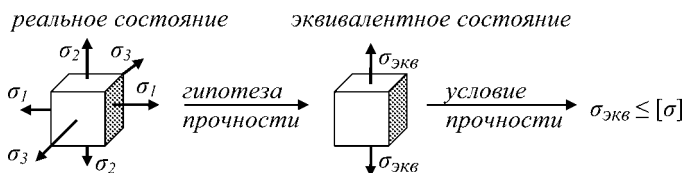
С целью реализации такого подхода вводятся различные гипотезы предельных состояний с точки зрения проч-

ности или пластичности. По замечанию В. И. Феодосьева, их можно было бы называть теориями предельных состояний. Гипотезы приводят к критериям разрушения или пластичности некоторого условного, не в точности соответствующего реальной задаче одноосного напряженного состояния. **Гипотезы предельных состояний**, каждая в соответствии со своим критерием, упрощают реальное сложное напряженное состояние до условного одноосного напряженного состояния с нормальным напряжением, называемым эквивалентным. В дальнейшем для простоты будем их называть гипотезами прочности.

**Эквивалентное напряжение**  $\sigma_{\text{экв}}$  — это такое нормальное напряжение условного одноосного напряженного состояния, которое следует создать в растянутом (для сжатия — в сжатом) условном образце, чтобы его состояние было равноопасно с заданным неоднородным напряженным состоянием. Иначе говоря, предельные состояния в реальном неоднородном и в условно-эквивалентном одноосном напряженном состоянии наступают одновременно при увеличении их напряжений в одинаковое число раз. Теперь, имея эквивалентное напряжение условно-эквивалентного одноосного напряженного состояния, сравниваем его с допускаемым напряжением, полученным экспериментально при одноосном напряженном состоянии, т. е. записываем условие прочности (рис. 12.1)

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma]. \tag{12.2}$$

Таким образом, гипотезы прочности нужны при расчете на прочность материала, находящегося в сложном напряженном состоянии. С их помощью переводим сложное



**Рис. 12.1**  
Последовательность расчета на прочность при сложном напряженном состоянии

напряженное состояние материала в точке в условно-эквивалентное одноосное.

Идея перехода к условно-эквивалентному одноосному напряженному состоянию заключается в том, что для каждой гипотезы прочности выбирают какой-либо один критерий (фактор) определяющим предельное состояние материала в рассматриваемой точке, а остальными факторами пренебрегают. Используя такой фактор, получают аналитическое выражение, имеющее размерность напряжения. Это выражение обозначают как эквивалентное нормальное напряжение некоторого условного одноосного напряженного состояния конкретной гипотезы прочности.

Разработано довольно большое число гипотез прочности, из которых мы рассмотрим пять основных. Критериями служат по первой теории прочности максимальные растягивающие (сжимающие) напряжения  $|\sigma|_{\max}$ , по второй — линейные деформации  $\varepsilon_{\max}$ , по третьей — касательные напряжения  $\tau_{\max}$ , по четвертой — наибольшая накопленная удельная потенциальная энергия упругого формоизменения  $u_{\text{ф/и max}}$  и по пятой — касательная линия к предельным кругам Мора, постороенным для различных предельных напряженных состояний рассматриваемого материала, называемая предельной огибающей. Каждая из гипотез имеет собственное выражение  $\sigma_{\text{экв}}$ , но при определенных сочетаниях параметров их формулы могут совпасть. Присвоенные гипотезам порядковые номера условны и до некоторой степени отражают последовательность их приближения к практически наблюдаемым результатам. В практике прочностных расчетов пищевого машиностроения обычно используется третья гипотеза прочности.

## 12.2. ПЕРВАЯ ГИПОТЕЗА ПРОЧНОСТИ

1-я гипотеза называется «**гипотезой наибольших нормальных напряжений**»:

$$\sigma_1 \leq [\sigma_p]. \quad (12.3)$$

Она основана на следующем: прочность материала при сложном напряженном состоянии считается обеспечен-



ной, если наибольшее главное напряжение не превосходит допустимого нормального напряжения, установленного для одноосного напряженного состояния.

Другие напряжения не принимаются в расчет. Поэтому величина  $\sigma_1$  может рассматриваться как эквивалентное напряжение некоторого условного одноосного напряженного состояния по 1-й гипотезе прочности,  $\sigma_{\text{эkv}(1)}$ .

Значит,

$$\sigma_{\text{эkv}(1)} = \sigma_1 \leq [\sigma_p], \quad (12.4)$$

где  $[\sigma_p]$  — допустимое напряжение, полученное экспериментально для образцов при растяжении в условиях одноосного напряженного состояния.

Для сжатия соответственно имеем

$$\sigma_{\text{эkv}(1)} = |\sigma_3| \leq [\sigma_c]. \quad (12.5)$$

Экспериментально полученные результаты близки расчетам по этой гипотезе лишь для хрупких материалов при достаточно малых значениях двух других главных напряжений, действующих в данной точке тела.

### 12.3. ВТОРАЯ ГИПОТЕЗА ПРОЧНОСТИ

2-я гипотеза называется «**гипотезой наибольших по абсолютной величине линейных деформаций**»:

$$|\varepsilon|_{\text{max}} \leq [\varepsilon]. \quad (12.6)$$

Она основана на следующем: прочность материала при сложном напряженном состоянии считается обеспеченной, если соответствующая ему наибольшая по абсолютной величине линейная деформация растяжения или сжатия не превосходит допустимой, полученной при одноосном напряженном состоянии соответственно растяжения или сжатия.

Так как при существенных растягивающих напряжениях имеем  $|\varepsilon|_{\text{max}} = \varepsilon_1$  и для сложного напряженного состояния по обобщенному закону Гука (см. формулу (2.30))

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad (12.7)$$



а для простого (одноосного), получаемого из эксперимента,

$$[\varepsilon] = \frac{1}{E}[\sigma], \quad (12.8)$$

где  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение, установленное по экспериментальным данным одноосного растяжения.

Подставляя (12.7) и (12.8) в (12.6), получаем

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (12.9)$$

Выражение  $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$  имеет размерность напряжения и может быть принято как эквивалентное напряжение некоторого условного одноосного напряженного состояния, соответствующего 2-й гипотезе прочности,  $\sigma_{\text{экрв}(2)}$ . Значит,

$$\sigma_{\text{экрв}(2)} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (12.10)$$

Данная гипотеза не может применяться при напряжениях, превышающих предел пропорциональности. В инженерных расчетах она обычно не используется.

Если  $\sigma_2 = -\sigma_3$ , то вторая гипотеза прочности будет повторять вид  $\sigma_{\text{экрв}(1)}$  по (12.4).

#### 12.4. ТРЕТЬЯ ГИПОТЕЗА ПРОЧНОСТИ

3-я гипотеза носит название «гипотеза наибольших касательных напряжений»:

$$\tau_{\text{max}} \leq [\tau]. \quad (12.11)$$

Она основана на следующем: прочность материала при сложном напряженном состоянии считается обеспеченной, если возникающее наибольшее касательное напряжение не превосходит допускаемой величины, полученной из выражения

$$[\tau] = [\sigma]/2, \quad (12.12)$$

где  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение, установленное по экспериментальным данным одноосного растяжения.

Поскольку наибольшее касательное напряжение сложного напряженного состояния равно по (2.23)

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (12.13)$$



то, подставив (12.12) и (12.13) в (12.11), получим выражение для эквивалентного напряжения по 3-й гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{экв}(3)} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (12.14)$$

в котором значения главных напряжений должны быть подставлены с учетом их знаков. В этом выражении разность наибольшего и наименьшего напряжений может рассматриваться как единственное условное напряжение, заменяющее оба реальных напряжения.

Гипотеза наибольших касательных напряжений хорошо согласуется с экспериментальными данными для пластичных материалов и представлена простым аналитическим выражением (12.14). Именно эта гипотеза используется в ГОСТ Р 52857.11 по расчету тонкостенных элементов технологического оборудования [9]. В основном по этой гипотезе рассчитываются детали механических передач. При этом тепловая и емкостная аппаратура и механические передачи занимают в парке оборудования пищевых производств доминирующее положение. При  $\sigma_3 = 0$  первая и третья гипотезы прочности становятся тождественными даже в том случае, если  $\sigma_2 \geq 0$ .

Заметим, что при  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \pm\sigma$ , т. е. при всестороннем растяжении или всестороннем сжатии, имеем по (12.5)  $\tau_{\text{max}} = 0$ . Тогда по (12.14) материал не должен разрушаться ни при каких значениях  $\sigma$ . Это указывает на некоторое ограничение в применении третьей гипотезы. Точное достижение такого предельного напряженного состояния возможно в условиях гидростатического давления, т. е. равностороннего сжатия. Однако в реальной работе деталей пищевого машиностроения такое напряженное состояние реализуется крайне редко.

## 12.5.

### ЧЕТВЕРТАЯ ГИПОТЕЗА ПРОЧНОСТИ

4-я гипотеза называется «гипотеза наибольшей накопленной удельной потенциальной энергии формоизменения»:

$$u_{\text{ф/и max}} \leq [u]. \quad (12.15)$$



Прочность материала при сложном напряженном состоянии считается обеспеченной, если накопленная удельная потенциальная энергия упругого формоизменения не превосходит допускаемую величину накопленной удельной потенциальной энергии упругой деформации, установленной из опытов при одноосном растяжении.

Накопленная удельная потенциальная энергия упругой деформации для двухосного напряженного состояния по [1: С. 325–336; 4: С. 251–276] равна

$$u = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3). \quad (12.16)$$

Она состоит из энергии, идущей на изменение объема кубика, и энергии, идущей на изменение его формы. Ранее было отмечено, что объем тела не изменяется, если коэффициент Пуассона  $\mu = 0,5$ . Поэтому для формального перехода к формуле, учитывающей лишь удельную накопленную потенциальную энергию формоизменения, достаточно положить в (12.16)  $\mu = 0,5$ . Тогда для двухосного напряженного состояния имеем

$$u_{\phi/и} = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3). \quad (12.17)$$

Для одноосного растяжения допускаемая величина накопленной удельной потенциальной энергии упругой деформации будет равна (по 3.52)

$$[u] = \frac{1}{2E}[\sigma]^2. \quad (12.18)$$

Подставляя (12.17) и (12.18) в (12.15) и извлекая корень, получим

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma]. \quad (12.19)$$

Левая часть неравенства представляет собой эквивалентное напряжение по 4-й гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{эkv}(4)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma]. \quad (12.20)$$

Если имеет место объемное напряженное состояние, то

$$\sigma_{\text{эkv}(4)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \leq [\sigma]. \quad (12.21)$$

Результаты расчета по 4-й гипотезе хорошо соответствуют экспериментальным данным. Они дают в сравнении





с 3-й гипотезой более экономичные результаты (до 13% при чистом сдвиге), но сложнее по выражению функции  $\sigma_{\text{экв}(4)}$ . Последнее обстоятельство привело к тому, что, например, в ГОСТ Р 52857.11 по расчету тепловой и емкостной аппаратуры используется 3-я гипотеза. Однако в некоторых типах нагружения с изменяющимися нагрузками (при смене индексов главных напряжений на площадках) применение 4-й гипотезы может оказаться предпочтительнее. (Более подробное обоснование изложено, например, в [1: С. 350–354.]

### 12.6. ПЯТАЯ ГИПОТЕЗА ПРОЧНОСТИ

5-я гипотеза носит название «гипотеза Мора». Она предназначена в основном для материалов, имеющих

$$\sigma_{\text{пч. р}} < \sigma_{\text{пч. с}}, \quad (12.22)$$

где  $\sigma_{\text{пч. р}}$  — предел прочности на растяжение;  $\sigma_{\text{пч. с}}$  — предел прочности на сжатие.

Плоское напряженное состояние в данной точке тела может быть представлено графически в виде круга Мора (см. раздел 2.5). При некоторой предельной совокупности напряжений происходит разрушение материала или его переход в пластическое состояние. Ей соответствует предельный круг Мора для данного материала. К построенным для конкретного материала предельным кругам Мора для различных совокупностей напряжений может быть проведена касающаяся их кривая, которую называют огибающей. Тогда любое конкретное плоское напряженное состояние в данной точке тела, круг Мора которого касается огибающей для данного материала, означает наступление разрушения или пластического состояния.

Предельные круги и огибающую к ним строят по результатам экспериментальных данных. Сложный вид огибающей нецелесообразно описывать аналитической зависимостью, тем более что для каждого материала она будет своя. Поэтому форму огибающей упрощают до прямой, касающейся предельных кругов Мора одноосного растяжения и одноосного сжатия. Тогда зависимость между



главными напряжениями некоторого рассматриваемого плоского напряженного состояния и равноопасного ему одноосного предельного имеет вид

$$\sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_{\text{пч. р}}, \quad (12.23)$$

где для хрупких и умеренно пластичных материалов (см. тему 3.6)

$$k = \frac{\sigma_{\text{пч. р.}}}{\sigma_{\text{пч. с}}}. \quad (12.24)$$

Левая часть (12.23) может рассматриваться как напряжение некоторого эквивалентного одноосного напряженного состояния. В соответствии с 5-й гипотезой прочности обозначим его как  $\sigma_{\text{экв}(5)}$ .

По 5-й гипотезе прочности для этого одноосного эквивалентного состояния прочность материала считается обеспеченной, если  $\sigma_{\text{экв}(5)}$  не будет превышать допускаемой величины  $[\sigma_{\text{пч. р}}]$ . Таким образом, имеем эквивалентное напряжение по 5-й гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{экв}(5)} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma_{\text{пч. р}}]. \quad (12.25)$$

Если имеем пластичный материал, у которого  $k = 1$ , то гипотеза Мора трансформируется в 3-ю гипотезу — гипотезу наибольших касательных напряжений: (12.25) приобретает вид (12.14). При  $\sigma_3 = 0$  формула (12.25) повторяет формулу (12.4), т. е. первую гипотезу прочности. При  $\sigma_2 = 0$  и  $k = \mu$  формула (12.25) повторяет формулу (12.10), т. е. вторую гипотезу прочности.

## 12.7. О МЕХАНИКЕ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИН

Микротрещины в структуре конструкционного кристаллического материала существуют с момента его изготовления, а в течение эксплуатации образуется множество новых трещин. При одних условиях трещины растут, что приводит к разрушению конструкции, при других — материал сохраняет свои прочностные свойства.

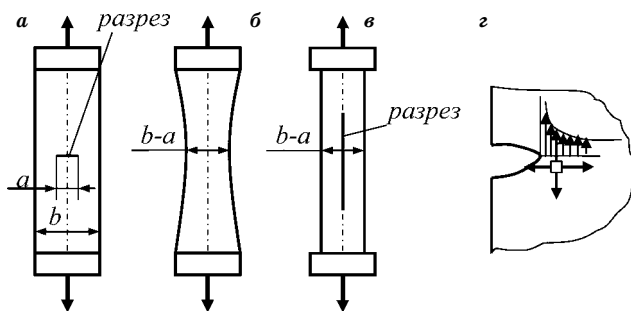


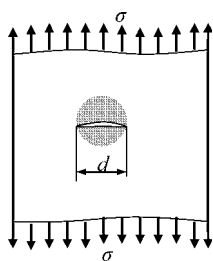
Рис. 12.2  
Иллюстрация влияния поперечной трещины  
на прочность пластины

Наличие трещин сопровождается сложным напряженным состоянием у их краев. Основная причина роста трещин заключается в местном увеличении напряжений вблизи краев (у острия трещины) по сравнению со средним (номинальным) напряжением в материале и изменением напряженного состояния материала в точке. Это доказывается следующим опытом.

Пусть имеется тонкая пластина шириной  $b$  (рис. 12.2а). Нагрузим ее некоторой растягивающей силой  $F$ , и будем прорезать пластину поперек продольной оси  $z$  острым тонким клинообразным лезвием. При некоторой длине прорези  $c$  пластина разрушится. При той же силе  $F$  пластина той же толщины, но с плавным симметричным сужением до ширины  $(b - a)$ , будет оставаться неразрушенной (рис. 12.2б). Более того, специально сделанный разрез вдоль оси  $z$  пластины (рис. 12.2в) практически не выявит прочностных различий с такой же пластиной без продольного разреза. Значит, не сужение поперечного сечения привело к разрушению пластины, не средние напряжения в сечении, а наличие поперечной прорези (трещины), сопровождающейся местным ростом напряжений у ее краев и изменением напряженного состояния материала в данной точке. В листовом материале при общем одноосном напряженном состоянии у краев трещины возникает плоское напряженное состояние (рис. 12.2г). Продольная прорезь практически не меняет условий деформирования и потому

не меняет одноосного напряженного состояния материала на двухосное.

Исходная микротрещина в материале имеет ширину, соизмеримую с размерами микроструктуры материалов (кристаллов). Конечно, при таких размерах принцип сплошности материала делает результаты аналитических решений лишены смысла, и потому применяются другие подходы. Полноценным изучением вопросов прочности в условиях наличия трещин (трещиностойкость) занимается механика разрушения.



**Рис. 12.3**  
К объяснению влияния трещин на прочностные свойства материала

Энергетическую модель разрушения предложил еще в начале 1920 гг. Гриффитс. В упрощенном качественном виде она сводится к следующему: пусть имеется растянутый толстый тостенный брус с круглой в поперечном разрезе микротрещиной диаметром  $d$  (рис. 12.3).

Во всем объеме тела напряжения  $\sigma$  распределены равномерно. Исключение составляет область у трещины. У краев трещины возникает пик напряжений. На рисунке в затемненном объеме (сфера) напряжения будут уменьшенными и равными нулю на ее поверхности.

При дополнительном росте трещины на величину  $\Delta d$  величина объема с пониженными напряжениями (затемненная область) увеличится и, значит, уменьшится потенциальная энергия.

Это уменьшение энергии будет пропорционально произведению  $\Delta d$  на величину внешней поверхности затемненного объема, которая пропорциональна квадрату  $d$ . В результате освободится энергия  $U = Kd^2\Delta d$ , где  $K$  — коэффициент пропорциональности, зависящий в первую очередь от уровня напряжений.

С другой стороны, дополнительный рост трещины связан с затратой работы на образование новой свободной поверхности. Эта работа пропорциональна произведению  $\Delta d$  на периметр трещины, пропорциональный  $d$ . Таким об-

разом, затрачивается работа  $A = Sd\Delta d$ , где  $S$  — коэффициент, определяемый свойствами материала.

Если освобождающаяся энергия окажется больше затраченной работы, то трещина будет самопроизвольно разрастаться и произойдет разрушение образца. Из сопоставления выражений энергии и работы это будет происходить при условии

$$d > S/K. \quad (12.26)$$

Значит, для каждого материала и определенного уровня напряжений существует свой критический размер трещины. Если этот размер меньше критического, то разрушения не происходит. Этим можно объяснить прочность материала даже при наличии трещин.

Величина  $K$  пропорциональна энергии, накопленной в единице объема тела, а та представляет собой квадратичную функцию напряжений. Следовательно, при низком уровне напряжений величина  $K$  будет малой и критический размер трещины увеличивается.

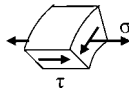
Рост трещины может блокироваться пластическими деформациями на ее краях, как бы снижающими остроту края трещины и потому снижающими здесь напряжения. Трещина может блокироваться другой продольно ориентированной трещиной (вспомним пример на рис. 12.2б). В связи с этим по отношению к металлам вводят понятие «вязкий металл». Вязкость металла — это не просто его пластичность, это свойство блокировать развитие трещин. Композиционные материалы, легирующие добавки к сталям и другие технологические приемы способствуют усилению свойств вязкости материалов.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ»

1. Какой вид напряжений соответствует изменению объема?
2. Какой вид напряжений соответствует изменению формы?
3. Можно ли так сориентировать площадки кубика материала при произвольном нагружении, чтобы по ним действовали лишь нормальные напряжения?
4. Как называются площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения?



5. Как называются нормальные напряжения, действующие на главных площадках?
6. Как называется напряженное состояние, если главные напряжения действуют только по одной паре противоположных площадок кубика?
7. Как называется напряженное состояние, если главные напряжения действуют по двум парам противоположных площадок кубика?
8. Как называется напряженное состояние, если главные напряжения действуют по всем трем парам площадок кубика?
9. Какому напряженному состоянию соответствует показанное на рисунке?



10. Как называются напряжения, которые определяются по формуле

$$\frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} ?$$

11. При каком напряженном состоянии определяются допускаемые нормальные напряжения из экспериментальной диаграммы разрушаемого образца?
12. Как называется условие, при котором рабочие напряжения не должны превышать допускаемых?
13. Для какого напряженного состояния записывается условие прочности по допускаемым нормальным напряжениям?
14. Почему нельзя записать условие прочности по  $[\sigma]$  для одноосного напряженного состояния?
15. В чем состоит смысл применения гипотез прочности?
16. Что называют эквивалентным напряженным состоянием?
17. Какое нормальное напряжение называют эквивалентным?
18. Для чего нужны гипотезы прочности?
19. В чем смысл применения гипотез прочности?
20. Какой критерий заложен в 1-ю гипотезу прочности?
21. К какой гипотезе прочности относится условие  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 \leq [\sigma_p]$ ?
22. Какой критерий заложен во 2-ю гипотезу прочности?
23. К какой гипотезе прочности относится условие  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 + \sigma_3 \leq [\sigma]$ ?
24. Какой критерий заложен в 3-ю гипотезу прочности?
25. К какой гипотезе прочности относится условие  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ ?
26. Для каких материалов выявляется хорошее экспериментальное согласование гипотезы наибольших касательных напряжений?

27. Какая гипотеза прочности заложена в ГОСТ по расчету тепловой и емкостной аппаратуры?
28. Какой критерий заложен в 4-ю гипотезу прочности?
29. К какой гипотезе прочности относится условие

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma]?$$

30. К какой гипотезе прочности относится условие  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma_{\text{пчР}}]$ ?
31. К какому напряженному состоянию приводит появление в материале трещин?
32. Какая основная причина приводит к росту трещин в материале?
33. Почему пластина с разрезом вдоль линии действия нагрузки окажется прочнее такой же пластины, но с поперечным разрезом?

## РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ДВУХОСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

### 13.1. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

Если на некотором участке бруса круглого поперечного сечения действуют изгиб и кручение (рис. 13.1*a*), то в его поперечных сечениях возникают нормальные напряжения от изгиба и касательные напряжения от кручения (рис. 13.1*б*).

Их наибольшие абсолютные величины находятся в точках *K* и *S*. Выделим в точке *K* элемент  $dV$  (рис. 13.1*б*). По его правой и левой граням действуют нормальные напряжения  $\sigma$ , создающие изгибающий момент  $M_x$ , а по четырем вертикальным граням (вспомним закон парности касательных напряжений) — касательные напряжения  $\tau$ , создающие крутящий момент  $T$ . Они равны по (7.37) и (6.17) соответственно

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{M_x}{W_x}, \\ \tau &= \frac{T}{W_p} = \frac{T}{2W_x}.\end{aligned}\tag{13.1}$$

Здесь вследствие равенства  $I_x = I_y$  учтено соотношение

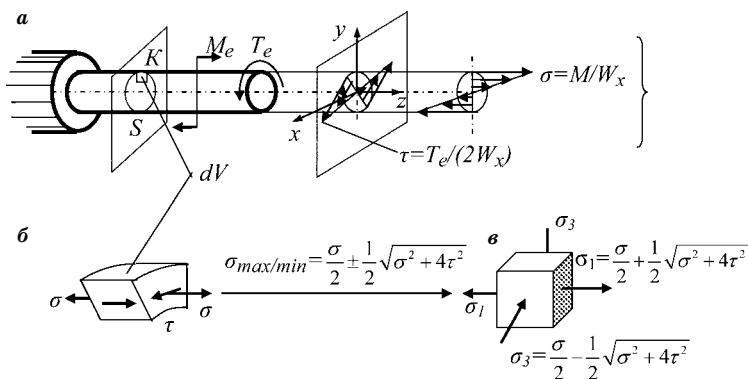
$$\begin{aligned}W_p &= I_p/(d/2) = (I_x + I_y)/(d/2) = \\ &= 2I_x/(d/2) = 2W_x.\end{aligned}\tag{13.2}$$

Знак не учитывается, поскольку в равноопасных точках *K* и *S* напряжения имеют противоположные знаки.

Таким образом, имеем двухосное напряженное состояние.

Мысленно вырезая этот кубик главными площадками, получаем на них экстремальные, т. е. главные, напряже-





**Рис. 13.1**  
Брус при совместном действии изгиба и кручения  
с действующими в нем главными напряжениями

ния  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Главные напряжения на главных площадках в этом случае определяются по (2.20) и равны (рис. 13.1б)

$$\sigma_{\max/\min} = \sigma_{1(3)} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (13.3)$$

Поскольку имеет место двухосное напряженное состояние, то условие прочности записывается по эквивалентному напряжению:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma]. \quad (13.4)$$

По формуле (12.6) третьей гипотезы прочности эквивалентное напряжение по 3-й гипотезе прочности равно

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{(3\text{гп})} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (13.5)$$

Значит,

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (13.6)$$

Подставляя в (13.6) величины главных напряжений по (13.3), получаем с учетом (13.1), (13.2) и (13.5)

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{(3\text{гп})} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (13.7)$$

Если брус круглого поперечного сечения испытывает изгиб в двух плоскостях и кручение, то вместо  $M^2$  должно стоять  $M_{\text{н}}^2 = M_x^2 + M_y^2$  (см. получение формулы (11.13)).



Тогда имеем

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M_n^2 + T^2}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + T^2}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (13.8)$$

Для круглого поперечного сечения имеем  $W_x \approx 0,1d^3$ . С учетом этого соотношения вычисляют по условию (13.7) или (13.8) либо допускаемую величину диаметра

$$[d]_{3г.п.} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_n^2 + T^2}}{0,2[\sigma]}}, \quad (13.9)$$

либо допускаемую величину нагрузки, либо делают поворочный расчет.

Такие же рассуждения, но с учетом 4-й гипотезы прочности дают вместо (13.7)

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{(4г.п.)} \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T^2}}{W_x} \leq [\sigma] \quad (13.10)$$

и вместо (13.9)

$$[d]_{4г.п.} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_n^2 + 0,75T^2}}{0,2[\sigma]}}. \quad (13.11)$$

### Пример 13.1.

**Д а н о:** вал круглого постоянного поперечного сечения, нагруженный пространственной нагрузкой (рис. 13.2а);  $T_{e1} = 637$  Нм;  $T_{e2} = ?$ ;  $T_{e3} = 223$  Нм;  $S_x = 7835$  Н;  $S_y = 4778$  Н;  $F_2 = 4140$  Н;  $Q_2 = 1507$  Н;  $F_3 = 4460$  Н;  $Q_3 = 1623$  Н; материал вала — сталь, имеющая  $\sigma_T = 500$  МПа; коэффициент запаса прочности принять равным  $n_T = 1,5$ .

**Т р е б у е т с я:** определить допускаемую величину диаметра вала  $[d]$  по третьей гипотезе прочности; по результатам расчетов принять округленное значение  $[d]_i$  в соответствии с нормальными линейными размерами, принятыми в машиностроении по ряду  $R_{20}$ .

**Решение.** 1. Определяем  $T_{e2}$  по условию равновесия  $\sum T_{ey} = 0$ , которое дает

$$T_{e1} - T_{e2} - T_{e3} = 0 \rightarrow T_{e2} = T_{e1} - T_{e3} = 637 - 223 = 414 \text{ Нм.}$$

2. Определяем реакции  $Y_B, X_B, Y_C, X_C$ . При указанных направлениях всех векторов нагрузок, включая реакции



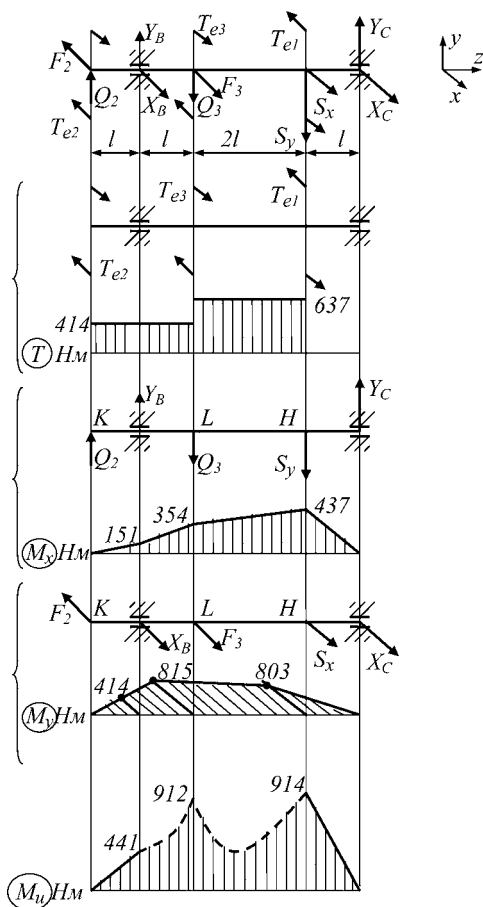


Рис. 13.2  
К решению примера 13.1

опор, правило знаков в уравнении равновесия системы в виде суммы моментов выбирается произвольно. Обязательным является условие, согласно которому все слагаемые данного уравнения подчинялись единому выбранному правилу знаков. В другом уравнении моментов правило знаков может быть иным. Проверкой справедливости данного утверждения может служить умножение на  $-1$  правой и левой частей уравнения, что соответствует выбору про-

твояположного правила знаков. При этом результат решения останется неизменным. Знаки слагаемых в сумме проекций всех сил на ось определяются совпадением или несовпадением вектора-силы с направлением оси.

$$\begin{aligned} \sum M_{xB} = 0 &\rightarrow Y_C 4l - S_y 3l - Q_3 l - Q_2 l \rightarrow Y_C = \\ &= (3S_y + Q_3 + Q_2) \frac{1}{4} = (3 \cdot 4778 + 1623 + 1507) \frac{1}{4} = 4366 \text{ Н}; \\ \sum M_{xC} = 0 &\rightarrow Q_2 5l + Y_B 4l - Q_3 3l - S_y l = 0 \rightarrow Y_B = \\ &= (-5Q_2 + 3Q_3 + S_y) \frac{1}{4} = (-5 \cdot 1507 + 3 \cdot 1623 + 4778) \frac{1}{4} = 528 \text{ Н}; \\ \sum M_{yB} = 0 &\rightarrow X_C 4l + S_x 3l + F_3 l + F_2 l = 0 \rightarrow X_C = \\ &= (-3S_x - F_3 - F_2) \frac{1}{4} = (-3 \cdot 7835 - 4460 - 4140) \frac{1}{4} = -8026 \text{ Н}; \\ \sum M_{yC} = 0 &\rightarrow F_2 5l - X_B 4l - F_3 3l - S_x l = 0 \rightarrow X_B = \\ &= (5F_2 - 3F_3 - S_x) \frac{1}{4} = (5 \cdot 4140 - 3 \cdot 4460 - 7835) \frac{1}{4} = -129 \text{ Н}. \end{aligned}$$

3. Строим эпюры.

3.1. Внешние крутящие моменты дают эпюру  $T$  (рис. 13.2б). Имеем два участка с моментами 414 Нм и 637 Нм.

3.2. Внешняя вертикальная нагрузка дает изгиб, для которого строим эпюру  $M_x$  (рис. 13.2в). Имеем четыре участка с моментами на их границах:

$$\begin{aligned} M_{xK} &= 0; \\ M_{xB} &= Q_2 l = 1507 \cdot 0,1 = 151 \text{ Нм}; \\ M_{xL} &= Q_2 2l + Y_B l = 1507 \cdot 2 \cdot 0,1 + 528 \cdot 0,1 = 354 \text{ Нм}; \\ M_{xH} &= Y_C l = 4336 \cdot 0,1 = 437 \text{ Нм}; \\ M_{xC} &= 0. \end{aligned}$$

Строим эпюру  $M_x$  (в вертикальной плоскости).

3.3. Внешняя горизонтальная нагрузка дает эпюру  $M_y$  (рис. 13.2г). Имеем четыре участка с моментами на их границах:

$$\begin{aligned} M_{yK} &= 0; \\ M_{yB} &= F_2 l = 4140 \cdot 0,1 = 414 \text{ Нм}; \\ M_{yL} &= F_2 2l - X_B l = 4140 \cdot 2 \cdot 0,1 - 129 \cdot 0,1 = 841 \text{ Нм}; \\ M_{yH} &= X_C l = -(-8026)0,1 = 803 \text{ Нм}; \\ M_{yC} &= 0. \end{aligned}$$

Строим эпюру  $M_y$  (в горизонтальной плоскости).

3.4. Строим суммарную эпюру изгибающих моментов, подсчитывая величины моментов по формуле

$$M_{ni} = \sqrt{M_{xi}^2 + M_{yi}^2}$$

(рис. 13.2*д*):

$$M_{нК} = 0;$$

$$M_{нВ} = \sqrt{M_{xB}^2 + M_{yB}^2} = \sqrt{151^2 + 414^2} = 441 \text{ Нм};$$

$$M_{нL} = \sqrt{M_{xL}^2 + M_{yL}^2} = \sqrt{354^2 + 841^2} = 912 \text{ Нм};$$

$$M_{нH} = \sqrt{M_{xH}^2 + M_{yH}^2} = \sqrt{437^2 + 803^2} = 914 \text{ Нм};$$

$$M_{нС} = 0.$$

При построении эпюры  $M_n$  следует иметь в виду, что геометрическое сложение пересекающихся прямых дает прямую линию (крайние слева и справа участки), а перекрещивающихся (не имеющих общей точки пересечения) — сложную кривую. Вся эпюра строится в вертикальной плоскости, участки со сложной кривой показывают штриховой линией.

4. Расчет на прочность вала постоянного сечения производим в координате точки  $H$ , поскольку там действует наибольший  $M_n$ . Момент сопротивления при изгибе постоянен по всей длине вала  $W_x = 0,1d^3$ .

В поперечном сечении  $H$  действуют нормальные напряжения от изгиба и касательные от кручения. Поэтому имеет место двухосное напряженное состояние. Следовательно, расчет на прочность производим по эквивалентному напряжению согласно 3-й гипотезе прочности. Допускаемый диаметр находим из (13.8), куда подставляем  $W_x = 0,1d^3$  и выражаем в явном виде  $[d]$ :

$$[d]_{3г.п} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_u^2 + T^2}}{0,1\sigma_T} n_T} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{914^2 + 637^2}}{0,1 \cdot 500 \cdot 10^6} 1,5} = 0,0322 \text{ м}.$$

Округляем до ближайшего нормального значения линейных размеров ряда  $R_{20}$ , откуда  $[d] = 32 \text{ мм}$ . Незначитель-



ное уменьшение размера по сравнению с расчетным  $[d]_{3г.п} = 32,2$  мм приводит к превышению максимальных эквивалентных напряжений  $< 5\%$ , что допустимо.

Если бы определяли допускаемый диаметр по (13.11) 4-й гипотезы прочности, то в результате получили бы

$$[d]_{4г.п} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_u^2 + 0,75T^2}}{0,1\sigma_T} n_T} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{914^2 + 0,75 \cdot 637^2}}{0,1 \cdot 500 \cdot 10^6} 1,5} = 0,0318 \text{ м},$$

что, как и следовало ожидать, несколько меньше предыдущего результата.

### 13.2.

#### ПОВЕРОЧНЫЕ РАСЧЕТЫ (ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА ПРОЧНОСТИ)

По аналогии с применяемым для одноосного напряженного состояния коэффициентом запаса прочности можем записать для эквивалентного состояния (одноосного):

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{эkv}}. \quad (13.12)$$

Поскольку по 3-й гипотезе прочности для рабочих наибольших напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  от действующих на вал нагрузок изгиба и кручения имеем по (13.8)

$$\sigma_{эkv}^{3г.п.} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

то по (13.12) получаем

$$n = \frac{\sigma_T}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau}{\sigma_T}\right)^2}}. \quad (13.13)$$

Но

$$\tau_T = \sigma_T/2. \quad (13.14)$$

Подставляя (13.14) в (13.13), получаем

$$n = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_T}\right)^2}}. \quad (13.15)$$

Известно, что

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_T}{\sigma} \text{ и } n_{\tau} = \frac{\tau_T}{\tau}. \quad (13.16)$$

После подстановки (13.16) в (13.15) получаем

$$n = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_{\sigma}}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_{\tau}}\right)^2}} = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}. \quad (13.17)$$

После преобразования получаем

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_{\sigma}^2} + \frac{1}{n_{\tau}^2}. \quad (13.18)$$

Формула (13.18) соответствует формуле Гафа–Полларда. По этой формуле проще оценить, какой тип внешней нагрузки (изгиб или кручение) определяет в основном коэффициент запаса прочности.

**Пример 13.2.**

Д а н о: данные примера 13.1 и назначенный по результатам расчета по 3-й гипотезе прочности диаметр вала  $[d] = 32$  мм.

Т р е б у е т с я: определить общий коэффициент запаса прочности по (13.13).

*Решение.* По (13.1), (13.14) и (13.16) имеем

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x}, \quad \tau = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{2W_x}, \quad \tau_T = 0,5\sigma_T, \quad n_{\sigma} = \frac{\sigma_T}{\sigma} \text{ и } n_{\tau} = \frac{\tau_T}{\tau}.$$

Подставляя эти параметры в (13.15), вычисляем

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_T}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{M_u/W_x}{\sigma_T}\right)^2 + \left(\frac{T/(2W_x)}{\sigma_T/2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{914/(0,1 \cdot 0,032)^3}{500 \cdot 10^6}\right)^2 + \left(\frac{637/(0,1 \cdot 0,032)^3}{500 \cdot 10^6}\right)^2}} = 1,47, \end{aligned}$$

что лишь на 2% меньше принятого выше коэффициента запаса прочности  $n = 1,5$  и потому допустимо. Уменьшение вычисленной здесь величины  $n$  произошло вследствие выбора в примере 12.1 нормативной величины диаметра вала несколько меньше расчетной.



### 13.3. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ СОСУДОВ

Рассмотрим тонкостенные сосуды, представляющие собой осесимметричные оболочки вращения, в которых толщина стенки  $s$  мала по сравнению с диаметром  $D$  сосуда и нагрузка постоянна по окружной координате. В их стенках можно пренебречь изменением напряжений по толщине. Понятие тонкостенности определяется в ГОСТ Р 52857.2-2007 [9]. Расчет таких сосудов проводят по безмоментной (мембранной) теории оболочек, т. е. считают, что оболочка как мембрана не передает момент. Аналитической основой безмоментной (мембранной) теории оболочек являются уравнение Лапласа и уравнение равновесия мысленно отсеченной части длины оболочки.

Расчетную схему для вывода уравнения Лапласа примем в виде оболочки вращения, находящейся под внутренним газовым давлением  $P$ . Все расчетные формулы ведутся по отношению к **срединной поверхности**, т. е. поверхности, равноотстоящей от внутренней и внешней поверхностей стенки оболочки.

Мысленно выделим бесконечно малый элемент  $dA$  оболочки, ограниченный по окружным направлениям двумя коническими поверхностями 1 и 2, образующие которых перпендикулярны касательной к поверхности в месте их

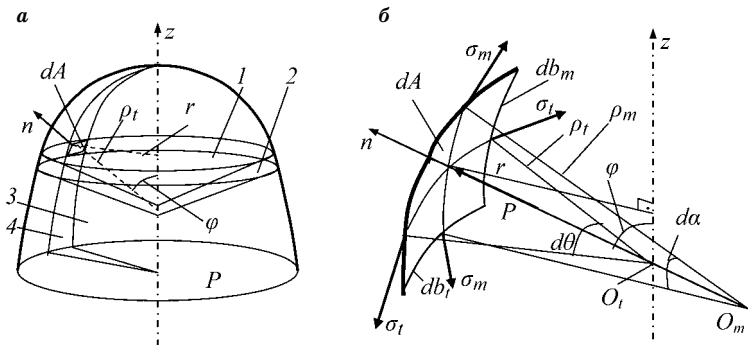


Рис. 13.3

Тонкостенная оболочка под действием внутреннего давления  $P$  и ее бесконечно малый элемент под нагрузкой



пересечения с оболочкой, и по меридиональным направлениям — двумя осевыми плоскостями 3 и 4 (рис. 13.3а).

Представим этот элемент его срединной поверхностью  $dA$  со сторонами  $db_t$  и  $db_m$  (рис. 13.3б). Изнутри он нагружен давлением  $P$ . По его стенкам действуют окружные  $\sigma_t$  и меридиональные  $\sigma_m$  напряжения. Радиусы кривизны срединной поверхности элемента  $dA$  в окружном и меридиональном направлениях обозначены соответственно  $\rho_t$  и  $\rho_m$ , расстояние от оси  $z$  до срединной поверхности обозначено как  $r$ , угол в осевой плоскости между осью  $z$  и нормалью  $n$  к срединной поверхности элемента обозначен как  $\varphi$ . При этом следует помнить, что центр кривизны в окружном направлении всегда лежит на оси  $z$  (точка  $O_t$ ), а положение центра кривизны в окружном направлении — точка  $O_m$  — зависит от формы образующей срединной поверхности. Тогда параметры  $\rho_t = r/\sin\varphi$  и параметры  $\rho_t$ ,  $\rho_m$ ,  $r$  в общем случае будут переменными.

Рассмотрим равновесие мысленно вырезанного бесконечно малого элемента  $dA$  оболочки (рис. 13.3б). Уравнение равновесия сил на ось  $n$ , приведенных к срединной поверхности оболочки, имеет вид

$$\sum F_i = 0, \text{ или } F_P - 2F_{\sigma_m} - 2F_{\sigma_t} = 0, \quad (13.19)$$

в котором усилия со стороны внутреннего газового давления, меридиональных и окружных напряжений имеют вид соответственно

$$\begin{aligned} F_P &= P \cdot db_t \cdot db_m = P \cdot \rho_t d\theta \cdot \rho_m d\alpha, \\ F_{\sigma_m} &= \sigma_m \sin \frac{d\alpha}{2} \cdot \rho_t \cdot d\theta \cdot s, \\ F_{\sigma_t} &= \sigma_t \sin \frac{d\theta}{2} \cdot \rho_m \cdot d\alpha \cdot s, \end{aligned} \quad (13.20)$$

где  $s$  — толщина стенки оболочки,  $d\alpha$  — угол, охватывающий элемент в меридиональной плоскости,  $d\theta$  — угол, охватывающий элемент в окружном направлении.

После подстановки (13.20) в (13.19) и преобразований получим выражение

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{P}{s}, \quad (13.21)$$

называемое **уравнением Лапласа**.



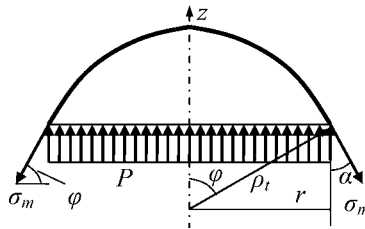


Рис. 13.4  
Отсеченная часть оболочки с действующей на нее нагрузкой

Второе расчетное уравнение получают на основании выполнения условия равновесия проекций сил на ось  $z$  мысленно отсеченной части оболочки в той же координате (рис. 13.4):

$$\sum F_{zi} = 0, \text{ или } F_{zP} - F_{z\sigma m} = 0. \quad (13.22)$$

Сечение выполнено плоскостью, перпендикулярной оси  $z$  и ограниченной срединной поверхностью оболочки, и конической поверхностью с образующей  $\rho_t$ . Давление со стороны отброшенной части показано в соответствии с законом Паскаля вертикальной нагрузкой, распределенной по плоской поверхности сечения.

Усилie от  $\sigma_t$  перпендикулярно оси  $z$  и потому его проекция на эту ось равна нулю.

В данном уравнении суммарное усилие со стороны газового давления  $F_{zP}$  и уравновешивающее его усилие  $F_{z\sigma m}$ , образуемое меридиональными напряжениями, имеют вид

$$\begin{aligned} F_{zP} &= P\pi r^2, \\ F_{z\sigma m} &= \sigma_m \sin \varphi 2\pi r s, \end{aligned} \quad (13.23)$$

где  $r$  — радиус окружности срединной поверхности оболочки.

Подстановка (13.23) в (13.22) с учетом  $\rho_t = r/\sin \varphi$  дает

$$\sigma_m = \frac{Pr}{2s \cdot \sin \varphi}. \quad (13.24)$$

После подстановки (13.24) в (13.21) получим

$$\sigma_t = \frac{P \cdot r}{s \cdot \sin \varphi} \left( 1 - \frac{1}{2 \sin \varphi} \frac{r}{\rho_m} \right). \quad (13.25)$$

Поскольку для тонкостенных оболочек по этим уравнениям получаем  $\sigma_t \geq \sigma_m$  и  $P \ll \sigma_m$ , то давлением пренебрегают и напряженное состояние стенки считают плоским (двухосным), в котором  $\sigma_1 = \sigma_t$ ,  $\sigma_2 = \sigma_m$ ,  $\sigma_3 = P \approx 0$ . Тогда по третьей гипотезе прочности с учетом (13.5) и (13.6) расчет на прочность тонкостенных сосудов ведется исходя из формулы

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - 0 = \sigma_t \leq [\sigma]. \quad (13.26)$$

На основе именно такой формулы проводится расчет на прочность емкостных аппаратов в ГОСТ Р 52857.2-2007.

Рассмотрим примеры расчета характерных типов оболочек, работающих при внутреннем газовом давлении.

Для цилиндра  $s = s_{\text{ц}}$ , радиус кривизны прямолинейной образующей цилиндра  $\rho_m = \infty$ ,  $\varphi = \pi/2$ , поэтому  $\sin \varphi = 1$  и радиус кривизны окружности  $\rho_t = r_{\text{ц}} = r = \text{const}$ . Тогда по всей длине цилиндра из (13.24) получим  $\sigma_m = \frac{P \cdot r_{\text{ц}}}{2s_{\text{ц}}}$ , из

(13.25) получим  $\sigma_t = \frac{P \cdot r_{\text{ц}}}{s_{\text{ц}}}$ , т. е. имеем  $\sigma_t = 2\sigma_m$ , и с учетом

(13.26) наименьшее значение толщины стенки составит

$$[s_{\text{ц}}] = \frac{P \cdot r_{\text{ц}}}{[\sigma]}. \quad (13.27)$$

Для конуса из сравнения (13.24) и (13.25) с учетом

$s = s_{\text{к}}$ ,  $\rho_m = \infty$  и  $\rho_t = \frac{r}{\sin \varphi}$  получим, как и для цилиндра

$\sigma_t = 2\sigma_m$ . При этом наибольшие напряжения возникают у широкого основания конуса, где радиус его окружности

равен  $r = r_{\text{к}}$ , а  $\sigma_t = \frac{P \cdot r_{\text{к}}}{s_{\text{к}} \cdot \sin \varphi}$ . Поэтому с учетом (13.26), а

также того, что в ГОСТ 14249-89 используется угол  $\alpha = 90^\circ - \varphi$ , являющийся половиной угла раскрытия конуса,

$$[s_{\text{к}}] = \frac{P \cdot r_{\text{к}}}{[\sigma] \cdot \sin \varphi} = \frac{P \cdot r_{\text{к}}}{[\sigma] \cdot \cos \alpha}. \quad (13.28)$$



Для сферы  $s = s_c$ ,  $\rho_m = \rho_t = \frac{r}{\sin \varphi} = r_c$ ,  $\sigma_t = \sigma_m$  и напряжения одинаковы по всей оболочке сферы  $\sigma_t = \frac{P \cdot r_c}{s_c \cdot \sin \varphi}$ . Поэтому с учетом (13.26)

$$[s_c] = \frac{P \cdot r_c}{2[\sigma]}. \quad (13.29)$$

Формулы расчетных толщин (13.27) и (13.28) получены с учетом того, что для цилиндрической и конической оболочек наибольшим напряжением является окружное:  $\sigma_1 = \sigma_t$ ,  $\sigma_2 = \sigma_m$ ,  $\sigma_3 = P \approx 0$ . Для сферической оболочки окружные и меридиональные напряжения оказались равными.

Сопряжение в тонкостенном аппарате элементов разных геометрических форм (нарушение геометрической регулярности) создает краевой (локальный, местный) эффект. Он заключается в том, что напряжения в зоне сочтения элементов оболочек разных форм, т. е. у стыкуемых краев, могут существенно возрастать. Это возрастание учитывается табличными и расчетными коэффициентами. Краевой эффект и эффект концентратора напряжений имеют одну природу: они являются следствием **стесненной деформации**. Это понятие связано с условиями различия свободных деформаций стыкуемых элементов под действием нагрузки, когда они не связаны друг с другом. В приваренном друг к другу состоянии их деформации ограничены, т. е. стеснены. Влияние краевых напряжений ограничено малым расстоянием, имеющим порядок величины  $\sqrt{\frac{Ds}{2}}$ . Так, для цилиндрического аппарата, имеющего

$D = 2$  м и  $s = 0,01$  м, это расстояние соответствует 0,1 м.

В зоне краевого эффекта напряжения в окружном и меридиональном направлениях подсчитывают как суммы

$$\sigma_{\Sigma t} = \sigma_t + \sigma_{tk.э} \text{ и } \sigma_{\Sigma m} = \sigma_m + \sigma_{mk.э}. \quad (13.30)$$

Здесь  $\sigma_{tk.э}$  и  $\sigma_{mk.э}$  — составляющие от краевого эффекта в окружном и меридиональном направлениях соответственно.

Заметим, что влияние краевого эффекта часто приводит к большему росту напряжений, действующих в меридиональном направлении, по сравнению с окружными. В результате может оказаться  $\sigma_1 = \sigma_{\Sigma m}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{\Sigma t}$ , и в условии прочности (13.5) войдут суммарные (с учетом добавочных краевых напряжений) меридиональные напряжения  $\sigma_{\Sigma m}$  вместо суммарных окружных  $\sigma_{\Sigma t}$ . Тогда вместо условия прочности по (13.26) будем иметь

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\Sigma m} \leq [\sigma]. \quad (13.31)$$

Краевые напряжения, т. е. напряжения от краевого эффекта, распространяются на небольшое расстояние от конструкционной особенности, которая их вызвала. В результате для обеспечения прочности может потребоваться увеличение толщины стенки. С учетом локального действия краевых напряжений это утолщение в зоне стыковки элементов ограничивают по длине оболочек коротким участком с утолщенной у места стыковки стенкой. Толщина и ширина утолщения рассчитываются. Снижения краевого эффекта достигают также сглаживанием формы соединения элементов аппарата — их закруглением в виде тороидального перехода. Часто объединяют оба конструктивных решения: и утолщают, и в месте стыка делают тороидальный переход.

К расчетной толщине стенки  $s$  добавляют прибавки на коррозию и эрозию  $c_1$ , технологическую прибавку  $c_2$ , связанную с уменьшением толщины исходного листа при изготовлении оболочки, и прибавку  $c_3$  на округление размера листа. Таким образом, назначаемое значение  $s$  соответствует толщине исходного листа материала, из которого будет сделана оболочка. Прибавки  $c_2$  и  $c_3$  учитывают в тех случаях, когда их суммарная величина превышает 5% номинальной толщины листа.

Если на элемент аппарата действует гидростатическое давление, составляющее  $\geq 5\%$  от рабочего, то расчетное давление для этого элемента должно быть повышено на эту же величину.

Для сосудов и аппаратов, работающих при многократных нагрузках, приводящих к количеству циклов нагру-



жения более  $10^3$  за весь срок эксплуатации, кроме расчета по ГОСТ Р 52857.6-2007, следует выполнять проверку на усталостную прочность. Если колебания нагрузки не превышают 15% от расчетной, то проверки на усталостную прочность выполнять не следует.

### Пример 13.3.

Дано: сосуд, состоящий из цилиндрической обечайки\*, имеющей  $D = 1$  м, конического днища с  $\alpha = 60^\circ$  и сферической крышки радиусом  $r_c = 1,5$  м, находится под действием постоянного избыточного внутреннего давления  $P = 2$  атм =  $2 \cdot 10^5$  Па (рис. 13.5).

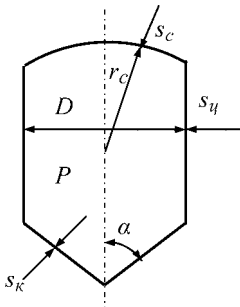


Рис. 13.5  
Расчетная схема к примеру 12.3

Т р е б у е т с я: без учета прибавок, пренебрегая краевым эффектом и весом аппарата, вычислить толщины стенок его элементов:  $[s_{ц}]$ ,  $[s_{к}]$  и  $[s_{с}]$ . Принять  $[\sigma] = 200$  МПа.

*Решение.* Толщина цилиндрической обечайки равна

$$[s_{ц}] = \frac{P \cdot (D/2)}{[\sigma]} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot (1/2)}{200 \cdot 10^6} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,5 \text{ мм.}$$

Толщина сферической крышки равна

$$[s_{с}] = \frac{P \cdot r_c}{2[\sigma]} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1,5}{2 \cdot 200 \cdot 10^6} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,75 \text{ мм.}$$

Толщина конического днища у его наибольшего диаметра, где  $r_{к} = (D/2)$  и, значит, действуют наибольшие напряжения, равна

$$[s_{к}] = \frac{P \cdot r_{к}}{[\sigma] \cdot \cos \alpha} = \frac{P \cdot (D/2)}{[\sigma] \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot (1/2)}{200 \cdot 10^6 \cdot \cos 60^\circ} = 10^{-3} \text{ м} = 1 \text{ мм.}$$

Как видим, коническое днище должно иметь бóльшую толщину по сравнению со стыкуемой с ним цилиндриче-

\* Обечайкой называют открытую (без крышки) кольцевую оболочку цилиндрической или конической формы, как правило, предназначенную для сваривания с другим элементом аппарата. В машиностроении цилиндрическую обечайку называют также царгой (цáрга).

ской оболочкой. В практических расчетах учитывается краевой эффект в месте сопряжения конуса с цилиндром, еще более увеличивающий требуемую толщину конического днища и цилиндра.

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ  
«РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ДВУХОСНОМ  
НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ»**

1. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях бруса при совместном действии изгиба и растяжения?
2. Какое напряженное состояние возникает при совместном действии изгиба и растяжения?
3. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях бруса при совместном действии изгиба и кручения?
4. Какое напряженное состояние возникает при совместном действии изгиба и кручения?
5. Как называются напряжения, определяемые формулой

$$\frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} ?$$

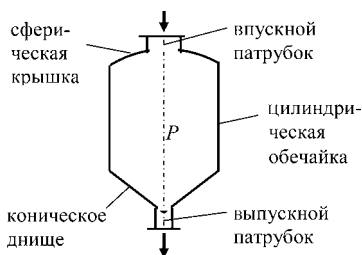
6. Какой формулой определяются по 3-й гипотезе прочности эквивалентные напряжения при совместном действии изгиба и кручения?
7. Какой формулой определяются по 4-й гипотезе прочности эквивалентные напряжения при совместном действии изгиба и кручения?
8. Какой вид имеет формула для определения коэффициента запаса прочности при сложном напряженном состоянии?
9. Как называется теория для расчета тонкостенных оболочек вращения, работающих под внутренним давлением?
10. Какие два уравнения используют для расчета тонкостенных оболочек вращения, работающих под давлением?
11. Как называется уравнение

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{P}{s} ?$$

12. По какой гипотезе прочности обычно рассчитывают оболочки вращения?
13. Как называются главные напряжения в оболочках вращения?
14. Почему эквивалентное напряжение по третьей гипотезе прочности для тонкостенных оболочек вращения, работающих под действием внутреннего давления, имеет вид  $\sigma_{\text{экр}} = \sigma_t$ ?



15. Чему равно соотношение между окружными напряжениями и меридиональными в цилиндрической оболочке при газовом давлении?
16. Чему равно соотношение между окружными напряжениями и меридиональными в конической оболочке при газовом давлении?
17. В каком месте действуют наибольшие напряжения в конической оболочке при газовом давлении?
18. Чему равно соотношение между окружными напряжениями и меридиональными в сферической оболочке при газовом давлении?
19. Что возникает в месте стыковки элементов разных геометрических форм оболочки?
20. Как далеко распространяется существенное действие краевого эффекта?
21. В чем причина возникновения краевого эффекта?
22. Какими приемами снижают краевой эффект?
23. Для какого элемента и в каком месте показанного на рисунке аппарата должна быть наибольшая толщина стенки?





## РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

14.1.  
ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В предыдущих разделах показаны расчеты конструкций на прочность ( $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ ) и жесткость ( $\theta_{\max} \leq [\theta]$ ). Однако существует еще одна опасность, нарушающая работоспособность конструкции, — качественное изменение характера ее деформаций с переходом к новой равновесной форме. Так, длинный прямолинейный стержень под действием продольной сжимающей силы становится криволинейным. В этом случае говорят, что он потерял устойчивость. Устойчивой называют конструкцию, которая при малых (слабых) возмущениях не переходит скачкообразно к качественно новому равновесному состоянию. Под равновесным состоянием конструкции подразумевается ее форма, соответствующая нагрузке. Резкая, скачкообразная смена первоначальной равновесной формы на новую связана с потерей устойчивости. Так происходит при некоторой характерной нагрузке, называемой критической. Таким образом, с потерей устойчивости нарушается работоспособность конструкции удерживать нагрузку в ее первоначальном заданном положении.

**Устойчивость** — это способность конструкции сохранять свою начальную (заданную) равновесную форму при действии нагрузки. Данное определение не является строгим, но достаточно точно определяет сущность задачи.

Потеря устойчивости может произойти в стержнях, оболочках, т. е. в объектах, у которых два или один характерных размера несоизмеримы с другим(и). При этом прямолинейный стержень изогнется, в оболочке произойдет



общее или местное изменение формы ее поверхности (изгиб вдоль оси  $z$ , поперечное сплющивание, появление поперечных гофр).

Величина приложенной вдоль прямолинейного стержня сжимающей силы, выше которой конструкция теряет устойчивость, называется **критической** ( $F_{кр}$ ). При ней напряжения, называемые критическими, могут оказаться значительно ниже допускаемых с точки зрения прочности:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} < [\sigma_c], \quad (14.1)$$

тем не менее конструкция потеряет работоспособность. Значит, напряжения, полученные из диаграммы одноосного растяжения или сжатия, не могут служить предельными параметрами, по которым оценивают работоспособность конструкции по ее устойчивости. Ими являются критическая продольная сила  $F_{кр}$  либо получаемое по ней критическое напряжение  $\sigma_{кр}$ , зависящие от параметров расчетной схемы.

Рассмотрим пример. Пусть имеется лист бумаги, расположенный вертикально и жестко закрепленный снизу (рис. 14.1а).

Даже под действием собственной силы тяжести плоский лист может согнуться, т. е. не будет удерживать даже собственный вес в своем распрямленном состоянии (рис. 14.1б). Он оказывается неработоспособным, поскольку теряет свою устойчивость. При этом лист не разруша-

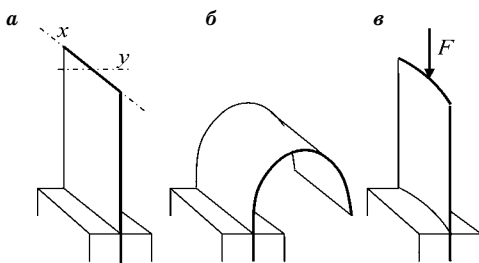


Рис. 14.1

Иллюстрация неустойчивого и устойчивого равновесия

ется. Его вновь можно распрямить, создать начальную равновесную форму. Значит, напряжения, при которых произошла потеря устойчивости, были весьма малы с точки зрения прочности листа.

Потеря устойчивости (изгиб) произошла в плоскости, перпендикулярной плоскости самого листа. При этом в плоскости листа лежит та главная центральная ось его поперечного сечения, относительно которой осевой момент инерции сечения минимален (здесь — ось  $x$ ):

$$I_{\min} = I_x < I_y. \quad (14.2)$$

Это окажется важным признаком при выводе формулы критической силы и решении задач.

Если тот же лист хотя бы слегка изогнуть в плоскости, перпендикулярной возможному изгибу, то он сможет нести даже некоторую дополнительную к собственному весу осевую сжимающую силу  $F$  (рис. 14.1*в*). Значит, не площадь поперечного сечения определяет устойчивость, а другие параметры конструкции. Отсюда следует, что при возможности потери конструкцией устойчивости существуют как менее рациональные формы ее поперечного сечения, так и более рациональные.

Допускаемая сжимающая сила определяется как

$$[F_y] = \frac{F_{\text{кр}}}{n_y}, \quad (14.3)$$

где  $n_y$  — коэффициент запаса по устойчивости.

Причина потери устойчивости заключается в неизбежных начальных отклонениях геометрической формы конструкции, однородности свойств материала и нагрузки от идеальных.

Конструкция теряет устойчивость под действием многих трудно учитываемых факторов. Поэтому коэффициент запаса по устойчивости принимают достаточно большим:

- в строительных конструкциях  $n_y = 1,7 \dots 2,0$ ;
- в пищевом машиностроении  $n_y = 3 \dots 5$ .



### 14.2. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Рассмотрим прямолинейный плоский ( $I_{\min} = I_x < I_y$ ) стержень, с шарнирным опиранием его концов и центрально приложенной в подвижной опоре продольной сжимающей силой  $F$  (рис. 14.2).

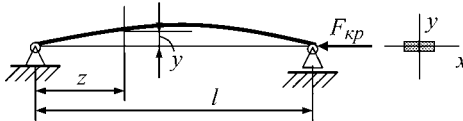


Рис. 14.2  
Расчетная схема к выводу формулы Эйлера

Если  $F < F_{кр}$ , то стержень остается прямолинейным и изгиб отсутствует. При некоторой величине  $F$ , близкой  $F_{кр}$ , стержень изогнется и получит малый прогиб, который в координате  $z$  равен  $y$ .

При малых прогибах и выполнении закона Гука справедливо равенство (8.5), полученное при выводе нормальных напряжений при изгибе. Запишем его в виде

$$EI_{\min}y'' = M_x. \quad (14.4)$$

Момент, возникающий в сечении  $z$  (рис. 14.2), равен

$$M_x = -Fy. \quad (14.5)$$

Момент в (14.5) отрицателен, поскольку «сжатое волокно» находится снизу при положительном прогибе  $y$ .

Подставив (14.5) в (14.4) и введя обозначение

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{\min}}, \quad (14.6)$$

получим дифференциальное уравнение второго порядка без правой части

$$y'' + \alpha^2y = 0. \quad (14.7)$$

Его решением является функция прогиба

$$y = C_1 \sin(\alpha z) + C_2 \cos(\alpha z). \quad (14.8)$$

Произвольные постоянные в (14.8) определяем с помощью граничных условий:

$$y|_{z=0} = 0, \quad (14.9)$$

$$y|_{z=l} = 0. \quad (14.10)$$

Подстановка (14.9) в (14.8) дает

$$0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 \rightarrow C_2 = 0. \quad (14.11)$$

Подстановка (14.10) в (14.8) с учетом (14.11) дает

$$0 = C_1 \sin(\alpha l), \quad (14.12)$$

из которого следует:

- либо  $C_1 = 0$ , но тогда имеем лишь тривиальное решение, при котором при любых  $z$  получаем  $y = 0$ , т. е. потери устойчивости не происходит;
- либо

$$\sin(\alpha l) = 0 \rightarrow \alpha l = n\pi \rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{l}, \quad (14.13)$$

где  $\pi = 180^\circ$ , что означает по рис. 14.2 прогиб стержня в виде полуволны,  $n$  — натуральное число (полуволн синусоиды).

Подставляя в (14.13) значение  $\alpha$  по (14.6), получаем

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (14.14)$$

Следовательно, получение из прямолинейного стержня криволинейного возможно лишь при фиксированных значениях силы  $F$ . Для практических случаев важно ее наименьшее значение. Оно соответствует первой (наименьшей) критической силе и получается при  $n = 1$ , т. е. при изгибе стержня в виде одной полуволны

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (14.15)$$

Итак, **критической сжимающей силой** будем называть ее наименьшее значение, при котором стержень теряет свою первоначальную прямолинейную равновесную форму.

Формула (14.15) была выведена в 1744 г. Леонардом Эйлером и потому ее так и называют: «формула Эйлера».



Чем выше минимальный момент инерции сечения, тем устойчивее стержень. Наилучшие показатели имеют кольцевые сечения. Чем тоньше толщина кольцевой стенки, тем больше его  $I_{\min} = I_x = I_y$ , тем выше  $F_{кр}$ , тем выше рациональность конструкции. Поэтому кольцевые поперечные сечения в прямолинейных стержнях являются наиболее рациональными (см. решение примера 14.1).

### 14.3. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ СПОСОБА КРЕПЛЕНИЯ СТЕРЖНЯ НА ВЕЛИЧИНУ $F_{кр}$ В ФОРМУЛЕ ЭЙЛЕРА

Формула Эйлера была получена для стержня, изгибающегося в виде одной полуволны. Такой изгиб происходит при шарнирном опирании краев стержня (верхняя балка на рис. 14.3).

На практике часто встречаются стержни и с иными формами крепления. Для каждого из них в знаменателе формулы Эйлера должна стоять величина длины стержня, в пределах которой происходит его изгиб в виде одной полуволны. Ею может оказаться часть длины стержня или

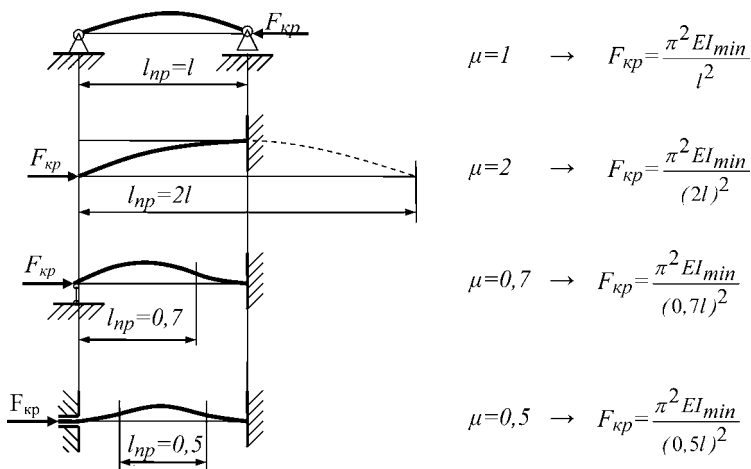


Рис. 14.3

Основные формы крепления и соответствующий им коэффициент приведения длины сжимаемого стержня

величина даже бóльшая, чем длина стержня. Поэтому в формуле Эйлера используют понятие приведенной длины

$$l_{\text{пр}} = \mu l, \quad (14.16)$$

на которой происходит изгиб стержня в виде одной полу-волны. Поэтому формула Эйлера принимает вид

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{l_{\text{пр}}^2} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2}, \quad (14.17)$$

где  $\mu$  — коэффициент приведения, зависящий от вида крепления стержня (рис. 14.3).

#### 14.4. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Выше было отмечено, что потеря устойчивости может происходить при напряжениях, значительно меньших, чем допускаемые с точки зрения прочности. Именно условие

$$\sigma_{\text{кр}} < \sigma_{\text{пц}} \quad (14.18)$$

дало возможность при выводе формулы Эйлера использовать формулу (14.4), полученную с учетом действия закона Гука.

Определим напряжения непосредственно перед потерей устойчивости, учитывая, что в этот момент стержень находится в условиях осевого сжатия силой  $F_{\text{кр}}$  по (14.17):

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (14.19)$$

$i_{\text{min}}$

где  $i_{\text{min}}$  — наименьший радиус инерции сечения стержня:

$$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{I_{\text{min}}}{A}}, \quad (14.20)$$

$\lambda$  — гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}}. \quad (14.21)$$







Поэтому формула Эйлера имеет предел применимости, ограничиваемый пределом пропорциональности, т. е.

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}. \quad (14.22)$$

Найдем наименьшее значение гибкости  $\lambda = \lambda_{пц}$ , соответствующее пределу пропорциональности  $\sigma_{кр} = \sigma_{пц}$ , еще позволяющей использовать формулу Эйлера (13.17). Для этого в (14.22), превращающуюся при  $\lambda = \lambda_{пц}$  в равенство  $\sigma_{кр} = \sigma_{пц}$ , подставим (14.19):

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda_{пц}^2} \leq \sigma_{пц}, \quad (14.23)$$

откуда

$$\lambda_{пц} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (14.24)$$

Для углеродистых сталей  $\sigma_{пц} \approx 200$  МПа,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа. Значит, по (14.24)

$$\lambda_{пц} = \sqrt{\frac{\pi^2 2,1 \cdot 10^{11}}{200 \cdot 10^6}} = 100. \quad (14.25)$$

Таким образом, для углеродистых сталей формула Эйлера неприменима, если гибкость стержня  $\lambda$  оказывается меньше 100.

#### 14.5. ФОРМУЛА ЯСИНСКОГО

При гибкости, меньшей некоторой предельной величины  $\lambda_{пр}$  (для сталей  $\lambda_{пр} = 40 \dots 60$ ), стержень теряет устойчивость при критических напряжениях, близких или даже превышающих допустимые при прочностном расчете на сжатие:

$$\sigma_{кр} > [\sigma_c]. \quad (14.26)$$

Значит, он может потерять работоспособность не вследствие потери устойчивости, а по причине нарушения условия прочности. В пластическом материале могут произойти пластические деформации (близость к  $\sigma_T$  по рис. 14.4), а в хрупком — хрупкое разрушение. Поэтому в интервале

$$\lambda < \lambda_{пр} \quad (14.27)$$



стержень можно рассчитывать на прочность, а не на устойчивость. Однако не следует забывать о том, что при расчете на прочность коэффициент запаса принимается равным  $n_T = 1,4 \dots 1,6$ , а при расчете на устойчивость —  $n_y = 3 - 5$ . Тогда может оказаться, что  $[\sigma_{кр}] = \sigma_{кр}/n_y$  окажется меньше  $[\sigma_c] = \sigma_T/n_T$  и должен быть проведен проверочный расчет на устойчивость.

В интервале значений гибкости

$$\lambda_{пр} < \lambda < \lambda_{пц} \quad (14.28)$$

расчет ведут по приближенной экспериментальной линейной зависимости, предложенной Ф. С. Ясинским:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (14.29)$$

где  $a$  и  $b$  — константы, зависящие от свойств материала. На рис. 14.4 это наклонная прямая  $CH$ . Зависимость (14.29) называют «формулой Ясинского».

Так, для малауглеродистой стали  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа, для дерева  $a = 29,3$  МПа,  $b = 0,194$  МПа.

Таким образом, экспериментальные значения  $\sigma_{кр}$  могут быть обобщены ломаной линией  $RHCD$ . При  $\lambda < \lambda_{пр}$  ее участок  $RH$  соответствует расчету по условию прочности с проверкой по условию устойчивости, поскольку здесь  $[\sigma_{кр}]|_{n_y=3} < [\sigma_c]|_{n_T=1,5}$  (пунктирные линии на рис. 14.4). При  $\lambda_{пр} \leq \lambda \leq \lambda_{пц}$  ее участок  $HC$  соответствует расчету на устойчивость по формуле Ясинского. При  $\lambda > \lambda_{пц}$  ее участок  $CD$  соответствует расчету на устойчивость по формуле Эйлера. С учетом коэффициента запаса на устойчивость линия допустимых напряжений при расчете на устойчивость будет иметь вид, показанный на рис. 14.4 нижней пунктирной линией.

#### Пример 14.1.

Пример применения формул Эйлера и Ясинского.

Дано: центрально сжатый силой  $F$  стальной (сталь Ст3) стержень, который может иметь одно из семи поперечных сечений (рис. 14.5). Все сечения должны иметь примерно одинаковую площадь  $A = 24 \text{ см}^2$ . Длина стержня  $l = 2$  м. Для одного кольцевого сечения отношение внутреннего диаметра к наружному равно  $C_1 = 0,8$ , для друго-



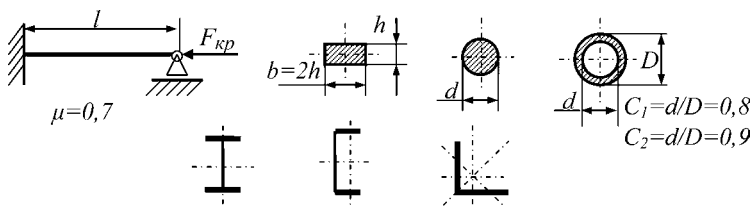


Рис. 14.5

Расчетная схема и виды сравниваемых сечений примера 14.1

го —  $C_2 = 0,9$ . Принять коэффициент запаса на устойчивость  $n_y = 3$ ,  $\lambda_{\text{пц}} = 100$  и  $\lambda_{\text{пр}} = 40$ .

Т р е б у е т с я: для предложенных семи вариантов сечений определить допускаемые значения критической силы  $[F_{\text{кр}}]$  и определить степень рациональности каждого сечения без использования практической формулы (о практической формуле будет сказано в разделе 14.6).

*Решение.* Под параметром рациональности  $s_i$  с размерностью напряжения будем понимать величину допускаемой критической сжимающей силы, приходящейся на единицу площади сечения стержня:

$$s_i = \frac{[F_{\text{кр}}]_i}{A} = \frac{\sigma_{\text{кр}i}}{n_y}. \quad (14.30)$$

По сути, этот параметр идентичен допускаемому напряжению при расчете на устойчивость  $[\sigma_{\text{кр}}]$ . Чем он выше, тем выше устойчивость стержня, рациональнее его поперечное сечение.

Так как заданы величина и форма площади поперечного сечения, то определяем размеры и минимальный радиус инерции сечения  $i_{\text{min}}$ . После этого вычисляем гибкость.

Для определения допускаемой сжимающей силы воспользуемся формулой Эйлера (при  $\lambda \geq \lambda_{\text{пр}}$ ), либо формулой Ясинского (при  $\lambda_{\text{пр}} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{пц}}$ ), либо определяем ее из расчета на прочность (при  $\lambda \leq \lambda_{\text{пр}}$ ), либо по практической формуле при любом  $\lambda$ . Применение практической формулы дано ниже в примере 14.2.

Для заданного крепления стержня коэффициент приведения длины стержня  $\mu = 0,7$ .

1. Для стержня прямоугольного сечения:

$$A = bh = 2h^2.$$

Значит,

$$h = \sqrt{\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 10^{-4}}{2}} = 3,46 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$b = 2h = 2 \cdot 3,46 \cdot 10^{-2} = 6,92 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Отсюда

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{3,46 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{12}} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2}{1 \cdot 10^{-2}} = 140 > \lambda_{\text{пц}} = 100.$$

Следовательно, применима формула Эйлера (14.19):

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 2,1 \cdot 10^{11}}{140^2} = 106 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

и допускаемое значение критической силы равно

$$[F_{\text{кр}}] = \frac{F_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{\sigma_{\text{кр}} A}{n_y} = \frac{106 \cdot 10^6 \cdot 24 \cdot 10^{-4}}{3} = 84,8 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Параметр рациональности по (14.30) стержня прямоугольного сечения равен

$$s_1 = \frac{[F_{\text{кр}}]}{A} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{106 \cdot 10^6}{3} = 35,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 35,3 \text{ МПа}.$$

2. Для стержня сплошного круглого сечения

$$A = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Значит,

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 24}{\pi}} = 5,53 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Отсюда

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{\pi d^4 / 64}{\pi d^2 / 4}} = \frac{d}{4} = \frac{5,53 \cdot 10^{-2}}{4} = 1,38 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2}{1,38 \cdot 10^{-2}} = 101,5 > \lambda_{\text{нц}} = 100.$$

Следовательно, применима формула Эйлера (14.19)

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 2,1 \cdot 10^{11}}{101,5^2} = 201,6 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

и допускаемое значение критической силы равно

$$[F_{\text{кр}}] = \frac{\sigma_{\text{кр}} A}{n_y} = \frac{201 \cdot 10^6 \cdot 24 \cdot 10^{-4}}{3} = 160,8 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Параметр рациональности по (14.30) стержня круглого поперечного сечения равен

$$s_2 = \frac{[F_{\text{кр}}]}{A} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{201 \cdot 10^6}{3} = 67 \cdot 10^6 \text{ Па} = 67 \text{ МПа}.$$

3. Для стержня кольцевого сечения с  $C_1 = 0,8$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - C^2).$$

Значит,

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi(1-C^2)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 24}{\pi(1-0,8^2)}} = 9,21 \text{ см} = 9,21 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} i_{\min} &= \sqrt{\frac{\pi D^4 (1 - C^4) / 64}{\pi D^2 (1 - C^2) / 4}} = \frac{D}{4} \sqrt{1 + C^2} = \\ &= \frac{9,21 \cdot 10^{-2}}{4} \sqrt{1 + 0,8^2} = 2,95 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \\ \lambda &= \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2}{2,95 \cdot 10^{-2}} = 48. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\lambda_{\text{нр}} = 40 < \lambda = 48 < \lambda_{\text{нц}} = 100$  и надо воспользоваться формулой Ясинского (14.29):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{кр}} &= a - b\lambda = 310 \cdot 10^6 - 1,14 \cdot 10^6 \cdot 48 = \\ &= 255,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 255,3 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

и допускаемое значение критической силы равно

$$[F_{\text{кр}}] = \frac{\sigma_{\text{кр}} A}{n_y} = \frac{255,3 \cdot 10^6 \cdot 24 \cdot 10^{-4}}{3} = 204,0 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$



Параметр рациональности по (14.30) стержня кольцевого сечения равен

$$s_3 = \frac{[F_{кр}]}{A} = \frac{\sigma_{кр}}{n_y} = \frac{255,3 \cdot 10^6}{3} = 85,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 85,1 \text{ МПа.}$$

4. Для стержня кольцевого сечения с  $C_2 = 0,9$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - C^2).$$

Значит,

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi(1-C^2)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2410^{-4}}{\pi(1-0,9^2)}} = 12,68 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} i_{\min} &= \sqrt{\frac{\pi D^4 (1 - C^4) / 64}{\pi D^2 (1 - C^2) / 4}} = \frac{D}{4} \sqrt{1 + C^2} = \\ &= \frac{12,68 \cdot 10^{-2}}{4} \sqrt{1 + 0,9^2} = 4,265 \cdot 10^{-2} \text{ м,} \\ \lambda &= \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2}{4,265 \cdot 10^{-2}} = 32,8. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\lambda = 32,8 < \lambda_{пр} = 40$  и надо провести расчет на прочность с  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240 \cdot 10^6}{1,5} = 160 \cdot 10^6 \text{ Па}$  по условию

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma],$$

откуда допускаемое значение силы равно

$$[F][\sigma]A = 160 \cdot 10^6 \cdot 24 \cdot 10^{-4} = 38,4 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Параметр рациональности по (14.30) стержня кольцевого сечения с  $C = 0,9$  равен

$$s_4 = \frac{[F]}{A} = \frac{38,4 \cdot 10^4}{24 \cdot 10^{-4}} = 160 \cdot 10^6 \text{ Па} = 160 \text{ МПа.}$$

Проверка на устойчивость возможна по практической формуле (о ней в разделе 14.6), которая дала бы  $[F_{кр}] = 35,9 \cdot 10^4 \text{ Н}$  и  $s_4 = 149,4 \text{ МПа}$ .

5. Для стержня двутаврового сечения.

Двутавр должен иметь площадь не менее заданной  $A = 24 \text{ см}^2$ . Близкую к этой величине имеет двутавр № 18 с  $A = 23,4 \text{ см}^2$ ,  $I_{\min} = 83,6 \text{ см}^4$ ,  $i_{\min} = 1,88 \text{ см}$ . Следовательно,

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2}{1,88 \cdot 10^{-2}} = 74,5.$$

Значит,  $\lambda_{\text{пр}} = 40 < \lambda = 74,5 < \lambda_{\text{гн}} = 100$  и надо воспользоваться формулой Ясинского (14.29):

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 310 \cdot 10^6 - 1,14 \cdot 10^6 \cdot 74,5 = 225,1 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

и допускаемое значение критической силы равно

$$[F_{\text{кр}}] = \frac{\sigma_{\text{кр}} A}{n_y} = \frac{225,1 \cdot 10^6 \cdot 23,4 \cdot 10^{-4}}{3} = 175,6 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Параметр рациональности по (14.30) стержня двутаврового сечения равен

$$s_5 = \frac{[F_{\text{кр}}]}{A} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{225,1 \cdot 10^6}{3} = 75,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = 75,0 \text{ МПа}.$$

6. Для стержня из швеллера.

Швеллер должен иметь площадь не менее заданной  $A = 24 \text{ см}^2$ . Близкую к этой величине имеет швеллер № 20:  $A = 23,4 \text{ см}^2$ ,  $I_{\min} = 113 \text{ см}^4$ ,  $i_{\min} = 2,20 \text{ см}$ . Следовательно,

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2}{2,20 \cdot 10^{-2}} = 63,7.$$

Значит,  $\lambda_{\text{пр}} = 40 < \lambda = 63,7 < \lambda_{\text{гн}} = 100$  и надо воспользоваться формулой Ясинского (14.29):

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 310 \cdot 10^6 - 1,14 \cdot 10^6 \cdot 63,7 = 237,4 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

и допускаемое значение критической силы равно

$$[F_{\text{кр}}] = \frac{\sigma_{\text{кр}} A}{n_y} = \frac{237,4 \cdot 10^6 \cdot 24 \cdot 10^{-4}}{3} = 185200 \text{ Н}.$$

Параметр рациональности по (14.30) стержня из швеллера равен

$$s_6 = \frac{[F_{\text{кр}}]}{A} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{237,4 \cdot 10^6}{3} = 79,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 79,1 \text{ МПа}.$$



7. Для стержня из равнобокого уголка.

Уголок должен иметь площадь не менее заданной  $A = 24 \text{ см}^2$ . Близкую к этой величине имеет уголок № 12,5 с толщиной стенки  $t = 10 \text{ мм}$ ;  $A = 24,3 \text{ см}^2$ ,  $I_{\min} = 149 \text{ см}^4$ ,  $i_{\min} = 2,47 \text{ см}$ . Следовательно,

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2}{2,47 \cdot 10^{-2}} = 56,7.$$

Значит,  $\lambda_{\text{пр}} = 40 < \lambda = 56,7 < \lambda_{\text{пш}} = 100$  и надо воспользоваться формулой Ясинского (14.29):

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 310 \cdot 10^6 - 1,14 \cdot 10^6 \cdot 56,7 = 245,4 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

и допускаемое значение критической силы равно

$$[F_{\text{кр}}] = \frac{\sigma_{\text{кр}} A}{n_y} = \frac{245,4 \cdot 10^6 \cdot 24,3 \cdot 10^{-4}}{3} = 198,8 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Параметр рациональности по (14.30) стержня из равнобокого уголка равен

$$s_r = \frac{[F_{\text{кр}}]}{A} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{245,4 \cdot 10^6}{3} = 81,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 81,8 \text{ МПа}.$$

Сведем полученные значения допускаемой критической сжимающей силы и получаемую степень рациональности по (14.30) в таблицу 14.1, где для удобства записи принято  $1 \text{ т} \approx 10^4 \text{ Н}$ .

Таблица 14.1

Результаты расчета к примеру 14.1

Сечение	Прямо- угольное	Круглое	Кольцевое $C = 0,8$	Кольцевое $C = 0,9$	Двутавро- вое	Швелле- ровое	Угловое
$[F_{\text{кр}}], \text{ т}$	8,5	16,1	20,4	38,4	17,6	18,5	19,9
Параметр рациональ- ности $s_r$ в МПа по (14.30)	35,3	67	85,1	160	75,0	79,1	81,8
Степень рациональности	7	6	2	1	4	5	3



По таблице 14.1 видим, что кольцевое, двутавровое, швеллеровое и уголковое сечения имеют близкие значения  $s$  и бóльшие, чем у прямоугольного и сплошного круглого сечений. Это говорит о том, что применение тонкостенных профилей предпочтительнее при работе стержней на устойчивость. При этом тонкостенные кольцевые сечения являются наиболее рациональными. При снижении толщины их стенки, т. е. при увеличении  $C$ , рациональность кольцевого сечения становится более существенной.

#### 14.6. ПРАКТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА

Существует формула расчета на устойчивость, пригодная для всего интервала значений гибкости, называемая практической формулой:

$$[\sigma_{кр}] = \varphi [\sigma_c], \quad (14.31)$$

где  $\varphi$  — коэффициент снижения допускаемых напряжений (или коэффициент продольного изгиба), используемых при прочностном расчете на сжатие  $[\sigma_c]$ . Коэффициент  $\varphi$  может меняться в пределах

$$0 \leq \varphi \leq 1, \quad (14.32)$$

является нормативным и зависит от вида и марки материала. Его значения для стержней из стали Ст3 даны в таблице 14.2.

*Таблица 14.2*

**Значения  $\varphi$  в зависимости от величины  $\lambda$   
для стержней из стали Ст3**

$\lambda$	$\varphi$	$\lambda$	$\varphi$	$\lambda$	$\varphi$
0	1,00	70	0,81	140	0,36
10	0,99	80	0,75	150	0,32
20	0,96	90	0,69	160	0,29
30	0,94	100	0,60	170	0,26
40	0,92	110	0,52	180	0,23
50	0,89	120	0,45	190	0,21
60	0,86	130	0,40	200	0,19

**Пример 14.2.**

Пример применения практической формулы.

Д а н о: центрально сжатый силой  $F = 0,5$  МН стержень (сталь Ст3) выполнен из двутавра (рис. 14.6). Длина стержня  $l = 3$  м. Принять допускаемое напряжение при продольном сжатии  $[\sigma_c] = 160$  МПа.

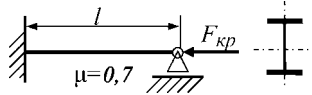


Рис. 14.6  
Расчетная схема примера 14.2

Т р е б у е т с я: пользуясь практической формулой (14.31), подобрать номер двутавра.

Решение. Поскольку  $[\sigma_{кр}] = \varphi[\sigma_c]$ ,  $[F_{кр}] = [\sigma_{кр}]A$ , для пластичного материала  $[\sigma_c] = [\sigma]$  и задана величина действующей силы, т. е.  $F = [F_{кр}]$ , то

$$A = \frac{F}{\varphi[\sigma]}. \quad (14.33)$$

Коэффициент  $\varphi$  неизвестен и зависит от гибкости  $\lambda$ , которая, в свою очередь, зависит от неизвестных пока размеров сечения. В связи с этим решение ведут методом последовательных приближений, назначая коэффициент  $\varphi$  в интервале его возможных изменений (0...1) по табл. 14.2.

1-е приближение.

В первом приближении примем среднее значение коэффициента. Пусть  $\varphi_1 = 0,5$ .

Тогда по (14.33)

$$A = \frac{0,5 \cdot 10^6}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,00625 \text{ м}^2 = 62,5 \text{ см}^2.$$

Этой площади соответствует по таблицам сортамента двутавр № 36, имеющий  $A = 61,9 \text{ см}^2$ ,  $i_{\min} = i_y = 2,89 \text{ см}$ , что дает по (14.21)

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 3}{2,89 \cdot 10^{-2}} \approx 73.$$

По табл. 14.2 для  $\lambda = 73$  имеем  $\varphi = 0,79$ . Значит, принятый первоначально  $\varphi = 0,5$  привел к необоснованному

занижению допускаемых напряжений и перерасходу материала. Поэтому делаем второе приближение.

2-е приближение.

Принимаем среднее значение

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \frac{0,5 + 0,79}{2} = 0,65.$$

Тогда

$$A = \frac{0,5 \cdot 10^6}{0,65 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,0048 \text{ м}^2 = 48 \text{ см}^2.$$

Этой площади соответствует по таблицам сортамента двутавр № 30, имеющий  $A = 46,5 \text{ см}^2$ ,  $i_{\min} = i_y = 2,69 \text{ см}$ , что дает по (14.21)

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 3}{2,69 \cdot 10^{-2}} \approx 78.$$

По табл. 14.2 для  $\lambda = 78$  имеем  $\varphi = 0,76$ . Значит, принятый  $\varphi_2 = 0,65$  вновь привел к необоснованному занижению допускаемых напряжений и перерасходу материала. Поэтому делаем третье приближение.

3-е приближение.

Принимаем среднее значение

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_2 + \varphi}{2} = \frac{0,65 + 0,76}{2} = 0,71.$$

Тогда

$$A = \frac{0,5 \cdot 10^6}{0,71 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,00440 \text{ м}^2 = 44 \text{ см}^2.$$

Этой площади соответствует по таблицам сортамента двутавр № 30, т. е. тот же номер, имеющий даже несколько большую площадь по сравнению с требуемой. Значит, окончательно назначаем двутавр № 30 для устойчивой работы заданного стержня.

Рабочее напряжение в стержне равно

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{0,5 \cdot 10^6}{46,5 \cdot 10^{-4}} = 108 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$



Критическое напряжение с учетом требуемого для двутавра № 30  $\varphi = 0,71$  равно

$$[\sigma_{кр}] = \varphi[\sigma] = 0,71 \cdot 160 \cdot 10^6 = 114 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Значит, недогрузка составит

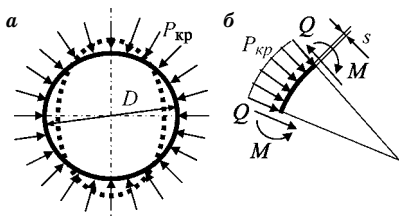
$$\frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = 5,2\%.$$

#### 14.7. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАСЧЕТАХ ТРУБ И ОБОЛОЧЕК, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ НАРУЖНОГО ДАВЛЕНИЯ

Труба, находящаяся под действием осевой сжимающей силы, может потерять устойчивость аналогично рассмотренным выше стержням. Однако в зависимости от вида нагрузки формы потери устойчивости тонкостенной оболочки или трубы могут быть и иными. Далее ограничимся рассмотрением лишь потери устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки или трубы под действием наружного избыточного бокового давления, превышающего критическое  $P_{кр}$ .

В результате поперечное сечение цилиндрического тонкостенного корпуса может приобрести при некотором  $P > P_{кр1}$  вид эллипса или при некотором более высоком  $P > P_{кр2}$  вид более сложной фигуры, т. е. потерять устойчивость (пунктир на рис. 14.7а). Давление  $P_{кр1}$  называется нижним критическим давлением. Ему соответствует более простая форма потери устойчивости.

Как и в сжимаемых стержнях, это происходит вследствие начальных неучитываемых отклонений формы и свойств конструкции и материала от идеальных. В результате по толщине  $s$  стенки напряжения становятся



**Рис. 14.7**  
Вариант формы потери устойчивости оболочки и возникающие в ней внутренние силовые факторы

неодинаковыми, создающими изгибающие моменты  $M$  (рис. 14.7б). Значит, с появлением изгибающих стенок моментов она перестает работать как мембрана.

Методика вывода расчетных формул для оболочек близка по общим принципам, но сложнее методики их вывода для стержней. Приведем без вывода формулу для вычисления нижнего критического давления (аналогия с наименьшей критической силой  $F_{кр}$  для стержней) цилиндрической длинной оболочки:

$$P_{кр} = \frac{2E}{1-\mu^2} \left( \frac{s}{D} \right)^3, \quad (14.34)$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

По ГОСТ Р 52857.2-2007 коэффициент запаса прочности при расчете элементов аппаратов на устойчивость по нижнему критическому напряжению в пределах упругости сталей принимается для рабочих условий  $n_y = 2,4$ .

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ»

1. Что происходит при потере устойчивости?
2. Что подразумевают под устойчивостью?
3. Что может произойти с центрально сжатым стержнем?
4. Как называется центрально приложенная сила, выше которой конструкция теряет устойчивость?
5. Чем характерен элемент конструкции, который может потерять устойчивость?
6. Какие причины могут привести к потере работоспособности центрально сжатого стержня?
7. В какой плоскости теряет устойчивость плоский лист бумаги?
8. Почему коэффициент запаса по устойчивости принимают достаточно большим?
9. В каких пределах принимают интервал изменения коэффициентов запаса устойчивости в пищевом машиностроении?
10. Для какого крепления стержня сделан вывод формулы Эйлера?
11. Какой форме соответствует ось стержня при выводе формулы Эйлера?
12. Как определяют произвольные постоянные при выводе формулы Эйлера?
13. Что означает полученное при выводе формулы Эйлера решение  $\sin(\alpha l) = 0$ ?



14. Что означает параметр  $n$  в формуле

$$\alpha = \frac{n\pi}{l}?$$

15. Как называется формула

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}?$$

16. Какую форму при наименьшем значении критической силы принимает изогнутая ось стержня, шарнирно укрепленного по своим концам?
17. Влияет ли на величину  $F_{кр}$  способ закрепления центрально сжатого стержня?
18. Как в формуле Эйлера учитывается характер закрепления стержня?
19. Для чего вводится понятие приведенной длины сжатого стержня  $l_{пр}$ ?
20. Для чего в формулу Эйлера вводится понятие коэффициента приведения длины сжатого стержня?
21. Почему при выводе формулы Эйлера вводится ограничение по напряжениям  $\sigma_{кр} < \sigma_{пц}$ ?
22. Какую геометрическую характеристику называют гибкостью стержня?
23. Какому напряжению соответствует наименьшая гибкость стержня  $\lambda = \lambda_{пц}$  для применения формулы Эйлера?
24. Чему равна наименьшая гибкость стержня  $\lambda_{пц}$  из углеродистых сталей, ограничивающая применимость формулы Эйлера?
25. В каких пределах изменения гибкости стержня из углеродистых сталей применяется формула Ясинского?
26. При каких напряжениях происходит потеря устойчивости стального стержня, имеющего гибкость  $\lambda \leq \lambda_{пр} = 40 \dots 60$ ?
27. Функцию какой линии представляет собой формула Ясинского?
28. Как при расчете на устойчивость называют формулу  $[\sigma_{кр}] = \varphi[\sigma_{с}]$ ?
29. Как называется коэффициент  $\varphi$  в практической формуле при расчете на устойчивость?
30. В каких пределах может меняться коэффициент  $\varphi$  в практической формуле?
31. Какие сечения стержней являются наиболее рациональными при работе на устойчивость?
32. Какой вид может приобрести поперечное сечение цилиндрического тонкостенного корпуса при действии наружного избыточного бокового давления?

## ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА

### 15.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

**Во** всех предыдущих разделах рассматривались задачи с упругими системами, в которых возникающая нагрузка была постоянной или медленно меняющейся. Медленно — значит, с пренебрежимо малыми инерционными составляющими. Такая нагрузка названа статической.

Нагрузки, изменяющиеся по величине, направлению, месту приложения, считаются **динамическими**, если возникающие при этом инерционные силы создают существенные напряжения. В этих случаях расчеты ведут с их учетом. Характерными примерами конструкций технологического оборудования пищевых производств, в которых инерционная нагрузка является основной движущей силой или ее влиянием в прочностных расчетах нельзя пренебрегать, могут служить элементы центробежных сепараторов и центрифуг, вибрационная техника, центробежные насосы, подъемные устройства, валы быстроходных мешалок и многое другое.

Расчет конструкции с учетом сил инерции и возникающего движения масс системы называют **динамическим расчетом**.

Общие методы динамических расчетов излагаются в курсе «Динамика конструкций». Далее будут рассмотрены лишь две простейшие задачи: расчеты при движении тела с постоянным ускорением и ударное действие внешнего тела. При этом рассматриваемые системы будут относиться к консервативным, т. е. сохраняющим постоянство энергии. Кроме того, их кинетической энергией можно пренебречь.



## 15.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ В РАВНОУСКОРЕННОМ ДВИЖЕНИИ

Вначале рассмотрим пример с грузом весом  $F = mg$ , неподвижно подвешенным на невесомом тросе, т. е. статическую задачу (рис. 15.1а). В такой задаче продольное усилие  $N_{ст}$  в тросе определяется из уравнения равновесия:

$$\sum Z_{cti} = 0 \rightarrow N_{ct} - F = 0 \rightarrow N_{ct} = F. \quad (15.1)$$

Теперь рассмотрим такую же систему, но при равноускоренном движении груза. При этом не будем учитывать продольные колебания упругого троса с грузом.

Если груз движется равноускоренно с ускорением  $a$ , например при подъеме (рис. 15.1б), то в тросе возникает продольное усилие  $N_d$ . Это усилие в соответствии с принципом д'Аламбера должно уравновесить, кроме  $F$ , еще и динамическую (инерционную) составляющую силы от движущейся с ускорением массы  $m$ , т. е.

$$J = ma = \frac{F}{g} a.$$

Значит,

$$\sum Z_{динi} = 0 \rightarrow N_d - (F + J) = 0 \rightarrow N_d = F \left(1 + \frac{a}{g}\right) = N_{ct} \left(1 + \frac{a}{g}\right),$$

или

$$N_d = N_{ct} \beta_d, \quad (15.2)$$

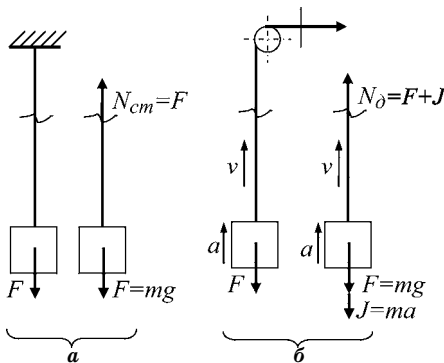


Рис. 15.1

Пример равноускоренного подъема груза



где множитель при статическом усилии обозначен как

$$\beta_d = 1 + \frac{a}{g}. \quad (15.3)$$

Поскольку  $N = \sigma A$ , то по (15.2) и (15.3) имеем

$$\sigma_d = \beta_d \sigma_{ст}. \quad (15.4)$$

Как видим,  $\beta_d$  одинаков для усилий и напряжений.

Отношение динамического параметра (силы, напряжения, перемещения) к величине такого же параметра, но полученного в условиях статики этой системы, называют **динамическим коэффициентом**:

$$\frac{N_d}{N_{ст}} = \frac{\sigma_d}{\sigma_{ст}} = \beta_d. \quad (15.5)$$

### 15.3. ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР

Одним из видов динамической нагрузки является удар. Ударом называют динамическое силовое воздействие на тело, приводящее к изменению скоростей его точек за весьма малый промежуток времени. Такое изменение скорости будем считать скачкообразным.

Пусть имеется упругий вертикальный стержень (рис. 15.2) поперечного сечения  $A$  и длиной  $l$ , на который с высоты  $h$  падает груз массой  $m$ .

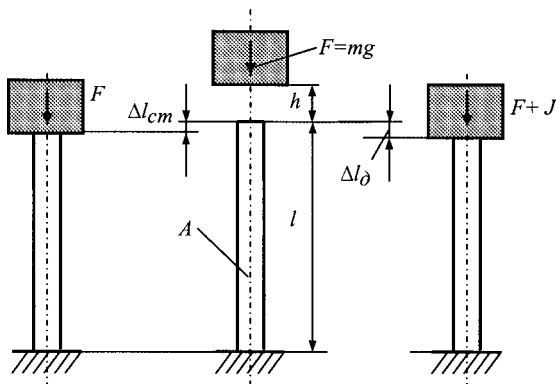


Рис. 15.2  
Деформация стержня при продольном ударе

С целью упрощения вывода введем ограничения:

- стержень считаем невесомым в сравнении с весом груза и пренебрегаем волнами упругой деформации;
- падающий груз является абсолютно жестким;
- падающий груз производит мгновенный и абсолютно неупругий удар, и груз с деформируемым стержнем движутся после соприкосновения вместе, не отделяясь, т. е. без отскока;
- возникающие в стержне напряжения не превышают предела пропорциональности:  $\sigma_{\text{дmax}} < \sigma_{\text{пц}}$ , т. е. выполняется закон Гука;
- система консервативная, т. е. идеальная (энергия удара не рассеивается);
- система имеет одну степень свободы.

Статическое воздействие груза (сила  $F = mg$ ) приведет к уменьшению его длины  $l$  на величину  $\Delta l_{\text{ст}}$ . При падении груза стержень укоротится на величину  $\Delta l_{\text{д}}$ . В момент максимального сжатия стержня (на  $\Delta l_{\text{д}}$ ) накопленная им за счет удара потенциальная энергия упругой деформации равна

$$\Pi = \frac{1}{2} N_{\text{д}} \Delta l_{\text{д}} = \frac{1}{2} \sigma_{\text{д}} \Delta l_{\text{д}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{д}} E A \Delta l_{\text{д}} = \frac{1}{2l} \Delta l_{\text{д}}^2 E A, \quad (15.6)$$

где  $N_{\text{д}} = \sigma_{\text{д}} A$ ,  $\sigma_{\text{д}} = E \varepsilon_{\text{д}}$  — по закону Гука,  $\varepsilon_{\text{д}} = \frac{\Delta l_{\text{д}}}{l}$ . Коэффициент  $1/2$  введен вследствие роста  $N_{\text{д}}$  пропорционально росту  $\varepsilon_{\text{д}}$  (см. раздел 9.2).

Работа внешних сил (веса падающего груза)  $F = mg$ , совершающаяся при деформации стержня, равна

$$A = F(h + \Delta l_{\text{д}}). \quad (15.7)$$

Здесь нет коэффициента  $1/2$ , так как вес груза  $F$  постоянен при перемещении  $h + \Delta l_{\text{д}}$ .

Воспользуемся энергетическим методом, согласно которому при соударении движущихся тел уменьшение запаса кинетической энергии равно увеличению потенциальной энергии деформации соударяющихся упругих тел (закон сохранения энергии). Значит, должно выполняться равенство

$$A = \Pi, \quad (15.8)$$

и с учетом (15.6) и (15.7) последовательно получаем

$$F(h + \Delta l_d) = \frac{1}{2l} \Delta l_d^2 EA \rightarrow \Delta l_d^2 - \frac{Fl}{EA} 2\Delta l_d - \frac{Fl}{EA} 2h = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta l_d^2 - \Delta l_{ст} 2\Delta l_d - \Delta l_{ст} 2h = 0, \quad (15.9)$$

где обозначено

$$\Delta l_{ст} = \frac{Fl}{EA}. \quad (15.10)$$

При решении квадратного уравнения (15.9) перед корнем должен стоять знак «±». Однако нас интересует только максимальное значение  $\Delta l_d$ . Поэтому в решении оставляем лишь положительный знак:

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} + \sqrt{\Delta l_{ст}^2 + 2h\Delta l_{ст}}. \quad (15.11)$$

Вынося в правой части (15.11) в виде множителя  $\Delta l_{ст}$ , получаем

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}} \right). \quad (15.12)$$

Выражение в скобках является коэффициентом динамичности

$$\beta_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}}. \quad (15.13)$$

Значит,

$$\Delta l_d = \beta_d \Delta l_{ст}. \quad (15.14)$$

Поскольку для статических и динамических напряжений

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l} = \frac{E}{l} \Delta l, \quad (15.15)$$

то и в этом случае получаем

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \beta_d, \quad (15.16)$$

что аналогично отмеченному выше в (15.4).

Как и для предыдущего случая, динамическое усилие в стержне связано со статически действующей нагрузкой также коэффициентом динамичности по (15.5).

Для снижения динамических напряжений следует по (15.16) с учетом (15.13) увеличивать  $\Delta l_{ст}$  стержня, точнее



системы «стержень–опора». Так, размещение стержня в упругой опоре увеличивает  $\Delta l_{\text{ст}}$  и может существенно снизить  $\beta_d$  и напряжения  $\sigma_d$ .

Частные случаи удара.

1. Если  $h \approx 0$ , то по (15.13) коэффициент динамичности приближается к постоянной величине  $\beta_d \approx 2$ . Так, даже если аккуратно положить груз на упругую систему, то в первый момент получим

$$\Delta l_d = 2\Delta l_{\text{ст}}, \sigma_d = 2\sigma_{\text{ст}}, \quad (15.17)$$

т. е. двукратное увеличение напряжения, осадки упругой системы (например, стрелки весов, т. е. веса взвешиваемого товара).

2. Если  $h \gg \Delta l_{\text{ст}}$ , то

$$\frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}} \gg 1$$

и в (15.13) можем пренебречь единицами под корнем и перед ним, тогда

$$\beta_d \approx \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}}. \quad (15.18)$$

Обратим внимание на то, что в решении с энергетической точки зрения получены лишь максимальные значения динамических напряжений и перемещений. Именно такие задачи характерны во многих практических случаях.

Существует особая механическая характеристика материалов — ударная вязкость. **Ударной вязкостью материала**  $a_k$  называют величину работы разрушения образца с надрезом, отнесенную к площади его поперечного сечения в плоскости разрушения. Испытания проводят на специальной установке, называемой «маятниковым копром». Плоский образец с надрезом разрушают маятником копра. Ударная вязкость характеризует способность материала сопротивляться ударным нагрузкам. Хотя данные испытаний об ударной вязкости не используются в расчетах на прочность, они служат важной характеристикой для оценки возможности применения конкретного материала в условиях динамических нагрузок, например в центрифугах и сепараторах.

**Пример 15.1.**

**Д а н о:** на стальной (сталь Ст3) вертикальный стержень, выполненный из двутавра № 18 длиной  $l = 1$  м, кладут груз массой  $m = 0,1$  Т (рис. 15.2). На расстоянии  $h = 10$  мм до стержня груз срывается и производит по стержню центральный продольный удар.

**Т р е б у е т с я:** с учетом сделанных в разделе 15.3 допущений определить усилие и напряжения в стержне в момент удара.

*Решение.* Для двутавра № 18 выписываем из таблиц  $A = 23,4$  см<sup>2</sup>. Для стали Ст3 продольный модуль упругости равен  $E = 1,99 \cdot 10^5$  МПа.

Если бы груз был приложен статически, то он создал бы в стержне статическое усилие

$$N_{\text{ст}} = mg = 0,1 \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 981 \text{ Н}$$

и напряжение

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{N_{\text{ст}}}{A} = \frac{981 \cdot 1}{23,4 \cdot 10^{-4}} = 0,419 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 0,419 \text{ МПа,}$$

а брус укоротился бы на величину

$$\begin{aligned} \Delta l_{\text{ст}} &= \frac{N_{\text{ст}} l}{EA} = \frac{981 \cdot 1}{1,99 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 23,4 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 2,11 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 2,11 \cdot 10^{-3} \text{ мм.} \end{aligned}$$

При срыве и свободном падении с высоты всего  $h = 10$  мм груза на стержень коэффициент динамичности оказался бы равен

$$\beta_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,01}{2,11 \cdot 10^{-6}}} = 98,4.$$

Тогда усилие и напряжение в стержне достигли бы величин

$$\begin{aligned} N_{\text{д}} &= N_{\text{ст}} \beta_{\text{д}} = 981 \cdot 98,4 = 96,5 \cdot 10^3 \text{ Н,} \\ \sigma_{\text{д}} &= \sigma_{\text{ст}} \beta_{\text{д}} = 0,419 \cdot 10^6 \cdot 98,4 = 41,2 \cdot 10^6 \text{ Па,} \end{aligned}$$

т. е. произошло бы почти стократное их возрастание.

### 15.4. ПОПЕРЕЧНЫЙ УДАР

Поперечный удар удобно рассмотреть на конкретном примере (рис. 15.3).

Аналогично (15.14) имеем для поперечного удара

$$y_d = \beta_d y_{ст} \quad (15.19)$$

и по (15.16)

$$\sigma_d = \beta_d \sigma_{ст}. \quad (15.20)$$

Здесь

$$\sigma_{ст} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{Fl/2}{W_x}, \quad (15.21)$$

и  $\beta_d$  определяем по (15.13), в котором с учетом эюр  $M_x$  (рис. 15.3а) и  $M_1$  (рис. 15.3б)

$$y_{ст} = \frac{Fl^3}{6EI_x}. \quad (15.22)$$

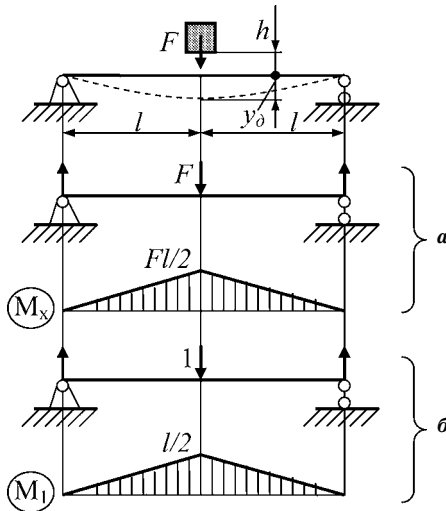


Рис. 15.3  
Расчетные схемы при поперечном ударе

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ  
«ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА»**

1. Какая нагрузка называется статической?
2. В чем существенное отличие статической нагрузки от динамической?
3. Если груз находится в равноускоренном подъеме, то в подвешивающем его тросе возникает постоянное или переменное продольное усилие?
4. Для каких систем применяют принцип д'Аламбера?
5. Для чего применяют принцип д'Аламбера в решении задач дисциплины сопротивления материалов?
6. В чем заключается принцип д'Аламбера?
7. Что определяет формула  $N = N_{ст}\beta_d$ ?
8. Что характеризует параметр  $\beta_d$  в формуле  $\sigma = \sigma_{ст}\beta_d$ ?
9. Как называется отношение динамического параметра (силы, напряжения, перемещения) к величине того же параметра, полученной в условиях статики такой же системы?
10. Какой формулой определяется динамический коэффициент для расчета напряжения в тросе с грузом, движущемся равномерно ускоренно?
11. Как называют динамическое силовое воздействие на тело, приводящее к существенному изменению скоростей его точек за весьма малый промежуток времени?
12. При рассмотрении в курсе сопротивления материалов ударной нагрузки пренебрегают ли волнами упругой деформации?
13. При рассмотрении ударной нагрузки считают ли падающий груз абсолютно жестким?
14. Каким считают вид удара при рассмотрении ударной нагрузки падающего груза?
15. Какой удар считают мгновенным и абсолютно неупругим?
16. Какое ограничение накладывается на максимальные напряжения, возникающие в стержне при рассмотрении ударной нагрузки?
17. При рассмотрении ударной нагрузки считают, что система консервативна или диссипативна?
18. Что означает условие, по которому энергия удара не рассеивается?
19. Что приравнивают друг другу при выводе формул напряжений и перемещений при ударе?
20. В каком случае динамический коэффициент может определяться формулой  $\beta_d \approx 2$ ?
21. В каком случае динамический коэффициент может определяться формулой  $\beta_d \approx \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{ст}}}$  ?
22. Какую нагрузку относят к динамической?
23. Какую систему считают консервативной?



## МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

### 16.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

**В** данном разделе рассматриваются механические упругие периодические колебания, синусоидально изменяющиеся во времени. Их называют гармоническими колебаниями. Они относятся к разновидностям динамической нагрузки. В этом случае термины «колебания» и «вибрация» совпадают по смыслу, хотя последний относится к колебаниям достаточно высокой частоты. Колебания могут оказаться весьма вредными, вызывая поломки оборудования и коммуникаций. Однако из них можно извлечь и пользу: использовать в различных виброустройствах для лабораторного оборудования и интенсификации производственных процессов.

Колебания возникают в системах, обладающих инерционностью, а также силой, стремящейся восстановить их первоначальное равновесное положение. Эту силу называют восстанавливающей. Ею может быть, например, сила упругости или сила притяжения. Реальная колеблющаяся система всегда испытывает сопротивление среды, приводящее к рассеянию энергии системы. Сопротивление среды учитывают в аналитическом исследовании колебаний введением в расчетную схему сил сопротивления. Теоретически можно представить себе колебание системы без рассеяния энергии, т. е. без сил сопротивления. Такие системы относят к идеальным (консервативным).

В общем случае упругая система может создавать колебания различных форм. Каждая форма колебаний соответствует определенной функции описания ее параметров.



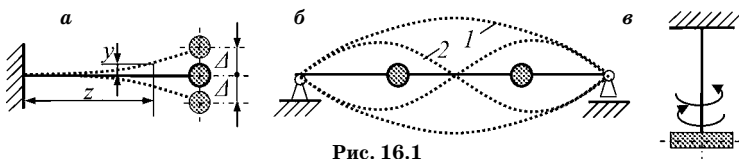


Рис. 16.1  
Формы колебаний упругих систем

Количество таких форм зависит от числа степеней свободы системы, определяющих ее колебания. На рис. 16.1 амплитуда колебаний сосредоточенной в точке массы обозначена как  $\Delta$ .

Если система имеет одну степень свободы, то она может иметь лишь одну форму колебаний. Именно такая система с одной точечной массой на условно невесомой балке с  $I_x = I_y$  показана на рис. 16.1а. В ней вертикальное положение только этой сосредоточенной в точке массы определяет всю форму упругой линии (пунктир), т. е.  $y = \pm f(z)$ . Условие  $I_x = I_y$  выполняется, например, в брусе круглого поперечного сечения.

На рис. 16.1б показана система с двумя сосредоточенными массами на невесомой упругой балке с  $I_x = I_y$ . В ней направления инерционных сил масс могут совпадать, и тогда упругая линия балки приобретает форму, обозначенную пунктирной линией 1, но могут оказаться противоположными — форма, обозначенная пунктирной линией 2. Две формы колебаний соответствуют двум формам упругой линии балки. Если масса стержня существенна, то он будет иметь множество форм колебаний, т. е. множество частот собственных колебаний.

Аналогично могут быть представлены системы с продольными или крутильными колебаниями. Крутильные колебания бруса с диском показаны на рис. 16.1в.

Различают собственные и вынужденные колебания. Существуют и другие виды колебаний.

**Собственными** называют колебания, возникшие в упругой системе, получившей внешнее начальное отклонение или скорость и совершающей после снятия внешней нагрузки колебания за счет внутренних сил, например сил упругости, стремящихся восстановить положение равновесия.

Частоту, с которой происходят собственные колебания, называют **частотой собственных (свободных) колебаний** системы и обозначают символом  $\omega$ . Амплитуда собственных колебаний, т. е. наибольшее отклонение точек системы от положения равновесия ( $\Delta$ ), зависит от начальных условий, а частота и период колебаний для малых амплитуд практически не зависят от начальных условий и определяются лишь параметрами системы. Идеальная упругая система совершает колебания при отсутствии рассеяния энергии (сил сопротивления), и тогда собственные колебания являются незатухающими. В реальной системе собственные колебания всегда являются затухающими.

**Вынужденными** называют колебания системы под действием внешней периодической нагрузки. Так, если сосредоточенная масса на рис. 16.1а представляет собой работающий электродвигатель, то балка будет совершать вынужденные колебания, называемые **частотой вынужденных колебаний**  $\Omega$ . Вынужденные колебания не затухают, так как их поддерживает периодический подвод извне энергии. В этом случае периодической возмущающей силой является вращающаяся неуравновешенная масса ротора электродвигателя, которая не может быть идеально уравновешена. Рабочая частота вращения ротора выражается как  $\Omega = 2\pi N$ , где  $N$  — число оборотов ротора в секунду (об/с).

Соотношение между частотами вынужденных и собственных колебаний определяет динамические параметры системы.

## 16.2. СВОБОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Рассмотрим консервативную систему на примере горизонтальных колебаний тележки массой  $m$ , прикрепленной к упругой невесомой пружине (рис. 16.2).

Обратим внимание на то, что в данной задаче нет статической деформации пружины под действием веса тележки, поскольку сила веса действует вертикально.

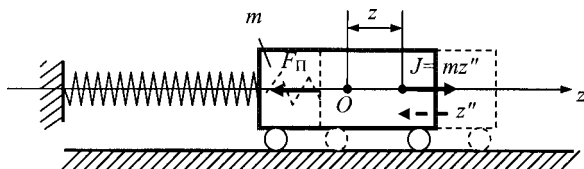


Рис. 16.2  
 Расчетная схема к выводу формулы частоты  
 собственных колебаний

Составим уравнение движения тележки. Положение центра инерции масс тележки при ненапряженной пружине примем за начало координат ( $z = 0$ ). Положительное направление координаты  $z$  будем отсчитывать вправо. При принудительном смещении тележки вправо пружина растягивается и в ней возникает сила  $F_{\Pi}$ , пропорциональная изменению длины пружины и стремящаяся вернуть ее в начальное положение  $O$ , где она равна нулю. Поэтому ее называют **восстанавливающей силой**. По (6.52) она определяется формулой

$$F_{\Pi} = -cz = -z/\delta, \tag{16.1}$$

где  $c$  — **жесткость пружины** с размерностью Н/м,  $\delta = 1/c$  — **податливость пружины** с размерностью м/Н, т. е. изменение ее длины под действием силы, равной 1 Н (см. раздел 6.9).

Сила  $F_{\Pi}$  всегда направлена в сторону, противоположную смещению  $z$  центра инерции масс тележки, и потому перед ней стоит отрицательный знак.

Для систем с одной степенью свободы, как в рассматриваемом случае,  $\delta = \delta_{11}$  (см. раздел 10.2). В данном примере с тележкой  $\delta$  означает изменение длины пружины под действием силы, равной 1 Н. В общем случае  $\delta$  может означать линейное или угловое перемещение.

Отпустим тележку, и она будет двигаться влево с некоторым ускорением  $z'' = d^2z/dt^2$ . В соответствии со вторым основным законом динамики (законом Ньютона) сила, действующая на тележку, создает ее ускоренное движение. Исходя из принципа д'Аламбера, дополним нагрузку силой инерции, направленной в сторону, противоположную ускорению движущейся системы:



$$J = mz'' \quad (16.2)$$

Сила инерции положительна, поскольку направлена в сторону положительного направления оси  $z$ .

Тогда можем записать для системы уравнение статики в виде суммы проекций сил на ось  $z$ .

$$J - F_{\Pi} = 0, \quad (16.3)$$

или

$$mz'' + cz = 0. \quad (16.4)$$

Преобразуем (16.4), поделив на  $m$  и заменяя жесткость  $c$  на податливость, которая по (6.51) равна  $\delta = 1/c$ , получим

$$z'' + \frac{1}{\delta \cdot m} z = 0. \quad (16.5)$$

Запишем (16.5) как

$$z'' + \omega^2 z = 0, \quad (16.6)$$

где обозначено

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta \cdot m}}. \quad (16.7)$$

Параметр  $\omega$  называют **круговой частотой**, или **частотой собственных колебаний системы**, или **частотой свободных колебаний**.

Решением дифференциального уравнения второго порядка без правой части (16.6) будет функция

$$z = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t), \quad (16.8)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий движения, т. е. от положения и скорости в момент  $t = 0$ . Выражение (16.8) может быть представлено как

$$z = \Delta \sin(\omega t + \varphi), \quad (16.9)$$

где  $\Delta$ ,  $(\omega t + \varphi)$  и  $\varphi$  — амплитуда, фаза и сдвиг фаз соответственно.

Первая производная от  $z$  является функцией скорости  $z' = v = \Delta \cos(\omega t + \varphi) = \Delta \sin(\omega t + \varphi)$ . Зная начальные (при

$t = 0$ ) отклонение  $z_0$  и скорость  $v_0$ , определяют амплитуду колебаний

$$\Delta = \sqrt{z_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}. \quad (16.10)$$

Период колебаний  $T$  определяется по условию изменения слагаемых в скобках выражения (16.9) на  $2\pi$  за время  $t = T$

$$[\omega(t + T) + \varphi] - (\omega t + \varphi) = 2\pi, \quad (16.11)$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ или } \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (16.12)$$

Амплитуда собственных колебаний  $\Delta$ , т. е. наибольшее отклонение точек системы от положения равновесия, зависит по (16.10) от начальных условий, а частота  $\omega$  и период  $T$  колебаний практически не зависят от начальных условий и определяются лишь параметрами системы.

В реальных системах обязательно присутствует некоторое рассеяние энергии, в результате чего частота их собственных колебаний снижается до

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}, \quad (16.13)$$

где  $n$  — коэффициент затухания, характеризующий рассеяние энергии системы за счет сопротивления среды колебательному движению.

### 16.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Если на систему с одной степенью свободы и трением действует периодическая возмущающая сила  $F = F_0 \sin \Omega t$ , где  $F_0$  — ее максимальное значение, то амплитуда вынужденных колебаний ( $\Delta_{\text{вын}}$ ) определяется формулой

$$\Delta_{\text{вын}} = \frac{F_0 \delta}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \Omega^2}{\omega^4}}} = \beta_d \Delta_{\text{ст}}, \quad (16.14)$$

в которой

$$\Delta_{\text{ст}} = F_0 \delta \quad (16.15)$$



является перемещением системы под действием статически приложенной силы  $F_0$ . Сомножителем стоит коэффициент динамичности

$$\beta_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}}. \quad (16.16)$$

**Коэффициент динамичности** показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше статического перемещения под действием статически приложенной максимальной возмущающей силы  $F_0$ .

Если имеем идеальную систему, то в формулах (16.14) и (16.16) следует принять  $n = 0$ , и они существенно упрощаются до

$$\Delta_{\text{вын}} = \frac{F_0 \delta}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}. \quad (16.17)$$

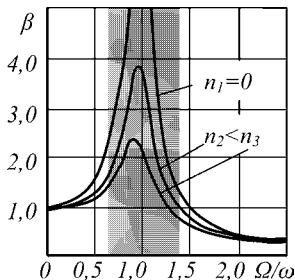
и

$$\beta_d = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}. \quad (16.18)$$

Для линейно деформируемых систем (пропорциональность между нагрузкой и деформацией) динамические напряжения, возникающие при колебаниях  $\sigma_d$ , как и в главе 15 «Динамическая нагрузка», связаны с напряжениями  $\sigma_a$ , вызываемыми статически приложенной максимальной (амплитудной) нагрузкой, коэффициентом динамичности

$$\sigma_d = \beta \sigma_a. \quad (16.19)$$

Коэффициент динамичности  $\beta$  зависит от отношения  $\Omega/\omega$  и параметра затухания  $n$  (рис. 16.3). При отсутствии сопротивления среды ( $n = 0$ ) и при совпадении вынужденной и собственной частот ( $\Omega/\omega = 1$ ) коэффициент динамичности становится равным бес-



**Рис. 16.3**  
Графики зависимости коэффициента динамичности  $\beta$

конечности ( $\beta_d = \infty$ ). По (16.14) это означает то, что амплитуда становится бесконечно большой. Сопротивление среды ограничивает величину  $\beta_d$  и потому ограничивает амплитуду колебаний системы.

Явление повышения амплитуды при совпадении частоты собственных колебаний и частоты изменения возмущающей силы носит название **резонанса**, а само совпадение частот ( $\Omega = \omega$ ) называется **условием резонанса**. При этом в системе нарастают напряжения вплоть до предельных, нарушающих ее работоспособность или разрушающих ее саму. Причина появления резонанса заключается в том, что система получает дополнительную долю энергии в одну и ту же фазу своего движения. Даже весьма малые порции энергии, повторенные многократно, приводят в этом случае к быстрому нарастанию динамических параметров системы — резонансу. Добавление энергии в разные фазы ее движения не приводит к резонансу.

Незапланированное явление резонанса представляет серьезную опасность для работы оборудования. Работающее оборудование не должно оказываться в интервале соотношений частот  $0,7 > \Omega/\omega > 1,4$  (внутри затемненной области рис. 16.3). В практических случаях этот интервал назначают обычно значительно шире.

По условиям технологического процесса, как правило, изменить  $\Omega$  невозможно, поэтому меняют частоту собственных колебаний  $\omega$ . В соответствии с (16.7) условие  $0,7 > \Omega/\omega > 1,4$  обеспечивают изменением массы  $m$  системы или жесткости ее подвески (увеличением или уменьшением  $\delta$ ).

Если оборудование будет работать в области резонансных значений частот, то для снижения динамических эффектов необходимо увеличивать  $\Omega/\omega$ . Для этого оборудование жестко скрепляют с массивным постаментом (основание, на котором устанавливается оборудование), увеличивая колеблющуюся массу. Кроме того, между постаментом и фундаментом устанавливают упругие прокладки, увеличивая податливость колеблющейся системы. Увеличивающиеся колеблющаяся масса и податливость



системы (снижается жесткость опор) приводят по (16.17) к снижению  $\omega$ . Значит, растет отношение частот от отношения  $\Omega/\omega$  и коэффициента затухания  $n$

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{1}{\delta \cdot m}}} = \Omega \sqrt{\delta \cdot m}, \quad (16.20)$$

и работа оборудования происходит в резонансной области, значительно правее от затемненной площади (рис. 16.3). Так, в сепараторах для обеспечения условия работы ротора в диапазоне  $\Omega/\omega > 4 \dots 10$  верхнюю опору вертикального вала ротора делают упругой (ее называют горловой опорой) либо выполняют вал гибким. В практических случаях отношение массы подвижных частей машины к общей массе неподвижных частей с постаментом может составлять менее 0,05.

Если при выходе на рабочий режим требуется мягкое прохождение резонансной области, то стремятся повысить коэффициент затухания  $n$ . Например, в весах колеблющуюся стрелку скрепляют с флажком, помещаемым в ванночку с жидким маслом. Флажок, двигаясь в масле, быстро останавливает колебание стрелки. Такое устройство называют катарактом — устройством в виде подвижной заслонки.

Другим примером целенаправленного увеличения  $n$  является установка оборудования на демпфирующие виброопоры, т. е. виброопоры с поглотителями энергии колебаний (рассеиванием энергии).

Если оборудование не должно проходить резонансные частоты, то подбирают более жесткие опоры, т. е. снижают их податливость. Таким образом увеличивают  $\omega$ , за счет чего снижается  $\Omega/\omega$  до значений, меньших единицы, и работа оборудования происходит в дорезонансной области (слева от затемненной площади). Снизить массу оборудования вряд ли представится возможным: при конструировании обычно стремятся сэкономить материал и не оставляют в нем лишней массы. Поэтому параметр  $m$  в (16.20) остается неизменным.



Когда отношение частот  $\Omega/\omega > 2$ , кривые на рис. 16.3 мало отличаются друг от друга. Тогда в расчетах коэффициентом затухания можно пренебречь.

Необходимо иметь в виду весьма вероятное наличие в реальных системах двух или более частот собственных колебаний. Хотя при прохождении второй частоты и более высоких частот амплитуда колебаний существенно меньше, необходимо обеспечить описанными выше приемами работу оборудования вне опасных областей всех резонансных значимых зон.

Анализ вынужденных колебаний системы с сопротивлением позволяет сформулировать ее общие свойства:

- предотвратить прохождение резонанса можно, увеличив жесткость опор или самой конструкции;
- снизить отрицательные эффекты колебаний при работе оборудования в зарезонансной области можно, уменьшив  $\omega$  за счет увеличения массы колеблющейся системы и податливости опор;
- дополнение конструкции элементами рассеивания (поглощения) энергии колебаний существенно снижает амплитуду колебаний в прирезонансной области, например при прохождении резонанса;
- амплитуда вынужденных колебаний не зависит от начальных условий;
- вынужденные колебания не затухают при наличии сопротивления;
- частота вынужденных колебаний равна частоте возмущающей силы и не зависит от характеристик колеблющейся системы;
- даже при малой возмущающей силе могут происходить интенсивные вынужденные колебания, если сопротивление мало и частоты вынужденных и собственных колебаний близки по величине (резонанс);
- даже при большой возмущающей силе можно сделать вынужденные колебания сколь угодно малыми, если частота вынужденных колебаний будет несоизмерима с частотой собственных колебаний, например много больше.



### 16.4. КРИТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ВАЛА

Вращающийся вал с мешалкой, вращающийся ротор в центрифугах и центробежных сепараторах и т. п. создают периодическую возмущающую силу  $F_0$  (рис. 16.4).

Ею является центробежная сила инерции массы мешалки, ротора, которая всегда (как бы ни старались этого избежать) приложена с некоторым эксцентриситетом  $e$  относительно геометрической оси вращения вала:

$$F = m\Omega^2 e. \quad (16.21)$$

Проекция этой силы на оси  $x$  и  $y$ :

$$F_x = m\Omega^2 e \cos\Omega t, \quad F_y = m\Omega^2 e \sin\Omega t. \quad (16.22)$$

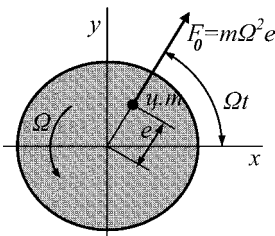


Рис. 16.4  
Периодическая  
возмущающая сила во  
вращающихся роторах

Величина эксцентриситета строго ограничивается технической документацией. Поэтому быстровращающиеся роторы требуют тщательной балансировки.

Угловую скорость ротора,  $\Omega$ , равную частоте собственных колебаний системы  $\omega$ , называют **критической скоростью вращения**  $\Omega_{кр}$ :

$$\Omega = \omega = \Omega_{кр}. \quad (16.23)$$

При этой скорости система теряет динамическую устойчивость, создаются условия резонанса. Валы роторов, работающие в докритической области (точнее  $\Omega < 0,7\Omega_{кр}$ ), называют **жесткими**, а работающие в закритической области (точнее  $\Omega > 1,4\Omega_{кр}$ ) — **гибкими**.

Поскольку часто оборудование имеет несколько степеней свободы и соответственно несколько частот собственных колебаний, то оно имеет и несколько критических частот, которым присваиваются номера, начиная с наименьшей:  $\Omega_{кр1}$ ,  $\Omega_{кр2}$  и т. д. Наиболее опасными являются низшие. Нижней, т. е. первой, критической частоте соответствуют наибольшие амплитуды колебаний и динами-

ческие напряжения. Поэтому эту частоту стремятся проходить при пуске оборудования по возможности быстрее, для чего, например, ставят более мощные электродвигатели, нежели это требуется для обеспечения технологического процесса в работающем оборудовании.

### Пример 16.1.

**Дано:** расчетная схема (рис. 16.5) с установкой, укрепленной на двух балках из швеллеров № 18; установка имеет ротор массой  $m_0 = 70$  кг, вращающийся со скоростью 1000 об/мин вокруг оси  $x$ ; принять эксцентриситет центра инерции масс ротора (дисбаланс) равным  $e = 2$  мм; коэффициентом затухания пренебречь; масса установки составляет 700 кг; ширина пролета между опорами  $l = 2$  м; материал швеллеров — сталь Ст3 с  $[\sigma] = 150$  МПа.

**Требуется:** учитывая лишь вертикальные колебания, провести проверку на резонанс и определить статическое и динамическое максимальные напряжения в балках.

**Решение.** По таблицам сортамента швеллер № 18 имеет  $I_x = 1090$  см<sup>4</sup> и  $W_x = 121$  см<sup>3</sup>. Продольный модуль упругости для стали Ст3 примем  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

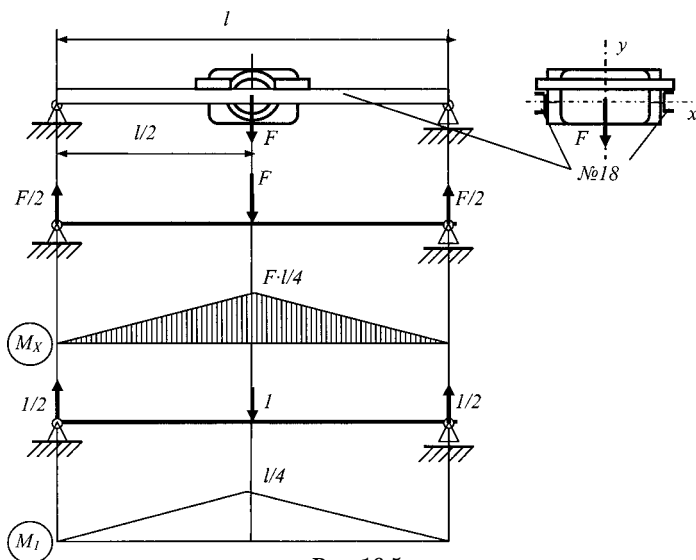


Рис. 16.5  
Расчетная схема к примеру 16.1

Величина наибольших напряжений  $\sigma_m$  посредине балки от веса установки  $F$

$$\sigma_m = \frac{M_x}{W_{x \text{ общ}}} = \frac{F \cdot l/4}{2W_x} = \frac{6867 \cdot 2/4}{2 \cdot 121 \cdot 10^{-6}} = 14,19 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

где  $M_x = Fl/4$  берется по эпюре моментов,  $F = mg = 700 \times 9,81 = 6867$  Н и общий момент сопротивления двух параллельно установленных швеллеров составляет  $W_{\text{общ}} = 2W_x$ .

Круговая частота возмущающей силы соответствует угловой скорости вращения ротора, которая с переводом размерности  $N$  из об/мин в 1/с равна

$$\Omega = \frac{1000}{60} 2\pi = 104,7 \text{ с}^{-1}.$$

Пренебрегая массой балок, определим частоту собственных колебаний системы по (16.7). Для этого вначале определим единичное перемещение  $\delta_{11}$ . Перемножая эпюру единичных моментов  $M_1$  саму на себя по формуле Верещагина (см. раздел 9.5), получаем при двух балках с их общим осевым моментом инерции  $I_{\text{общ}} = 2I_x$ :

$$\delta_{11} = \frac{2}{E2I_x} \left( \frac{1}{2} \frac{l}{4} \frac{l}{2} \right) \frac{2}{3} \frac{l}{4} = \frac{l^3}{96EI_x}.$$

В этом случае

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}} = \sqrt{\frac{96EI_x}{l^3m}} = \sqrt{\frac{96 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1090 \cdot 10^{-8}}{2^3 \cdot 700}} = 193 \text{ с}^{-1},$$

и отношение частот составляет

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{104,7}{193} = 0,54.$$

Значит, рабочая частота меньше собственной почти в два раза. Динамический коэффициент подсчитываем без учета коэффициента затухания  $n$  по (16.18):

$$\beta_d = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - 0,54^2} = 1,41.$$

Величина максимальных напряжений  $\sigma_a$  в предположении статически приложенной амплитудной по величине возмущающей силы вращающегося ротора

$$F_0 = m_0 \Omega^2 e = 70 \cdot 104,7^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1535 \text{ Н}$$

равна

$$\sigma_a = \frac{M_{x0}}{W_{x\text{общ}}} = \frac{F_0 \cdot l/4}{2W_x} = \frac{1535 \cdot 2/4}{2 \cdot 121 \cdot 10^{-6}} = 3,17 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

где максимальный момент  $M_{x0} = F_0 \cdot l/4$ .

Значит, динамическая составляющая напряжений по (16.19) равна

$$\sigma_d = \beta \sigma_a = 1,41 \cdot 3,17 \cdot 10^6 = 4,47 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Таким образом, динамическая составляющая напряжения оказалась достаточно малой за счет большого различия между рабочей и собственной частотами колебаний. Общие наибольшие напряжения составят

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_d = 14,19 \cdot 10^6 + 4,47 \cdot 10^6 = 18,17 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Здесь слагаемым  $\sigma_m$  учтены напряжения, возникшие в балках от статически приложенного веса установки. Другим слагаемым добавлена динамическая циклически меняющаяся составляющая  $\sigma_d$ .

Поскольку при колебаниях нагрузка носит циклический характер, то в общем случае подобных задач материал балок надо рассчитать еще и на усталостную прочность. Расчеты на усталостную прочность изложены в следующей главе.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ»

1. Какие механические колебания, называют гармоническими?
2. Какие колеблющиеся системы относят к идеальным?
3. Какие колеблющиеся системы относят к реальным?
4. В какой связи находятся количество степеней свободы и количество возможных форм колебаний системы?
5. Сколько степеней свободы имеет система с  $I_x = I_y$  и одной точечной массой?



6. Сколько форм упругой линии при колебаниях имеет система с одной степенью свободы?
7. Сколько степеней свободы имеет система с  $I_x \neq I_y$  и одной точечной массой?
8. Сколько форм колебаний имеет система с двумя степенями свободы?
9. Сколько степеней свободы имеет система с одной точечной массой на условно невесомой балке с поперечным сечением из двутавра?
10. Сколько степеней свободы имеет система с двумя сосредоточенными массами на невесомой упругой балке круглого поперечного сечения?
11. Как называют колебания, возникшие в упругой системе после снятия внешней нагрузки?
12. Как называют частоту, с которой происходят собственные колебания системы?
13. Каким символом обозначают частоту собственных колебаний системы?
14. Зависит ли амплитуда собственных колебаний, т. е. наибольшее отклонение точек системы от положения равновесия, от начальных условий?
15. Зависят ли частота собственных колебаний и период колебаний от начальных условий?
16. Как называют собственные колебания идеальной упругой системы при отсутствии рассеяния энергии?
17. Почему в реальной системе собственные колебания всегда являются затухающими?
18. Какие колебания системы называют вынужденными?
19. Какие колебания будет совершать балка с работающим электродвигателем?
20. Каким символом обозначается частота вынужденных колебаний?
21. Какой вид имеет уравнение колебательного горизонтального движения без рассеяния энергии подпружиненной тележки?
22. Решением какого дифференциального уравнения является функция  $z = \Delta \sin(\omega t + \varphi)$ ?
23. Что определяет выражение  $\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta \cdot m}}$ ?
24. Как называют величину силы, необходимой для изменения длины пружины на единицу?
25. Что называют податливостью пружины?
26. Каким выражением связана жесткость с податливостью?
27. Что определяет формула  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ ?

28. Как называется коэффициент  $n$ , характеризующий рассеяние энергии системы за счет сопротивления среды колебательному движению?

29. Что выражает формула  $\Delta = \frac{F_0 \delta}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$ ?

30. Что выражает формула  $\Delta = \frac{F_0 \delta}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \Omega^2}{\omega^4}}}$ ?

31. Как называется коэффициент, показывающий, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше перемещения под действием статически приложенной максимальной возмущающей силы  $F_0$ ?

32. Что представляет собой выражение  $\beta_d = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$ ?

33. Что представляет собой выражение

$$\beta_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \Omega^2}{\omega^4}}}$$

34. Как называется коэффициент, связывающий динамические напряжения, возникающие при колебаниях  $\sigma_d$ , с напряжением  $\sigma_a$ , вызываемым статически приложенной максимальной (амплитудной) нагрузкой?

35. От каких параметров системы зависит динамический коэффициент  $\beta_d$ ?

36. Как называется явление повышения амплитуды при совпадении частоты собственных колебаний и частоты изменения возмущающей силы?

37. При каком условии возникает явление резонанса?

38. В каком интервале величин отношения  $\Omega/\omega$  должно работать оборудование, не использующее явление вибрации?

39. Каким должно быть отношение  $\Omega/\omega$  для оборудования, работающего в зарезонансной области частот?

40. Каким должно быть отношение  $\Omega/\omega$  для оборудования, работающего в дорезонансной области частот?

41. С какой целью оборудование жестко скрепляют с массивным постаментом?

42. С какой целью оборудование жестко скрепляют с массивным постаментом и между постаментом и фундаментом устанавливают упругие прокладки?



43. С какой целью оборудование устанавливают на виброопоры или податливые прокладки?
44. С какой целью стремятся повысить коэффициент затухания?
45. Что необходимо предусмотреть, если при выходе на рабочий режим требуется мягкое прохождение резонансной области?
46. Каким образом обеспечивают высокий коэффициент затухания  $n$ ?
47. Каким образом обеспечивают условие предотвращения прохождения резонансных частот.
48. Для чего снижают податливость колеблющейся системы?
49. При каких условиях можно пренебречь в расчетах  $\sigma_d$  коэффициентом затухания?
50. Какими средствами можно предотвратить прохождение оборудованием резонанса?
51. С какой целью увеличивают массу колеблющейся системы, податливость опор и рассеивание энергии?
52. Как соотносятся между собой в оборудовании число частот собственных колебаний и число степеней свободы?
53. Зависит ли амплитуда вынужденных колебаний от коэффициента динамичности?
54. Затухают ли вынужденные колебания при наличии сопротивления?
55. Могут ли происходить интенсивные вынужденные колебания при малой возмущающей силе?
56. Можно ли добиться того, чтобы вынужденные колебания оказались весьма малыми даже при большой возмущающей силе?
57. Что определяет формула  $F = m\Omega^2e$ , где  $e$  — эксцентриситет центра инерции массы  $m$ ?
58. Как называют угловую скорость ротора,  $\Omega$ , равную частоте собственных колебаний системы  $\omega$ ?
59. Как называют валы роторов, работающие в докритической области (точнее  $\Omega < 0,7\Omega_{кр}$ )?
60. Как называют валы роторов, работающие в закритической области (точнее  $\Omega > 1,4\Omega_{кр}$ )?
61. Какие частоты собственных колебаний системы являются наиболее опасными?
62. Какую разрезность имеет частота собственных колебаний системы?



## ЦИКЛИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

### 17.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим пример консоли вала, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 17.1). Под действием постоянной поперечной силы  $F$  вал испытывает изгиб. Наибольшее и наименьшее (с учетом знака) напряжения ( $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ ) находятся соответственно в точках  $B$  и  $C$ .

Напряжения от изгиба на расстоянии  $y$  от нулевой линии определяются периодической функцией:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{M_x}{I_x} \frac{d}{2} \sin \omega t = \frac{M_x}{I_x} \frac{d}{2} \sin \varphi, \quad (17.1)$$

где  $y = \frac{d}{2} \sin \omega t = \frac{d}{2} \sin \varphi$ ,  $\varphi = \omega t$ .

Наибольшее и наименьшее (с учетом знака) напряжения ( $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ ) находятся соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Таким образом, величина напряжений в консоли является периодической функцией и потому циклична.

Другими примерами циклического нагружения являются детали валов зубчатых передач и центрифуг, вращающаяся с колесами ось вагонной тележки, детали вибрационных механизмов и т. д.

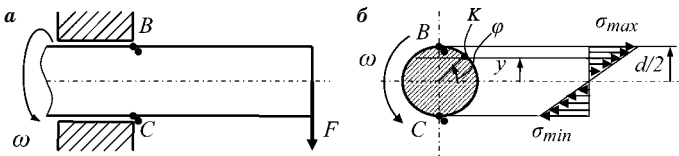


Рис. 17.1  
Циклические нагрузки, испытываемые валом

**Циклическая (повторно-переменная) нагрузка** — это нагрузка, повторяющаяся во времени с некоторой периодичностью. Периодичность может быть непостоянной.

При циклической нагрузке прочностные свойства материала снижаются. Явление снижения прочности материалов при циклической нагрузке называется **усталостью материалов**. Способность материалов сопротивляться разрушению при циклической нагрузке называется **выносливостью материалов**. Обратим внимание на то, что, хотя циклическая нагрузка переменна во времени, в этой теме инерционные эффекты считаются несущественными. Здесь важен только факт цикличности нагрузки и количества воспринимаемых деталью циклов. Инерционные силы могут создавать весьма малые напряжения, и усталостные эффекты могут оказаться определяющими прочность детали. На поверхности усталостного разрушения материала видна гладкая, создающая отблеск область. Она указывает на появление и рост полости в материале перед разрушением. Это зона постепенного нарастания разрушений от циклических нагрузок. Разрушенная часть материала перестает сопротивляться нагрузке. За счет периодического касания смежных поверхностей полости друг друга происходит их обмятие, сглаживание и они приобретают блеск. Происходит недопустимое изменение формы поперечного сечения изделия, приводящее в этом месте к изменению напряженного состояния материала. Конструкция изделия с таким сечением перестает быть прочной. Окончательное разрушение происходит мгновенно, по типу хрупкого с образованием матовой поверхности.

Систематическое изучение этого явления относится ко времени начала эксплуатации железных дорог: штоки паровых машин, рельсы и оси вагонов, рассчитанные на прочность проверенными до этого методами статических нагрузок, не гарантировали их надежную длительную работоспособность. При осмотре разрушений выявляли наличие трещин и раковин. Тогда стали считать, что материал при циклической нагрузке изменяет свои свойства во времени, «устает», и было введено понятие «усталость материалов». В дальнейшем было установлено, что мате-

риал даже вблизи разрушения сохранял свои первоначальные свойства. Однако понятие «усталость материалов» стало устойчивым и сохранилось.

Прочность при циклической нагрузке определяют понятием **усталостная прочность**. В силу сложности и множественности порождающих усталостную прочность причин ее строгое аналитическое описание практически невозможно. Поэтому в основе накопленных знаний численного определения параметров усталостной прочности лежат статистические результаты разрушений в практике работы оборудования и экспериментальные исследования, дополняемые современными теоретическими знаниями о природе этого явления.

Причина снижения прочности материалов при циклической нагрузке вызвана реальной неоднородностью материала на кристаллическом и молекулярном уровнях. Мы оперируем осредненными напряжениями в точке (в бесконечно малом объеме условно непрерывного материала), а в действительности на микроуровне, атомарном и молекулярном, они весьма разновелики. Это приводит к значительным локальным напряжениям и, значит, к локальным пластическим деформациям в микрообластях. Пластические деформации приводят к многочисленному микронаклепу (локальным микроупрочнениям). Микронаклеп, произошедший многократно, становится микроконцентратором напряжений и вызывает появление многочисленных микротрещин. Микротрещины постепенно разрастаются вплоть до слияния в макрополость, в результате чего происходит разрушение детали.

Таким образом, фактически разрушение вызывается постепенным накоплением микроповреждений и их слиянием. Процесс накопления повреждений в материале под действием циклических нагрузок снижает прочность материала. В результате наступает недопустимое с точки зрения прочности изменение формы сечения детали, снижение размеров неразрушенной части ее поперечного сечения и изменение в этом месте напряженного состояния материала. При этом, как правило, разрушение происходит без видимых пластических деформаций детали



в целом: номинальные напряжения не выходят за пределы упругого состояния материала, отсутствует остаточное удлинение—укорочение и местное сужение (шейка). Это пояснение является важным условием установления усталостной прочности при многоцикловом разрушении.

При статической нагрузке микропластические деформации, имеющиеся в материале даже новой детали, не сливаются воедино. Поэтому они не приводят к разрушению.

Природа усталостного разрушения обусловлена особенностями молекулярного и кристаллического строения материала. Поскольку образование трещин идет вначале на микроуровне, идеализация материала в виде сплошной среды становится неприемлемой для аналитического описания этого явления. Поэтому изучение усталостных явлений в материалах основывается на экспериментальных исследованиях и статистических эксплуатационных данных о работе деталей оборудования.

Практика показывает, что вид функции изменения напряжений внутри цикла слабо влияет на усталостную прочность. Установлено: при нормальной температуре и частоте изменения напряжений до 5000 циклов/мин усталостное разрушение определяется только параметрами  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  и числом циклов. Поэтому любой вид циклической нагрузки на рис. 17.2 равноценен и представляется для расчетов на прочность упрощенно синусоидальной функцией.

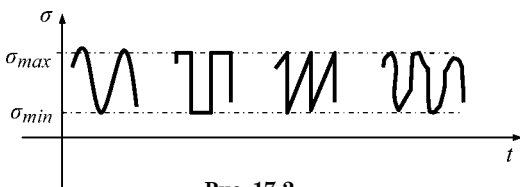


Рис. 17.2  
Варианты циклических напряжений

В циклической нагрузке основными расчетными параметрами являются (рис. 17.3):

1) среднее напряжение

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad (17.2)$$

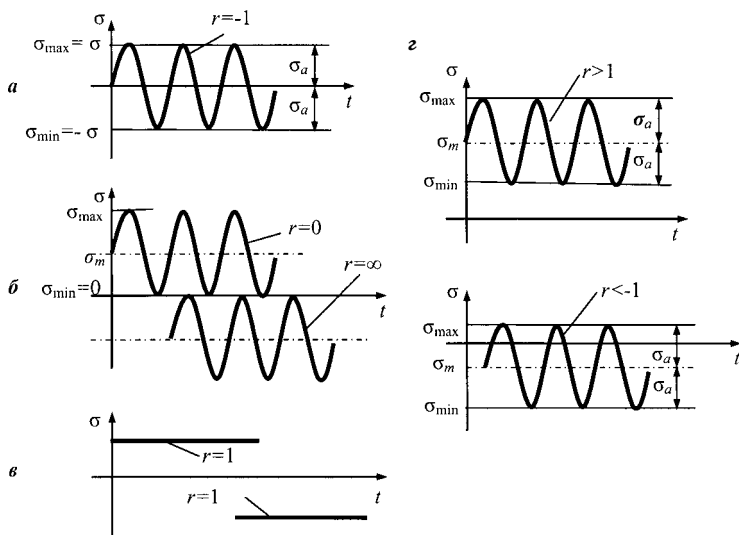


Рис. 17.3  
Виды циклов

2) амплитудное значение циклической нагрузки

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad (17.3)$$

где  $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$  — размах изменения напряжений;

3) коэффициент (показатель) асимметрии цикла

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (17.4)$$

Циклы, имеющие одинаковое значение коэффициента асимметрии  $r$ , называются **подобными**. Из двух уравнений (17.3) и (17.4) можно выразить в явном виде  $\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$  и  $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$ . Тогда

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a} = \frac{1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_m}}{1 + \frac{\sigma_a}{\sigma_m}}. \quad (17.5)$$

Этот вид формулы означает то, что подобные циклы ( $r = \text{const}$ ) имеют  $\sigma_a/\sigma_m = \text{const}$ , что окажется важным в дальнейшем (подраздел 17.3).

Для прочностных расчетов в зависимости от значений  $\sigma_m$  по (17.3) и  $\sigma_a$  по (17.4) выделяют следующие основные виды циклов:

а) симметричный цикл (рис. 17.3а) с  $\sigma_m = 0$ ,  $\sigma_a = \sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|$ ,  $r = -1$ ;

б) пульсирующий (отнулевой) цикл (рис. 17.3б) с

$$\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{\max}}{2}, \quad r = 0$$

в положительной области значений  $\sigma$  (растяжение) и

$$\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{\min}}{2}, \quad r = \infty$$

в отрицательной области значений  $\sigma$  (сжатие);

в) статическая нагрузка (рис. 17.3в) имеет  $\sigma = \text{const}$  и  $r = 1$ ;

г) асимметричный (комбинированный) цикл возникает при  $\sigma_{\max} \neq \sigma_{\min}$  и может иметь различные величины  $r$  (два примера на рис. 17.3г).

## 17.2.

### КРИВАЯ УСТАЛОСТИ ВЕЛЕРА. ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ ОБРАЗЦА

Для получения количественных характеристик усталостной прочности эксперимент проводят на образцах определенных форм и размеров для конкретных материалов и видов циклов. Его результаты распространяют с определенной корректировкой на работу реальных деталей.

Основной характеристикой выносливости материала является кривая усталости, которую строят по экспериментальным данным, разрушая образцы в цикле определенной асимметрии при разных величинах напряжений и том или ином виде деформации (растяжение–сжатие, кручение, изгиб). По ней определяют предел выносливости цикла определенной асимметрии и вида деформации.

**Пределом выносливости** называют максимальное напряжение, при котором материал не разрушается при некотором базовом числе циклов нагружения. При этом базовое число циклов принимают:  $10^7$  — для пластичных и  $10^8$  — для хрупких материалов. При большем числе циклов предел выносливости продолжает незначительно снижаться. Поэтому предел выносливости для базового числа циклов также называют **ограниченным пределом выносливости**.

Вал редуктора, вращающийся со скоростью 1500 об/мин в течение 8 ч в день 200 рабочих дней в году, совершит  $10^7$  циклов за 4,2 года, что меньше обычного восьмилетнего нормативного срока его службы. Значит, для него необходимо учитывать существование предела выносливости. ГОСТ Р 52857.2-2007 по нормам и методам расчета на прочность сосудов и аппаратов рекомендует проверять рассчитываемые емкостные аппараты на усталостную прочность, если число циклов многократных статических нагрузок (от давления, температурных, стесненных деформаций или других воздействий) будет превышать  $10^3$ . Однако, если колебания нагрузки не превышают 15% от расчетной, такая проверка не производится независимо от числа циклов.

Экспериментальное определение предела выносливости для определенного материала и вида деформаций (нагружения) проводят на соответствующей испытательной машине.

Довольно просто осуществить экспериментальное исследование при симметричном цикле нагружения изгибом, т. е. при  $r = -1$ , для которого подходит лабораторная установка по схеме, примененной Велером (рис. 17.4).

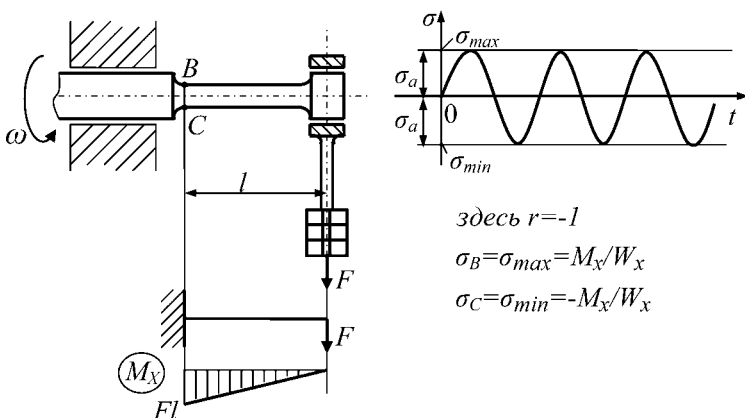


Рис. 17.4

Принципиальная схема установки для испытаний цилиндрического образца в условиях симметричного цикла нагружения ( $r = -1$ ) изгибом

Велер не первый, кто установил факт снижения разрушающих нагрузок при повторно-переменных напряжениях, но его опыты положили начало систематическим исследованиям этого явления.

Для построения кривой выносливости для определенного материала, вида нагружения и цикла асимметрии необходимо провести испытания вплоть до разрушения не менее десяти образцов одинакового диаметра. Обычно используют цилиндрические образцы диаметром 6...10 мм с полированной поверхностью. Число оборотов испытательных машин составляет 3000 об/мин. Поэтому каждое испытание весьма продолжительно:  $10^7$  циклов создается примерно за 56 ч.

В условиях симметричного цикла ( $r = -1$ , т. е.  $\sigma_{\max} = \sigma_a$ ) начинают испытания при нагрузке, создающей  $\sigma_{\max} \approx 0,7\sigma_B$ . Фиксируют количество циклов, при котором образец разрушился. Отмечают в координатах «число циклов — амплитудное напряжение» ( $N - \sigma_a$ ) точку разрушения образца. Затем повторяют испытания при все меньших напряжениях.

По результатам испытаний строят **кривую усталости** материала, или **кривую Велера**. По ней определяют предел выносливости образца, который зависит от свойств материала, геометрии образца, вида нагружения при испытаниях, цикла асимметрии. Предел выносливости обозначают как  $\sigma_r$  или  $\tau_r$ .

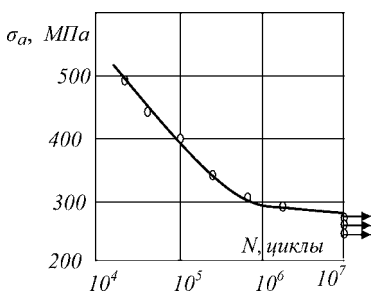


Рис. 17.5  
Характерная кривая усталости Велера для стального образца

На рис. 17.4 показана принципиальная схема установки для испытаний цилиндрического образца в условиях симметричного цикла нагружения ( $r = -1$ ) изгибом. С ее помощью определяют предел выносливости образца при  $\sigma_{-1}$ .

Характерная кривая усталости Велера для стального образца такого цикла представлена на рис. 17.5.



Экспериментальными точками со стрелками показаны ограниченные пределы выносливости образца из того же материала при большем числе циклов нагружения, чем  $10^7$ : более низкая экспериментальная точка соответствует большему количеству циклов.

Аналогично можно получить усталостную кривую Велера для деформации сдвига при симметричном виде цикла нагружения кручением, по которой определяют предел выносливости образца  $\tau_{-1}$ .

Для сталей пределы выносливости ориентировочно определяются соотношениями: при растяжении–сжатии  $\sigma_{-1} \approx 0,28\sigma_b$ , изгибе  $\sigma_{-1} \approx (0,4 \dots 0,5)\sigma_b$ , кручении  $\tau_{-1} \approx 0,22\sigma_b$  или  $\tau_{-1} \approx 0,6\sigma_{-1}$ . Для цветных металлов при изгибе  $\sigma_{-1} \approx (0,24 \dots 0,50)\sigma_b$ . Все значения пределов выносливости получают экспериментально.

Таким образом, полученные в статических испытаниях предельные напряжения уже не могут выполнять функцию предельных параметров и служат лишь ориентирами в назначении диапазона изменения пределов выносливости. При циклической нагрузке предельными параметрами становятся пределы выносливости при конкретных видах циклов и видов сопротивления (растяжение, сжатие, кручение, сдвиг, изгиб). Они определяют прочность материала, и по ним получают значения допускаемых напряжений. Следует иметь в виду то, что предел выносливости образцов сплошного круглого поперечного сечения отличается от предела выносливости трубчатых образцов.

### 17.3. ДИАГРАММА ПРЕДЕЛЬНЫХ АМПЛИТУД (ДИАГРАММА ХЭЯ)

В практических случаях материал работает часто в условиях асимметричного цикла. Кривую Велера с ординатой амплитудного значения напряжения  $\sigma_a$  можно экспериментально получить для любого несимметричного цикла нагружения. При этом значение предела выносливости окажется другим для иного коэффициента асимметрии цикла при том же виде сопротивления (деформации).



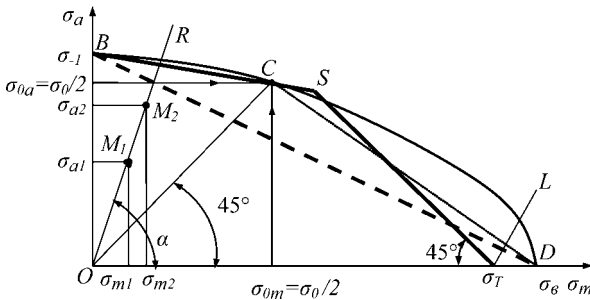


Рис. 17.6

Диаграмма предельных амплитуд (диаграмма Хэя)

Для обобщения этих результатов, т. е. для определения пределов выносливости образца при циклической нагрузке любой асимметрии, строится диаграмма предельных амплитуд (рис. 17.6) для каждого конкретного вида деформации. Иногда ее называют диаграммой Хэя. Ее строят в координатах: ось абсцисс — среднее напряжение  $\sigma_m$ , ось ординат — амплитуда напряжений  $\sigma_a$ .

На рис. 17.6 показан вид точной диаграммы предельных амплитуд для образцов в виде плавной кривой  $BCD$  и упрощенные диаграммы в виде ломаной прямой  $BSL$  (сплошная линия) для образцов из пластичных материалов и в виде ломаной прямой  $BCD$  (пунктирная линия) для хрупких материалов. Общее упрощение диаграммы предельных амплитуд для образцов из пластичных и хрупких материалов показано прямой линией  $BL$ .

Дадим пояснение этих построений.

Наиболее просто создаются условия (лабораторные машины) для получения трех точек:

- точки  $B$ , соответствующей симметричному циклу ( $\sigma_{-1}$ );
- точки  $C$ , соответствующей отнулевому циклу, у которого амплитуда и среднее значение одинаковы ( $\sigma_{0a} = \sigma_{0m} = \sigma_0/2$ );
- точки  $D$ , соответствующей мгновенному разрушению ( $\sigma_m = \sigma_b$  для пластичного материала или  $\sigma_m = \sigma_{пч}$  для хрупкого материала).

Другие точки получают испытаниями образцов в условиях асимметричных циклов нагружения. В резуль-

тате получают диаграмму предельных амплитуд в виде плавной кривой  $BCD$ . По ней можно сделать вывод, что образец, подвергнутый циклическим напряжениям с параметрами внутри области  $OBCD$  (например, с параметрами точки  $M_1$ ), имеет некоторый запас усталостной прочности.

Отсюда следует, хотя и очевидный, но существенный вывод: со снижением  $\sigma_a$  можно в большей мере увеличивать  $\sigma_m$ , т. е. увеличивать максимальное напряжение  $\sigma_{\max}$ , обеспечивая при этом усталостную прочность материала. Все циклы с параметрами, дающими точки на одном и том же луче, исходящем из начала координат, являются подобными. Они имеют одинаковые коэффициенты асимметрии  $r$  при неизменной величине угла  $\alpha$ , тангенс которого равен  $\operatorname{tg}\alpha = \sigma_a/\sigma_m$  (см. пояснение после (17.5)). Так циклы, имеющие параметры точек  $M_1$  и  $M_2$ , располагающихся на луче  $OR$ , являются подобными.

Для точного построения всей кривой  $BCD$  требуются многочисленные длительные эксперименты по разрушению образцов при различных промежуточных значениях коэффициентов асимметрии цикла. Однако плавная кривая  $BCD$  диаграммы может быть упрощена до ломаной, состоящей из двух отрезков прямых, на основании следующих рассуждений.

Для пластичных материалов:

- суммарные циклические напряжения в материале ( $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$ ) в любом случае не должны быть больше предела текучести ( $\sigma_{\max} \leq \sigma_T$ ), откуда в пределе получаем уравнение прямой  $LS$ , наклоненной под углом  $45^\circ$  ( $\sigma_a = \sigma_T - \sigma_m$ );
- на участке  $BC$  кривая  $BCD$  имеет слабую кривизну, и кривую допустимо заменить здесь прямой, проходящей через точки  $B$  и  $C$ ;
- линии  $BC$  и  $LS$  пересекаются в точке  $S$ .

Для хрупких материалов кривую  $BCD$  заменяют двумя ломаными  $BC$  и  $CD$ .

Для тех и других материалов может быть использовано более грубое, но и более простое общее приближение в виде единственной прямой  $BD$ .



Обратим внимание на то, что уравнение  $\sigma_a = \sigma_T - \sigma_m$  прямой *LS* соответствует предельному напряжению ( $\sigma_T$ ) при статически приложенной нагрузке.

Ломаная *BSL* располагается в основном внутри диаграммы предельных амплитуд. Поэтому, пренебрегая некоторым смещением ее верхней части за пределы диаграммы (область вблизи точки *S* на рис. 17.6), можем определять линией *BSL* предельные значения параметров циклической нагрузки.

Циклическая нагрузка с рабочими параметрами точки  $M_1(\sigma_m, \sigma_a)$  не приведет к разрушению образца при базовом числе циклов для любой формы упрощения диаграммы предельных амплитуд, поскольку точка находится внутри охватываемой ими области.

#### 17.4.

### ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ ДЕТАЛИ

Предел выносливости экспериментально устанавливаются для различных видов циклов и сопротивления (деформации) образцов определенного материала, формы, размеров и чистоты обработки их поверхности. Они не должны иметь концентраторов напряжений, поэтому их цилиндрическая поверхность полируется.

При рассмотрении различных видов статического нагружения наличие концентраторов напряжений не учитывалось. Это упрощение объяснялось явлением локализации повышенных напряжений зоной, ограниченной непосредственной близостью к концентратору. Локализация происходит за счет сглаживания неравномерности макродеформаций пластическими микродеформациями в малой зоне действия краевого эффекта (см. тему 1.8). Циклическая нагрузка препятствует такому сглаживанию. При ней многократное изменение величин повышенных напряжений в зоне концентратора детали сопровождается появлением новых микротрещин, их развитием и слиянием в макрополость. Это заставляет снижать экспериментально установленные пределы выносливости образца до значений пределов выносливости детали с конкретным концентратором. Таким образом механизм накапливающихся

ся повреждений при циклической нагрузке усиливает ее действие в местах концентраторов напряжений.

На величину усталостной прочности оказывают влияние концентраторы напряжений, качество поверхности и размер детали. Они приводят к снижению предела выносливости конкретной детали до величины

$$\sigma_{-1д} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma}}, \tau_{-1д} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau}}, \quad (17.6)$$

где  $K_{\sigma(\tau)}$  — общий коэффициент снижения предела выносливости детали, учитывающий отличия конкретной детали от образца при циклических нормальных или касательных напряжениях. Общий коэффициент  $K_{\sigma(\tau)}$  состоит из комплекса частных коэффициентов, отдельно учитывающих конкретные отличия детали от образца

$$K_{\sigma(\tau)} = \frac{k_{\sigma(\tau)}}{\varepsilon_{\sigma(\tau)} \cdot \beta_{\sigma(\tau)}}, \quad (17.7)$$

где для нормальных (касательных) напряжений  $k_{\sigma(\tau)}$  — эффективный коэффициент концентрации напряжений от конкретного вида концентратора;  $\varepsilon_{\sigma(\tau)}$  — масштабный коэффициент (фактор размера) детали;  $\beta_{\sigma(\tau)}$  — коэффициент качества поверхности детали.

Коэффициент снижения предела выносливости обычно принимают независимым от вида цикла (симметричного или несимметричного).

#### 17.4.1. ВЛИЯНИЕ КОНЦЕНТРАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕТАЛИ

Концентратором в детали является место нарушения регулярности изменения деформации в виде резкой, скачкообразной смены закона (характера) ее распределения. К концентраторам относятся: углы, выточки, шлицы, шпоночные канавки, отверстия, сочленения деталей различной формы (например, оболочка с фланцем) и жесткости (например, сварка разнородных металлов), места контакта деталей и др. (см. рис. 1.8).

Концентратор создает местную неравномерность изменения деформации, приводящую к местному росту



напряжений. Большие напряжения приводят к более существенным усталостным явлениям, которые проявляются в этих зонах значительно интенсивнее, чем при статической нагрузке. Происходит снижение предела выносливости для конкретной детали:

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1\text{кнц}}} > 1, \quad k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1\text{кнц}}} > 1, \quad (17.8)$$

где  $k_{\sigma}$  и  $k_{\tau}$  — эффективные (действительные) коэффициенты концентрации напряжений для конкретного вида концентратора,  $\sigma_{-1\text{кнц}}$  и  $\tau_{-1\text{кнц}}$  — напряжения в детали с конкретным концентратором.

Значения  $k_{\sigma(\tau)}$  определяются по справочным таблицам. Эти значения уменьшаются с увеличением асимметрии цикла.

Значения коэффициентов  $k_{\sigma(\tau)}$  увеличиваются с повышением временного сопротивления  $\sigma_b$  или предела прочности  $\sigma_{пч}$  материала, что иллюстрирует рис. 17.7: чем выше временное сопротивление, предел прочности, тем чувствительнее материал к концентраторам напряжений. Влияние концентраторов напряжений с ростом температуры часто снижается. Как мы убедимся далее, эти выводы характерны для любых концентраторов напряжений.

Серый чугун нечувствителен к местным напряжениям. Крупные зерна графита в структуре чугуна являются сами по себе концентраторами. По сравнению с ними геометрические особенности детали становятся несущественными.

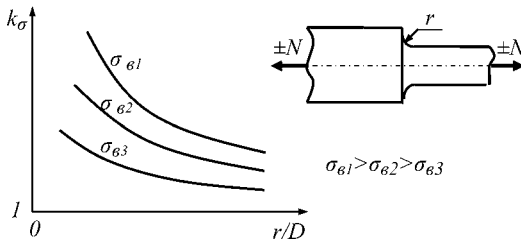


Рис. 17.7

Влияния галтели радиусом  $r$  и величины  $\sigma_b$  на коэффициент концентрации напряжений  $k_{\sigma}$

#### 17.4.2. ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРА ДЕТАЛИ (МАСШТАБНЫЙ ФАКТОР)

На выносливость оказывает влияние иной, чем у образца, размер детали. Так, если вал имеет диаметр больше, чем у образца, по которому получена величина предела выносливости  $\sigma_{-1}$  или  $\tau_{-1}$ , то пределы выносливости детали  $\sigma_{-1д}$  и  $\tau_{-1д}$  уменьшатся. Поэтому вводится понятие масштабного коэффициента (фактора) детали, который обычно меньше единицы:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_{-1}} < 1, \quad \varepsilon_{\tau} = \frac{\tau_{-1д}}{\tau_{-1}} < 1. \quad (17.9)$$

Коэффициенты могут приниматься равными для нормальных и для касательных напряжений, т. е. без учета вида напряжения.

Влияние на масштабный коэффициент размера детали и величины  $\sigma_b$  показано на рис. 17.8, где  $D_d$  — диаметр детали;  $D_{об}$  — диаметр образца. Снижение предела выносливости детали происходит вследствие наличия большего количества дефектов в поперечном сечении детали, большей по размеру, чем образец, по которому получены  $\sigma_{-1}$  и  $\tau_{-1}$ .

Коэффициент  $\varepsilon$  снижается с повышением  $\sigma_b$  материала, т. е. предел выносливости детали снижается значительно у более прочных материалов. Это означает, что более прочные материалы обладают большей чувствительностью к масштабному фактору.

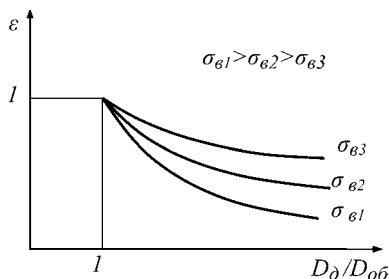


Рис. 17.8

Характер влияния размеров детали и величины  $\sigma_b$  на величину масштабного коэффициента  $\varepsilon_{\sigma}$

Лишь для размеров детали, равных размеру образца, масштабный коэффициент равен единице.

Как видим и здесь  $K_{\sigma(\tau)}$  — общий коэффициент снижения предела выносливости детали увеличивается при росте  $\sigma_b$ , поскольку сам снижающийся масштабный коэффициент  $\varepsilon$  стоит в знаменателе формулы (17.7).

#### 17.4.3. ВЛИЯНИЕ КАЧЕСТВА ПОВЕРХНОСТИ ДЕТАЛИ

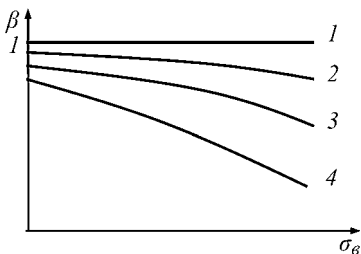
На выносливость детали также оказывает влияние иное, чем у образца, качество поверхности.

Часто усталостное разрушение начинается с поверхности детали. Чем грубее обработана поверхность, тем больше на ней микроконцентраторов, способствующих появлению и развитию усталостных эффектов. Коррозия приводит к существенному отрицательному эффекту. Учет характера поверхности производят с помощью коэффициента качества поверхности детали  $\beta$ , который примерно одинаков для нормальных и касательных напряжений и потому имеет единое обозначение:

$$\beta_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_{-1}} \approx \beta_{\tau} = \frac{\tau_{-1д}}{\tau_{-1}} = \beta. \quad (17.10)$$

Поскольку образцы имеют полированную поверхность, то для детали чаще всего  $\beta < 1$ .

На рис. 17.9 показано влияние  $\sigma_b$  на коэффициент качества поверхности детали  $\beta$  характера обработки поверхности детали в сравнении с полированной. Графики отражают результаты испытаний образцов, имеющих поверхность: 1 — полированную, 2 — шлифованную, 3 — точеную; 4 — грубую обточку.



**Рис. 17.9**  
Характер влияния  $\sigma_b$  и характера обработки поверхности детали на величину коэффициента качества поверхности детали  $\beta$



Как видим, и в этом случае более прочные материалы чувствительнее к качеству обработки поверхности детали.

Рассказывают такую историю.

На заре строительства вертолетов для крепления лопастей сделали по расчетам прочные болты, а для придания им еще большей прочности мастер в цехе решил их закалить. При испытаниях крепление разрушалось к недоумению конструкторов. На какой-то раз рабочий, изготовлявший болты, не закалил их по халатности — крепление, опять-таки к недоумению конструкторов, не разрушилось. Начались проверки, и халатность была обнаружена. С тех пор болты не калят.

Что же произошло? Закаленная поверхность обладала большим  $\sigma_v$  и потому существенно снижала коэффициент  $\beta$ , увеличивая общий коэффициент концентрации напряжений.

### 17.5. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗАПАСА ПРОЧНОСТИ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ЦИКЛЕ НАГРУЖЕНИЯ. ОБЩИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ЗАПАСА

Для несимметричного цикла нагружения используют зависимости по нормальным и касательным напряжениям

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma}\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}\beta}\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m}, \quad (17.11)$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau}\tau_a + \psi_{\tau}\tau_m} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}\beta}\tau_a + \psi_{\tau}\tau_m}, \quad (17.12)$$

где коэффициентами  $\psi_{\sigma}$ ,  $\psi_{\tau}$  учтена асимметрия цикла (влияние среднего напряжения на снижение предела выносливости симметричного цикла). Величины этих коэффициентов принимают в пределах  $\psi_{\sigma} = 0,05 \dots 0,15$  и  $\psi_{\tau} = 0 \dots 0,1$ . Большие значения соответствуют большей прочности материала. При симметричных циклах нагружения  $\sigma_m = 0$  и знаменатели формул (17.11) и (17.12) упрощаются. Обоснование и вывод формул (17.11) и (17.12) можно найти в [1], значения коэффициентов — в [1, 2, 4, 6, 11].



В практике работы деталей технологического оборудования наиболее часто встречается совместное действие изгиба и кручения, создающее сложное напряженное состояние. В связи с частыми остановками и пусками возникающие напряжения следует рассматривать как циклические. Ранее была получена формула общего коэффициента запаса прочности при статическом совместном нагружении изгибом и кручением. Общий коэффициент запаса прочности при циклическом нагружении изгибом и кручением получают аналогично. Отличие заключается в назначении предельным напряжением вместо  $\sigma_T$  величины предельной амплитуды колебания напряжений детали  $\sigma_{-1д}$  для конкретного вида цикла. Тогда аналогично последовательности преобразований (13.8)...(13.14) получаем

$$n = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_{\text{экр}(3)}} = \frac{\sigma_{-1д}}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}},$$

или

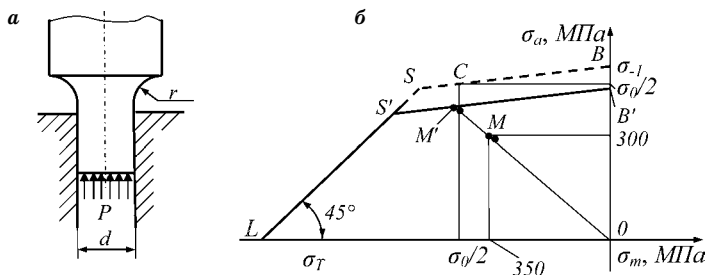
$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}. \quad (17.13)$$

Здесь  $n$  — коэффициент запаса усталостной прочности  $r$ -го вида цикла,  $n_\sigma$  — коэффициент запаса усталостной прочности по нормальным напряжениям,  $n_\tau$  — по касательным напряжениям. Несмотря на принятое здесь условие  $\sigma_{-1д} = 2\tau_{-1д}$ , предполагающее одинаковые виды циклов изменения  $\sigma$  и  $\tau$ , формула (17.13) применима при любых сочетаниях их видов циклов и совпадает с эмпирической формулой Гафа–Полларда.

### Пример 17.1.

Д а н о: плунжер (рис. 17.10а) работает в комбинированном режиме при давлении от  $P_{\min} = 50$  МПа до  $P_{\max} = 650$  МПа; диаметр плунжера  $d = 15$  мм, радиус галтели  $r = 15$  мм; материал плунжера имеет  $\sigma_0 = 900$  МПа,  $\sigma_T = 1000$  МПа,  $\sigma_{-1} = 500$  МПа; поверхность плунжера полированная.

О п р е д е л и т ь: коэффициент запаса прочности по усталостным напряжениям  $n_\sigma$  в зоне перехода на больший диаметр.



**Рис. 17.10**  
 Расчетная схема и условная диаграмма усталостной прочности при сжатии Хэя к примеру 17.1

*Решение.* По данным примера строим строго в выбранном масштабе диаграмму усталостной прочности при сжатии Хэя (рис. 17.10б).

По таблицам и графикам [1, 2, 4, 6, 10] находим для заданных параметров плунжера  $k_\sigma = 1,1$  — эффективный коэффициент концентрации напряжений галтельного перехода;  $\varepsilon_\sigma = 0,95$  — масштабный коэффициент (фактор размера) детали;  $\beta_\sigma = 1,0$  — коэффициент качества поверхности детали. Тогда коэффициент снижения предела выносливости детали по (17.7)

$$K_\sigma = \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \beta_\sigma} = \frac{1,1}{0,95 \cdot 1} = 1,16.$$

Коэффициент  $\psi_\sigma$ , учитывающий влияние среднего напряжения на снижение предела выносливости симметричного цикла и определяющий угол  $\alpha$  наклона прямой  $BS$ , принимаем равным по [1, 2, 10]

$$\psi_\sigma = 0,11.$$

Циклическими напряжениями в плунжере являются: среднее напряжение по (17.3)

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{650 + 50}{2} = 350 \text{ МПа.}$$

И амплитудное значение циклической нагрузки по (17.4)

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{650 - 50}{2} = 300 \text{ МПа.}$$

Значит, коэффициент запаса прочности по циклической нагрузке по (17.11) и равен

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma}\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m} = \frac{500}{1,16 \times 300 + 0,11 \times 350} = 1,29.$$

Покажем определение коэффициента запаса прочности по упрощенной диаграмме предельных амплитуд Хэя (рис. 17.6). Для этого представим ее для образца с учетом заданных прочностных свойств материала плунжера в виде ломаной  $BSL$ , расположенной во второй координатной четверти по причине отрицательных напряжений от сжатия (рис. 17.10б). Построение ломаной  $BSL$  должно быть выполнено точно в удобном для построения масштабе.

С учетом конструкционных особенностей плунжера (как конкретной детали с концентраторами напряжений) вместо наклонной прямой  $BS$  должны построить расположенную ниже, почти параллельную ей прямую  $B'S'$ . Для графического построения достаточная точность будет соблюдена, если линию  $B'S'$  проведем из точки  $B'$  параллельно линии  $BS$ . При этом будет обеспечена  $\pm 5\%$ -ная точность вычислений.

Коэффициент концентрации  $K_{\sigma}$  по (17.7) снижает величину  $\sigma_{-1}$  детали в 1,16 раза. Вычислим координаты точки  $B'$ :

$$B' \left( 0; \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma}} \right) = B' \left( 0; \frac{500}{1,16} \right) = B'(0; 431 \text{ МПа}),$$

и проведем из нее прямую, параллельную  $BS$ , до пересечения с линией  $LS$ . Координаты полученной точки  $S'$  соответствуют значениям  $S'(628; 357)$ .

Отмечаем положение точки для заданного цикла  $M(\sigma_m; \sigma_a) = M(350 \text{ МПа}; 300 \text{ МПа})$ .

Отношение длин отрезков на построенной диаграмме соответствует  $OM' = 41,5$  к  $OM = 32$ , что дает значение коэффициента запаса прочности

$$n_{\sigma} = \frac{OM'}{OM} = \frac{41,5}{32} = 1,30.$$

Как видим, графическое построение оказалось весьма точным. Оно дало незначительное отличие коэффициентов  $n_\sigma$ , вычисленных аналитически и полученных графоаналитическим путем.

**Пример 17.2.**

Д а н о: цилиндрический стержень работает на растяжение при нагрузке, изменяющейся по отнулевому (пульсирующему) циклу (рис. 17.11). Стержень диаметром  $D = 60$  мм с поперечным сквозным отверстием диаметром  $d = 6$  мм изготовлен из стали 45 ( $\sigma_B = 600$  МПа,  $\sigma_T = 360$  МПа,  $\sigma_{-1p} = 210$  МПа). Максимальное усилие растяжения  $F = 0,2$  МН. Поверхность стержня шлифованная.

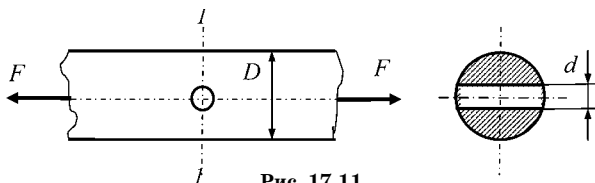


Рис. 17.11  
Расчетная схема к примеру 17.2

О п р е д е л и т ь: коэффициент запаса прочности для опасного сечения; как изменится коэффициент запаса прочности, если стержень изготовить из хромированной стали 40Х ( $\sigma_B = 1000$  МПа,  $\sigma_T = 800$  МПа,  $\sigma_{-1p} = 330$  МПа).

Решение. Опасным в стержне является сечение 1–1, проходящее по диаметру сквозного отверстия. Поскольку в условии задачи не дано значение предела выносливости при отнулевом цикле, рассматриваем его как комбинированный с использованием формулы (17.11) в виде

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{k_\sigma \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}$$

Определим ее составляющие.

Номинальное значение максимального напряжения для опасного сечения равно

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F_{\max}}{A_{\text{нетто}}} = \frac{F_{\max}}{\frac{\pi}{4} D^2 - D \cdot d} = \frac{0,2 \cdot 10^6}{\frac{\pi}{4} (60 \cdot 10^{-3})^2 - 60 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 81,260 \cdot 10^6 \text{ Па.} \end{aligned}$$



Тогда

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_{\max}}{2} = \frac{81,2 \cdot 10^6}{2} = 40,6 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Для заданных параметров стержня из стали 45 по таблицам (см., например, [1, 2, 4, 6, 10]) находим  $k_\sigma = 1,95$ ;  $\varepsilon_\sigma = 0,755$ ;  $\beta_\sigma = 0,95$ ;  $\psi_\sigma = 0,15$ . Тогда коэффициент снижения предела выносливости стержня из стали 45 по (17.7) равен

$$K_\sigma = \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \beta_\sigma} = \frac{1,95}{0,755 \cdot 0,95} = 2,72.$$

Для заданных параметров стержня из стали 40X (см., например, [1, 2, 4, 6, 10]) по таблицам находим  $k_\sigma = 2,15$ ;  $\varepsilon_\sigma = 0,720$ ;  $\beta_\sigma = 0,91$ ;  $\psi_\sigma = 0,165$ . Тогда коэффициент снижения предела выносливости стержня из стали 40X по (17.7) равен

$$K_\sigma = \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \beta_\sigma} = \frac{2,15}{0,720 \cdot 0,91} = 3,28.$$

Значит, коэффициенты запаса прочности по усталостным напряжениям окажутся равны:

а) для стали 45

$$n_\sigma = \frac{210 \cdot 10^6}{2,72 \cdot 40,6 \cdot 10^6 + 0,150 \cdot 40,6 \cdot 10^6} = 1,81;$$

б) для стали 40X

$$n_\sigma = \frac{330 \cdot 10^6}{3,28 \cdot 40,6 \cdot 10^6 + 0,165 \cdot 40,6 \cdot 10^6} = 2,36.$$

Определим коэффициенты запаса прочности по отношению к пределу текучести, полагая максимальную силу статически приложенной:

а) для стали 45

$$n_{\sigma T} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{360 \cdot 10^6}{81,2 \cdot 10^6} = 4,43;$$

б) для стали 40X

$$n_{\sigma T} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{800 \cdot 10^6}{81,2 \cdot 10^6} = 9,85.$$

Как видим, существенно меньшие значения коэффициентов запаса прочности соответствуют расчету по усталостной прочности. Значит, для обеих сталей был необходим расчет по усталостным напряжениям. При этом более высокие коэффициенты получили для стали 40Х за счет более высоких прочностных характеристик материала. Так, по статическим коэффициентам запаса сталь 40Х оказывается значительно прочнее стали 45 (более чем в 2 раза). Однако это различие заметно снижается (до 1,3) при проверке по усталостной прочности.

### Пример 17.3.

**Д а н о:** шлифованный вал редуктора, в котором выполнена шпоночная канавка: в нем действуют изгибающие моменты  $M_X = 150$  Нм,  $M_Y = 550$  Нм и крутящий момент  $T = 440$  Нм; при этом нормальные напряжения от изгиба меняются по симметричному циклу, а касательные от кручения — по отнулевому; материал вала — сталь 45 с  $\sigma_B = 600$  МПа,  $\sigma_T = 360$  МПа,  $\sigma_{-1} = 260$  МПа,  $\tau_{-1} = 260$  МПа; диаметр вала  $D = 55$  мм.

**Т р е б у е т с я:** определить коэффициент запаса прочности вала.

*Решение.* Максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_X} = \frac{\sqrt{M_X^2 + M_Y^2}}{\frac{\pi}{32} D^3} = \frac{\sqrt{150^2 + 550^2}}{\frac{\pi}{32} (55 \cdot 10^{-3})^3} = 34,9 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_P} = \frac{T}{\frac{\pi}{16} D^3} = \frac{440}{\frac{\pi}{16} (55 \cdot 10^{-3})^3} = 13,5 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

С учетом величины  $\sigma_T$  коэффициент запаса прочности по статически приложенным максимальным напряжениям будет заведомо высоким. Амплитудное и среднее касательные напряжения при отнулевом цикле нагружения будут равны

$$\tau_a = \tau_m = \frac{\tau_{\max}}{2} = \frac{13,5 \cdot 10^6}{2} = 6,75 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Составляющие коэффициентов снижения предела выносливости детали определяем по таблицам (см., например, [1, 2, 4, 6, 10]):  $k_\sigma = 1,76$  и  $k_\tau = 1,65$  — концентрация



напряжений за счет шпоночной канавки;  $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = 0,77$  — масштабный фактор;  $\beta = 0,96$  — шлифованная поверхность;  $\psi_\tau = 0,107$ . Значит,

$$K_\sigma = \frac{1,76}{0,77 \cdot 0,96} = 2,38,$$

$$K_\tau = \frac{1,65}{0,77 \cdot 0,96} = 2,24$$

и коэффициенты запаса прочности по нормальным (при симметричном цикле  $\sigma_m = 0$ ) и касательным напряжениям будут

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a} = \frac{260 \cdot 10^6}{2,38 \cdot 34,9 \cdot 10^6} = 3,13,$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau d} \tau_a + \psi_\tau \tau_m} = \frac{150 \cdot 10^6}{2,24 \cdot 6,75 \cdot 10^6 + 1,07 \cdot 6,75 \cdot 10^6} = 9,55.$$

Общий коэффициент запаса прочности равен

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{3,13 \cdot 9,55}{\sqrt{3,13^2 + 9,55^2}} = 2,97.$$

## 17.6. ПОНЯТИЕ О МАЛОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ

Расчеты на прочность многоциклового усталостного разрушения, рассмотренные в этой главе, относились к условиям упругодеформируемого материала. Это означало, что величина номинального напряжения не превышала предела упругости материала. Для этих условий разрушение начинается в местах концентрации напряжений, является результатом развития и слияния микротрещин и носит хрупкий характер, т. е. без появления заметных остаточных деформаций детали в целом.

Другим видом усталости является малоцикловая усталость, которая происходит при напряжениях, превышающих предел упругости, и связана с разрушением в условиях накопления циклических упругопластических деформаций всей детали. Она отличается от многоциклового усталостного разрушения накоплением макроскопиче-





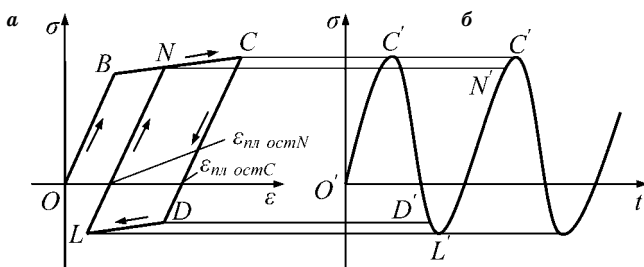


Рис. 17.12

Характер изменения напряжений при малоцикловом нагружении в условиях напряжений, превышающих предел упругости

ской пластической деформации в зоне последующего разлома. С каждым циклом суммарная пластическая деформация детали накапливается и достигает предельной величины, обуславливающей разрушение аналогично статическому однократному нагружению. По наличию заметной пластической деформации всей детали малоцикловое разрушение иногда называют квазистатическим. Именно наличием макропластической деформации оно отличается от многоциклового нагружения.

Однако строгих границы между понятиями многоциклового и малоциклового усталости нет. Разрушение, произошедшее до  $10^4 \dots 10^5$  циклов, условно относят к малоцикловому.

Рассмотрим схематизированную диаграмму деформирования образца в координатах  $\sigma$ - $\epsilon$  (рис. 17.12а), совмещенную с синусоидальным графиком изменения напряжений во времени (рис. 17.12б).

При первом нагружении напряжение растет по  $O'C'$ , что соответствует на схематизированной диаграмме в координатах  $\sigma$ - $\epsilon$  ломаной  $OBC$ . Затем напряжение уменьшается по  $C'D'L'$ , что соответствует ломаной  $CDL$ . После точки  $L$  начинается вновь возрастание напряжения по  $L'N'C'$ , что соответствует ломаной  $LNC$ . После повторного достижения напряжения в значении точки  $N'$  диаграмма деформирования превращается в повторяющийся цикл  $NCDL$ . На графике (рис. 17.12б) синусоида изменения напряжений продолжается вправо.

Как видим, в циклически нагружаемом образце происходят пластические деформации. Их изменение за цикл составляет

$$\Delta \varepsilon_{\text{пл}} = \varepsilon_{\text{пл.ост}C} - \varepsilon_{\text{пл.ост}N}, \quad (17.14)$$

где  $\varepsilon_{\text{пл.ост}C}$  и  $\varepsilon_{\text{пл.ост}N}$  — остаточные пластические деформации в образце при прохождении синусоиды напряжений через ось абсцисс ( $\sigma = 0$ ).

Дальнейшее снижение  $\sigma$  от нуля в отрицательную область происходит при продолжающемся линейном снижении полной деформации до точки  $D$ , а затем по линии, параллельной  $CN$ , до точки  $L$ .

Характер разрушения при малоцикловогой усталости зависит от способности материала к накоплению пластических деформаций при циклическом деформировании. Материалы, у которых пластическая деформация в каждом цикле уменьшается от цикла к циклу, называются **циклически упрочняющимися**. Их разрушение носит усталостный характер, как описано в разделах 17.1 и 17.2. В циклически разупрочняющихся материалах происходит постепенный рост (накопление) пластических деформаций от цикла к циклу. Существуют **циклически стабильные материалы**, имеющие одинаковую величину пластической деформации во всех циклах. Именно для такого вида материалов дана иллюстрация малоцикловогой усталости на рис. 17.12.

Малоцикловогой усталость чувствительна к частоте нагружения и времени выдержки в цикле. В некоторых материалах предел малоцикловогой усталостной прочности снижается в 1,5...3,5 раза при снижении частоты и увеличении времени выдержки цикла с 2000 циклов в минуту до 15 циклов в минуту.

#### Пример 17.4.

Дано: шлифованный вал редуктора, у которого нормальные напряжения изгиба меняются по симметричному циклу, а касательные кручения — по отнулевому:  $M_x = 150$  Нм,  $M_y = 550$  Нм,  $T = 440$  Нм; вал диаметром  $D = 55$  мм выполнен из стали 45, имеющей  $\sigma_b = 600$  МПа,  $\sigma_T = 360$  МПа,  $\sigma_{-1} = 260$  МПа,  $\tau_{-1} = 260$  МПа; вал имеет шпоночную канавку.

**Т р е б у е т с я:** определить коэффициент запаса прочности вала.

*Решение.* Максимальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{\frac{\pi}{32} D^3} = \frac{\sqrt{150^2 + 550^2}}{\frac{\pi}{32} (55 \cdot 10^{-3})^3} = 34,9 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{\frac{\pi}{16} D^3} = \frac{440}{\frac{\pi}{16} (55 \cdot 10^{-3})^3} = 13,5 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

С учетом величины  $\sigma_T$  коэффициент запаса прочности по статически приложенным максимальным напряжениям будет заведомо высоким. Амплитудное и среднее касательные напряжения:

$$\tau_a = \tau_m = \frac{\tau_{\max}}{2} = \frac{13,5 \cdot 10^6}{2} = 6,75 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Составляющие коэффициентов снижения предела выносливости детали определяем по справочным таблицам (см., например, [1, 2, 4, 6, 10]): концентраторы напряжений за счет шпоночной канавки  $k_\sigma = 1,76$  и  $k_\tau = 1,65$ ; масштабные коэффициенты  $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = 0,77$ ; коэффициент качества шлифованной поверхности  $\beta = 0,96$ ;  $\psi_\tau = 0,107$ . Значит,

$$K_\sigma = \frac{1,76}{0,77 \cdot 0,96} = 2,38, \quad K_\tau = \frac{1,65}{0,77 \cdot 0,96} = 2,24$$

и коэффициенты запаса прочности по нормальным (при симметричном цикле  $\sigma_m = 0$ ) и касательным напряжениям будут

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a} = \frac{260 \cdot 10^6}{2,38 \cdot 34,9 \cdot 10^6} = 3,13,$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau d} \tau_a + \psi_\tau \tau_m} = \frac{150 \cdot 10^6}{2,24 \cdot 6,75 \cdot 10^6 + 1,07 \cdot 6,75 \cdot 10^6} = 9,55.$$

Значит, общий коэффициент запаса прочности равен

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{3,13 \cdot 9,55}{\sqrt{3,13^2 + 9,55^2}} = 2,97.$$



### 17.7. ПОВЫШЕНИЕ ВЫНОСЛИВОСТИ КОНСТРУКЦИОННЫМИ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРИЕМАМИ

Способы повышения предела выносливости детали к пределу выносливости образца могут быть конструкционными или технологическими.

Конструкционные (конструкторские) мероприятия должны приводить к снижению коэффициента концентрации напряжений. Для этого следует:

- обеспечивать близость деформационных свойств сопрягаемых деталей в зоне контакта их краев и стыкуемых элементов единой детали;
- сглаживать поверхности переходов в детали от одной конфигурации к другой: для этого следует увеличивать радиусы закруглений или создавать постепенные переходы от одного диаметра поверхности к другому по конусу;
- делать более чистой поверхности детали (снижать шероховатость);
- подбирать материал с более вязкими свойствами, меньшим  $\sigma_B$ ;
- сглаживать острые кромки краев сверления, внутренних посадочных поверхностей и др.

Так, предел выносливости стальных образцов при грубой обточке снижается на 40%, при наличии окалины на поверхности — на 70%.

К основным технологическим мероприятиям относятся:

- улучшение структуры поверхностного слоя детали повышением чистоты обработки, термической (токами высокой частоты), термохимической (азотированием или цементацией) и механической (наклеп) обработкой;
- антикоррозионные мероприятия;
- обеспечение рационального температурного режима и др.

Так, пластическая деформация поверхностного слоя (поверхностный наклеп) может дать повышение предела выносливости до 20%.

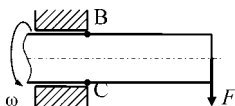
Коррозия приводит к уменьшению предела выносливости на 70...80%. Отрицательное действие коррозии усиливается с повышением  $\sigma_B$ .

Паузы в многоцикловом нагружении могут несколько увеличить предел выносливости.

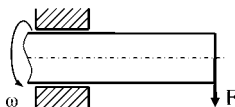
С повышением температуры с 20°C до 300°C предел усталости многих сталей несколько повышается, начиная с температуры 300°C — понижается на 15...20% на каждые 100°C. При понижении температуры с 20°C до -190°C предел выносливости у большей части сталей возрастает.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «ЦИКЛИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК»

1. Почему вращающийся вал при изгибе испытывает знакопеременные напряжения?
2. В каком месте вал испытывает наибольшие по абсолютной величине напряжения?

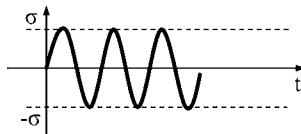


3. По какой функции меняются во времени напряжения в вале, изображенном на рисунке?

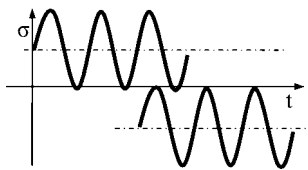


4. Какая нагрузка, называется циклической?
5. Как изменяются прочностные свойства материала при циклической нагрузке?
6. Как называется явление снижения прочности материалов при циклической нагрузке?
7. Как называется способность материалов сопротивляться разрушению при циклической нагрузке?
8. Что лежит в основе численного определения усталостной прочности?
9. В чем причина снижения прочности материалов при циклической нагрузке?
10. Можно ли рассматривать микротрещины как микроконцентраторы напряжений?

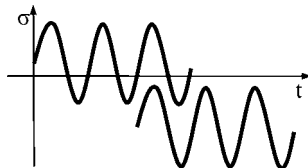
11. Из-за чего происходит собственно разрушение детали при циклической нагрузке?
12. Существенны или несущественны пластические деформации при разрушении от циклической нагрузки?
13. Почему при статической нагрузке микропластические деформации не приводят к разрушению?
14. Влияет ли вид функции изменения напряжений внутри цикла на усталостную прочность?
15. Какие циклы называются подобными?
16. Какое напряжение называют пределом выносливости?
17. Какое напряжение при циклической нагрузке определяется формулой  $\frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$ ?
18. Какое напряжение при циклической нагрузке определяется формулой  $\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ ?
19. Как называется коэффициент, который при циклической нагрузке определяется формулой  $\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ ?
20. Чему равен коэффициент асимметрии для симметричного цикла?
21. Чему равен коэффициент асимметрии для пульсирующего цикла?
22. Какой вид цикла иллюстрирует рисунок?



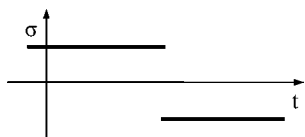
23. Какие виды циклов иллюстрирует рисунок?



24. Какие виды циклов иллюстрирует рисунок?



25. Какое нагружение иллюстрирует рисунок?

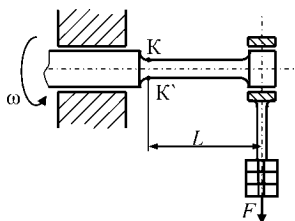


26. Как получают количественные характеристики усталостной прочности?

27. Какие образцы используются для испытаний на выносливость?

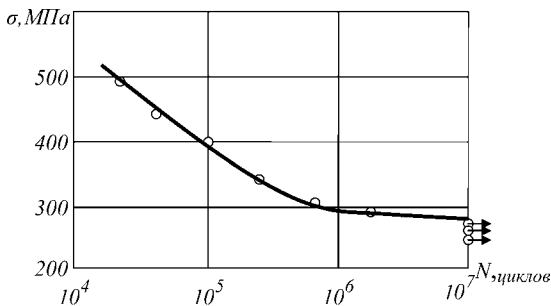
28. Как называют максимальное напряжение, при котором материал не разрушается при некотором базовом числе циклов нагружения?

29. Какой вид цикла нагружения в сечении  $K-K$  дает установка, показанная на рисунке?



30. Как называется кривая, по которой определяют предел выносливости образца из конкретного материала?

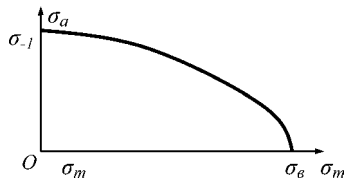
31. Какой характерный график показан на рисунке?



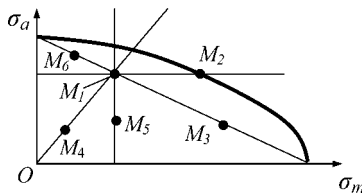
32. Зависит ли предел выносливости от вида асимметрии цикла?

33. Зависит ли предел выносливости от вида возникающих внутренних силовых факторов?

34. Как называется диаграмма, показанная на рисунке?



35. Если параметры цикла нагружения имеют координаты, расположенные внутри площади, охватываемой диаграммой Хэя, то имеет ли материал образца некоторый запас усталостной прочности?
36. Каким точкам на рисунке диаграммы Хэя соответствуют два подобных цикла?



37. Зависит ли предел выносливости детали от концентраторов напряжений?
38. Какие напряжения определяют формулами

$$\sigma_{-1д} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma}, \quad \tau_{-1д} = \frac{\tau_{-1}}{K_\tau}?$$

39. Как называется параметр, определяемый формулой

$$K_{\sigma(\tau)} = \frac{k_{\sigma(\tau)}}{\varepsilon_{\sigma(\tau)} \cdot \beta_{\sigma(\tau)}}?$$

40. Что означают коэффициенты в формуле

$$K_\sigma = \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \beta_\sigma}?$$

41. Эффективный коэффициент концентрации нормальных напряжений конкретного вида концентратора определяется формулой...
42. Как изменяются значения  $k_{\sigma(\tau)}$  с увеличением асимметрии цикла?
43. Как изменяются значения  $k_{\sigma(\tau)}$  с повышением  $\sigma_b$  материала?
44. Почему происходит снижение предела выносливости детали, имеющей больший размер по сравнению с  $\sigma_{-1}$  и  $\tau_{-1}$  образца?
45. Как изменяются значения  $\varepsilon_{\sigma(\tau)}$  с повышением  $\sigma_b$  материала?



46. Что определяет формула

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma}\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m}?$$

47. Что и по какой гипотезе прочности определяет формула

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_{\sigma}^2} + \frac{1}{n_{\tau}^2}?$$

48. Как изменяется коэффициент  $\varepsilon_{\sigma(\tau)}$  и предел выносливости детали с повышением временного сопротивления материала  $\sigma_B$ ?
49. При малоцикловом усталостном разрушении образца происходит ли накопление макроскопической пластической деформации?
50. С какой целью производят изменения в конструкции по выравниванию или сглаживанию деформационных свойств сопрягаемых деталей?
51. Какими средствами снижают коэффициент концентрации напряжений?
52. Какое базовое число циклов принимают при циклической нагрузке для пластичных материалов, какое — для хрупких материалов?
53. Какие факторы влияют на величину предела выносливости?

## РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

### 18.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Работа подшипников, зубчатых передач, колес на рельсах сопровождается надавливанием друг на друга двух соприкасающихся жестких, но не абсолютно жестких тел (рис. 18.1*а*). Происходит их взаимная деформация и образуется малая площадка контакта. Деформации и напряжения на малой площадке вследствие контакта надавливающих друг на друга тел называют **контактными**. Площадку контакта называют **поверхностью давления**, а ее контур — **контуром давления**. В общем случае силового контакта двух тел площадка контакта имеет форму эллипса (рис. 18.1*б*). Материал на поверхности давления и в непосредственной близости к ней не имеет возможности свободно деформироваться и потому испытывает объемное напряженное состояние всестороннего сжатия (рис. 18.1*в*).

Вследствие высокой жесткости контактирующих деталей размеры поверхности давления остаются весьма

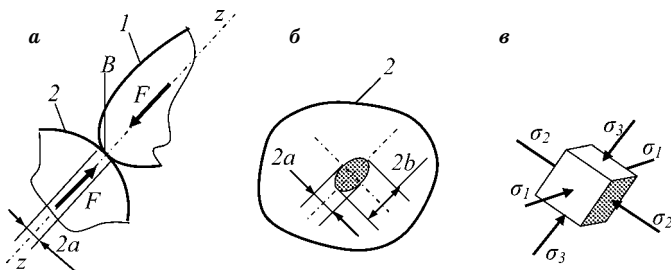


Рис. 18.1

Надавливание двух тел друг на друга с образованием площадки контакта и трехосного напряженного состояния

малыми, что приводит к появлению весьма значительных величин контактных напряжений. В наиболее напряженной точке площадки материал испытывает напряженное состояние, близкое к равностороннему сжатию. Поэтому в зоне контакта материал выдерживает без появления пластических деформаций значительно большие напряжения, нежели его предел текучести. Напряжения имеют местный характер, резко убывают по мере удаления от центра площадки давления и могут быть приняты равными нулю за ее пределами. Аналитическое решение этой задачи выходит за рамки раздела «Сопrotивление материалов». Оно относится к дисциплине «Теория упругости» [1, 10] и дальнейшие формулы будут даны без вывода.

## 18.2. ФОРМУЛЫ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В общем случае контактирующих тел контур давления, как показал Герц, представляет собой эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  (рис. 18.1б). В центре поверхности давления возникает наибольшее по абсолютной величине напряжение сжатия. Оно определяется по формуле Герца

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{F}{\pi \cdot a \cdot b} = 0,478 \frac{F}{a \cdot b}, \quad (18.1)$$

где  $F$  — усилие, с которым тела надавливают друг на друга, величины полуосей  $2a$  и  $2b$  зависят от радиусов кривизны в точке контакта контактирующих тел, их модулей упругости  $E_1$ ,  $E_2$  и коэффициентов Пуассона  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ . При этом приняты следующие допущения:

- нагрузки создают в зоне контакта только упругие деформации;
- площадка контакта (поверхность давления) мала по сравнению с поверхностями контактирующих тел;
- силы давления, распределенные по поверхности давления, нормальны к этим поверхностям.

Наиболее опасная точка расположена на оси  $y$ , проведенной из центра поверхности контакта по нормали к ней, на глубине, зависящей от соотношения  $b/a$ . Наибольшее касательное напряжение в опасной точке почти



не зависит от соотношения полуосей и может быть принято равным

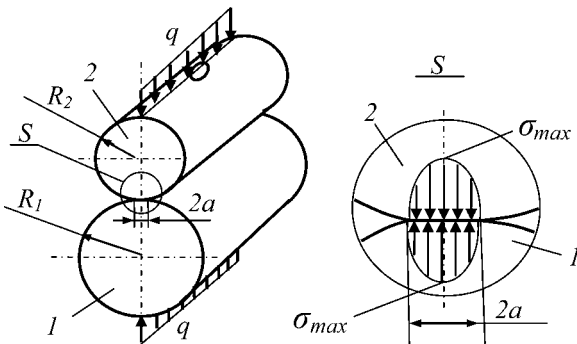
$$\tau_{\max} \approx 0,32\sigma_{\max}. \quad (18.2)$$

Необходимо иметь в виду то, что размеры  $a$  и  $b$  связаны с нагрузкой нелинейными функциями. Поэтому и контактные напряжения по (18.1) и (18.2) являются нелинейными функциями нагрузки, увеличиваясь с ее ростом все медленнее.

Важными случаями расчета контактных напряжений являются задачи контактирования шара с плоскостью и цилиндра с цилиндром (в подшипниках качения, кулачковых механизмах, в зубчатых передачах). Для упрощения конечных формул примем в задачах  $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0,3$  (стальные тела).

Рассмотрим пример нажатия деталей с цилиндрическими поверхностями друг на друга. Их силовое взаимодействие показано на рис. 18.2. Данная задача характерна для зубчатых передач с цилиндрической поверхностью зубьев.

Обозначим радиусы цилиндрических поверхностей зубьев в точке контакта как  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 18.2). При взаимном нажатии двух цилиндров и равномерно распределенной по длине их контакта погонной нагрузке  $q$  (Н/м) поверхность давления имеет вид узкого прямоугольника



**Рис. 18.2**  
Нажатие деталей  
с цилиндрическими поверхностями друг на друга

шириной (2a). Наибольшее напряжение сжатия, действующее по продольной оси симметрии z площадки контакта, равно

$$\sigma_{\max} = \sqrt{q \frac{E_{\text{пр}}}{\rho_{\text{пр}}} \frac{1}{2\pi(1-\mu^2)}}, \quad (18.3)$$

где приведенные модуль упругости  $E_{\text{пр}}$  и радиус кривизны  $\rho_{\text{пр}}$  определяют из выражений

$$\frac{1}{E_{\text{пр}}} = \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho_{\text{пр}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (18.4)$$

После подстановки (18.4) в (18.3) получаем с учетом  $\mu = 0,3$

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \quad (18.5)$$

Наиболее опасной является точка, расположенная по вертикальной оси симметрии на глубине, примерно равной 0,4 ширины поверхности давления. Главные напряжения в этой точке:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -0,180\sigma_{\max}; \\ \sigma_2 &= -0,288\sigma_{\max}; \\ \sigma_3 &= -0,780\sigma_{\max}. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Изменяя в (18.5) знак при  $R_2$  на обратный, получим напряжения для случая давления цилиндра на деталь с вогнутой цилиндрической поверхностью. Данная задача характерна для роликового подшипника. Естественно, в этом случае радиусы кривизны наружного или внутреннего колец подшипника в зоне контакта больше радиуса ролика. Поэтому знак расчетной величины под корнем останется положительным.

### 18.3. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ПРИ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

С учетом объемного напряженного состояния проверку прочности ведем для опасной точки по третьей гипотезе прочности

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_K, \quad (18.7)$$



Для случая нажатия деталей с цилиндрическими поверхностями друг на друга получаем после подстановки значений главных напряжений (18.6) в (18.7)

$$\sigma_{\text{экр}} = 0,60\sigma_{\text{max}} = 0,251\sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} \leq [\sigma]_{\text{к}}. \quad (18.8)$$

На основании формул (18.7) и (18.8) заключаем: прочность контактирующих тел является нелинейной функцией нагрузки, упругих свойств материалов, радиусов кривизны тел.

Допускаемые контактные напряжения определяются по базовому пределу контактной выносливости  $\sigma_K$ , деленному на коэффициент запаса прочности по контактным напряжениям  $n_K$ :

$$[\sigma]_{\text{к}} = \frac{\sigma_K}{n_K}. \quad (18.9)$$

Величина базового предела контактной выносливости зависит от базового числа циклов, а оно определяется по твердости контактирующих рабочих поверхностей. Коэффициентом запаса прочности по контактным напряжениям устанавливается безопасность и долговечность контактирующей пары деталей.

#### 18.4. О МЕХАНИЗМЕ УСТАЛОСТНОГО ВЫКРАШИВАНИЯ ОТ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Распространенным видом контактных напряжений являются циклические напряжения в зубчатых передачах. Передача работает длительное время до появления усталости в поверхностных слоях зубьев: циклические контактные напряжения приводят к усталостному выкрашиванию зубьев (рис. 18.3а). Оно возникает в условиях хорошей смазки и отсутствия загрязнений и состоит в том, что примерно в средней части зуба по всей его ширине начинают появляться небольшие раковинки.

Механизм усталостного выкрашивания связан со скольжением и перекачиванием пары зубьев 1 и 2 друг по другу в условиях высоких контактных напряжений. За счет

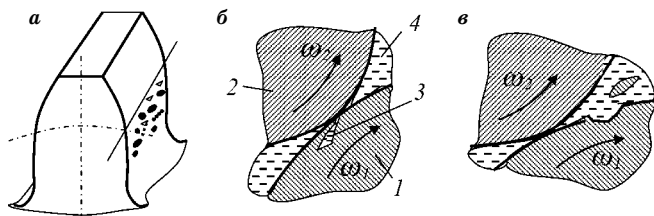


Рис. 18.3

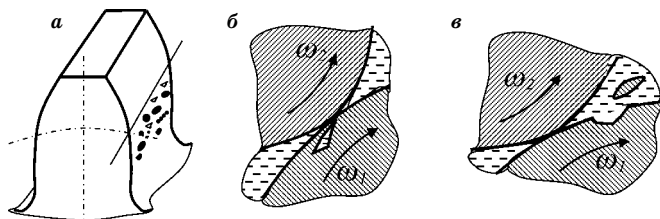
Механизм усталостного выкрашивания в условиях смазки

скольжения пар возникающая микротрещина 3 растет вдоль приповерхностной зоны (рис. 18.3б). Тонкая стенка трещины испытывает переменные и неравномерные деформации. Попавшее в нее масло 4 создает в тупиковой части трещины значительные напряжения, приводящие к ее росту и затем отрыву части поверхностного слоя металла (рис. 18.3в). Выкрашивание отсутствует, если контактные напряжения не превышают допускаемых по контактной выносливости. При высокой твердости зубьев выкрашивание замещается хрупким разрушением, износ также поглощает выкрашивание. Точность изготовления, установки и эксплуатации контактирующих деталей, термическая или химико-термическая обработка зубьев, переменный характер работы всего устройства повышают сопротивляемость материалов поверхностному выкрашиванию.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ»

1. Что образуется в зоне контакта при надавливании друг на друга жестких деформируемых тел?
2. Как называются деформации и напряжения, действующие на малой площадке надавливающих друг на друга жестких деформируемых тел?
3. Какую форму имеет площадка контакта в общем случае силового контакта двух жестких деформируемых тел?
4. Почему контактные напряжения весьма высоки?
5. В каком месте контакта возникают наибольшие контактные напряжения?
6. Чему равны контактные напряжения за пределами площадки контакта?

7. Какой вид напряженного состояния испытывает материал в наиболее напряженной точке контакта жестких деформируемых тел?
8. Что означает понятие базового предела контактной выносливости  $\sigma_{\text{к}}$ ?
9. Почему в зубчатых передачах циклические контактные напряжения в условиях смазки приводят к усталостному выкрашиванию зубьев?
10. Что представляет собой явление, показанное на рисунке?



11. Почему при плохой смазке и интенсивном скольжении выкрашивание поглощается износом?



---

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**У**важаемый читатель! Вы завершили изучение материала, который традиционно считают трудным. Это мнение не в последнюю очередь основывается на традиционном утверждении: «Сдал сопромат — можешь жениться». На самом деле оно отражает не эмоциональную, а прагматичную сторону вопроса: в далекие царские времена студентам третьего курса после сдачи экзамена по сопротивлению материалов официально разрешалось приступать к самостоятельной инженерной работе, что приносило деньги, дававшие возможность содержать семью и потому — жениться. Теперь вам судить о степени трудности изложенного материала.

Надеюсь, что возникавшие трудности были преодолены. Во всяком случае автор стремился сделать материал доступным для самостоятельного изучения. Поэтому при выводе формул нет пропусков в основных промежуточных выкладках, рисунки сделаны подробными, равноценными самому тексту. Многие примеры даны в виде сопоставительных расчетов, вследствие чего их решения получились довольно длинными. Однако сопоставительные примеры следует воспринимать как объединенные решения нескольких отдельных задач. Решение каждой такой задачи в отдельности, например с единственным поперечным сечением, достаточно краткое. Зато решения сопоставительных вариантов помогают сформировать у обучающегося понимание путей достижения рациональных решений.

Автор надеется на то, что материал действительно оказался доступен для самостоятельного изучения и потому будет востребованным. Хочется верить, что в итоге обучения у вас не будут проскакивать такие «ляпы» в ответ на поставленные вопросы, как, например, «закон Бука» или «гипотенуза Бернулли».

Автор был бы признателен за сообщения о замеченных недостатках пособия и пожеланиях, которые следует направлять по e-mail: [z-v-gr@mail.ru](mailto:z-v-gr@mail.ru).





# ПРИЛОЖЕНИЕ

## ТАБЛИЦЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СТАЛЬНЫХ ПРОКАТНЫХ ПРОФИЛЕЙ

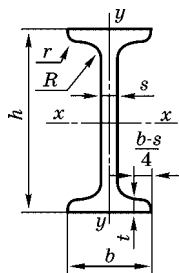


Таблица III

Двутавр (по ГОСТ 8239)\*

Номер двутавра	Размеры, мм						Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей						
	h	b	s	t	r	R		x-x			y-y			
								I <sub>x</sub> поперечного, см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79

\* Обозначения: *h* — высота двутавра; *b* — ширина полки; *s* — толщина стенки; *t* — средняя толщина полки; *R* — радиус внутреннего закругления; *r* — радиус закругления полки.



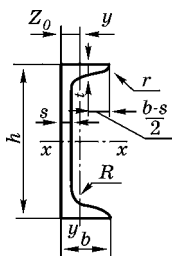


Таблица П2

Швеллер (по ГОСТ 8240)\*

№ швеллера	Размеры, мм						Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей							z <sub>0</sub> , см
	h	b	s	t	r	R		x-x				y-y			
								I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	
5	50	32	4,4	7,0	2,5	6,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	2,5	6,0	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	2,5	6,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	3,0	7,0	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	3,0	7,5	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	3,0	8,0	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
16	160	64	5,0	8,4	3,5	8,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
18	180	70	5,1	8,7	3,5	9,0	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
20	200	76	5,2	9,0	4,0	9,5	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
22	220	82	5,4	9,5	4,0	10,0	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10,0	4,0	10,5	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
27	270	95	6,0	10,5	4,5	11,0	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	5,0	12,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,47
33	330	105	7,0	11,7	5,0	13,0	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	6,0	14,0	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	6,0	15,0	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

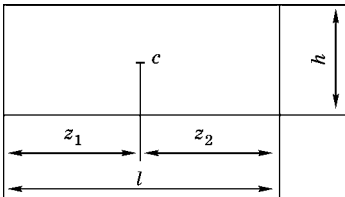
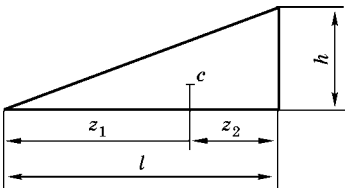
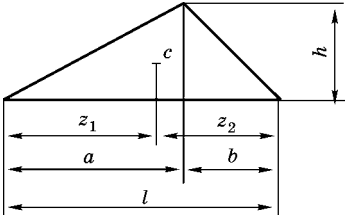
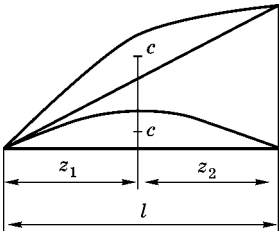
\* Обозначения: h — высота; b — ширина полки; s — толщина стенки; t — толщина полки; R — радиус внутреннего закругления; r — радиус закругления полки; z<sub>0</sub> — расстояние от оси y-y до наружной грани стенки. Уклон внутренних граней полок должен быть 4–10%.



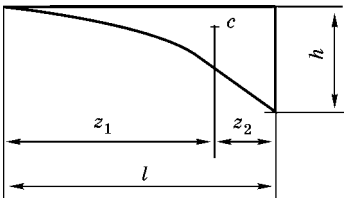
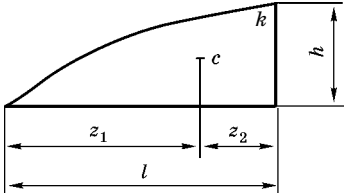
**ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ПЛОЩАДЕЙ ОСНОВНЫХ ПРОСТЫХ ФИГУР  
И КООРДИНАТ ИХ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ**

Таблица ПЗ

**Определение площадей основных простых фигур  
и координат их центров тяжести\***

Фигура	Площадь фигуры	Координаты центра тяжести фигуры	
	$\omega$	$z_1$	$z_2$
	$lh$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{1}{2}lh$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{l}{3}$
	$\frac{1}{2}lh$	$\frac{a+l}{3}$	$\frac{b+l}{3}$
	$\frac{ql^3}{12}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$

Продолжение табл. ПЗ

Фигура	Площадь фигуры	Координаты центра тяжести фигуры	
		$z_1$	$z_2$
	$\frac{1}{3}lh$	$\frac{3}{4}l$	$\frac{1}{4}l$
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{5}{8}l$	$\frac{3}{8}l$

\*  $c$  — центры тяжести фигур;  $k$  — вершина квадратичной параболы (от постоянной распределенной нагрузки  $q$ ).

---

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Феодосьев, В. И.* Сопротивление материалов : Учебник для студентов вузов. — 14-е изд.; испр. — М. : МГТУ, 2007. — 592 с.
2. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов : Учебник / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. — 6-е изд. стер. — М. : Высш. шк., 2008. — 560 с.
3. *Жуков, В. Г.* Механика. Сопротивление материалов : учеб. пособие. — М. : МГУПБ, 2007. — 136 с.
4. *Степин, П. А.* Сопротивление материалов. — 10-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2010. — 320 с.
5. *Вольмир, А. С.* Лабораторный практикум по сопротивлению материалов : учебное пособие / А. С. Вольмир, А. И. Станкевич — 2-е изд.; испр. — М. : Дрофа, 2004. — 352 с.
6. *Ицкович, Г. М.* Руководство к решению задач по сопротивлению материалов / Г. М. Ицкович, Л. С. Минин, А. И. Виокуров — М. : Высш. шк., 1999. — 592 с.
7. *Миролюбов, И. Н.* Сопротивление материалов : пособие по решению задач / И. Н. Миролюбов [и др.] — 7-е изд. испр. — СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2007. — 512 с.
8. *Тимонин, А. С.* Инженерно-экологический справочник : учеб. пособие. — Калуга : Издат. Н. Бочкаревой, 2003. — Т. 1 — 914 с.; — Т. 2 — 881 с.; — Т. 3. — 1019 с.
9. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Расчет цилиндрических и конических обечаек, выпуклых и плоских днищ и крышек. ГОСТ Р 52857.2-2007. — М. : Стандартинформ, 2008. — С. 41.
10. *Писаренко, Г. С.* Сопротивление материалов : Учебник для вузов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка — 3-е изд., испр. и доп. — Киев : Выща шк., 1973. — 671 с.





---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	5
Список обозначений .....	11

### Глава 1

#### Общие сведения о дисциплине

<b>«Соппротивление материалов» .....</b>	<b>16</b>
1.1. Дисциплина «Соппротивление материалов» .....	16
1.2. Составляющие расчетной схемы .....	18
1.3. Перемещения. Изменения размеров. Деформации .....	22
1.4. Внутренние силы упругости. Напряжения .....	24
1.5. Внутренние силовые факторы. Виды соппротивления .....	27
1.6. Метод сечений .....	31
1.7. Закон Гука .....	32
1.8. Концентрация напряжений. Концентраторы напряжений .....	33
1.9. Общие принципы в методиках расчета дисциплины «Соппротивление материалов» .....	34
1.10. Условия равновесия нагруженного тела .....	35
1.11. О расчетах сложных систем на ЭВМ .....	39

### Глава 2

<b>Напряженное состояние материала в точке .....</b>	<b>42</b>
2.1. Общие положения .....	42
2.2. Напряжения на наклонных площадках при плоском напряженном состоянии .....	45
2.3. Главные площадки и главные напряжения при плоском напряженном состоянии .....	47
2.4. Экстремальные касательные напряжения .....	49
2.5. Круговая диаграмма напряженного состояния в точке (круг Мора) .....	51
2.6. Обобщенный закон Гука. Область численных значений коэффициента Пуассона .....	53



**Глава 3**

<b>Растяжение и сжатие</b> .....	56
3.1. Построение эпюры продольных сил .....	56
3.2. Напряжения в поперечных сечениях .....	59
3.3. Напряжения на наклонных площадках .....	61
3.4. Удлинение–укорочение. Деформации. Перемещения .....	63
3.5. Диаграммы растяжения и сжатия пластичных сталей .....	65
3.6. Диаграммы растяжения и сжатия хрупких материалов .....	75
3.7. Влияние основных факторов на механические характеристики материалов .....	76
3.8. Допускаемые напряжения в расчетах на прочность .....	77
3.9. Три типа задач расчетов на прочность .....	80
3.10. Работа и энергия при растяжении–сжатии .....	82
3.11. Решение статически неопределимых задач при растяжении–сжатии .....	87

**Глава 4**

<b>Сдвиг</b> .....	95
4.1. Общие положения .....	95
4.2. Деформации и напряжения при сдвиге .....	96
4.3. Расчет на прочность при сдвиге .....	97
4.4. Расчеты соединений, работающих на сдвиг .....	99
4.4.1. Расчет на прочность заклепочных и болтовых соединений .....	99
4.4.2. Расчет на прочность сварных соединений .....	100
4.5. Удельная потенциальная энергия упругой деформации при сдвиге. Зависимость между тремя постоянными $E$ , $G$ , $\mu$ .....	102

**Глава 5**

<b>Геометрические характеристики плоских сечений</b> .....	105
5.1. Статические моменты сечений. Центр тяжести сечения .....	105
5.2. Моменты инерции сечения. Радиус инерции сечения .....	108
5.3. Вывод формул моментов инерции простых сечений .....	110
5.4. Зависимость между моментами инерции относительно осей, параллельных центральной .....	112
5.5. Моменты инерции сложных сечений .....	113
5.6. Изменение моментов инерции при изменении угла наклона осей .....	116
5.7. Главные оси инерции. Главные моменты и радиусы инерции сечения .....	117

**Глава 6**

<b>Кручение</b> .....	123
6.1. Построение эпюры крутящего момента .....	123
6.2. Деформации и напряжения при кручении .....	124
6.2.1. Экспериментальное обоснование .....	124
6.2.2. Относительный угол закручивания. Касательные напряжения в поперечном сечении .....	126
6.3. Расчет на жесткость .....	128
6.4. Расчет на прочность .....	129
6.5. Рациональный профиль поперечного сечения .....	131
6.6. Угловые перемещения .....	133
6.7. Решение статически неопределимых задач при кручении .....	136
6.8. Общие сведения о кручении прямых брусьев некруглого поперечного сечения .....	139
6.8.1. Общие положения .....	139
6.8.2. Свободное кручение стержня с прямоугольным поперечным сечением .....	140
6.8.3. Свободное кручение стержня с тонкостенным профилем поперечного сечения .....	142
6.9. Расчет цилиндрических винтовых пружин с малым шагом витка .....	149

**Глава 7****Прямой изгиб.**

<b>Расчеты на прочность</b> .....	157
7.1. Классификация видов изгиба .....	157
7.2. Дифференциальная зависимость Журавского—Шведлера между внешней нагрузкой и вызываемыми ею внутренними силовыми факторами .....	160
7.3. Правила контроля эпюр внутренних силовых факторов при изгибе .....	161
7.4. Нормальные напряжения при изгибе .....	163
7.4.1. Экспериментальное обоснование .....	163
7.4.2. Формула нормальных напряжений .....	165
7.5. Касательные напряжения при поперечном изгибе .....	169
7.6. Соотношение между $\sigma_{\max}$ и $\tau_{\max}$ в практических случаях .....	171
7.7. Условие прочности при изгибе .....	172
7.8. Рациональные формы сечений при изгибе .....	175
7.9. Рациональные конструкции при изгибе .....	176
7.9.1. Составные балки .....	176
7.9.2. Рациональное расположение сечений, асимметричных относительно нулевой линии .....	179
7.9.3. Балка переменного поперечного сечения .....	179



*Глава 8***Перемещения при изгибе. Дифференциальные и универсальные уравнения для определения углов поворота и прогибов упругой линии балки**

<b>и их интегрирование</b> . . . . .	197
8.1. Общие положения . . . . .	197
8.2. Дифференциальные уравнения для определения углов поворота и прогибов упругой линии балки и их интегрирование . . . . .	198
8.3. Граничные условия . . . . .	199
8.4. Дифференциальная связь между параметрами изгиба . . . . .	200
8.5. Универсальное уравнение для определения углов поворота оси балки . . . . .	203
8.6. Универсальное уравнение для определения прогибов оси балки . . . . .	206

*Глава 9***Определение перемещений методом Мора** . . . . . 215

9.1. Общие положения . . . . .	215
9.2. Работа внешних сил. Виртуальная работа . . . . .	216
9.3. Накопленная потенциальная энергия упругой деформации от виртуальной работы . . . . .	220
9.4. Метод Мора . . . . .	223
9.5. Формула (правило) Верещагина . . . . .	226

*Глава 10***Расчет статически неопределимых систем при изгибе** . . . . . 236

10.1. Общие положения . . . . .	236
10.2. Грузовые и единичные перемещения . . . . .	238
10.3. Основная система. Эквивалентная система . . . . .	240
10.4. Раскрытие статической неопределимости методом сил. Канонические уравнения метода сил . . . . .	241
10.5. Последовательность решения задач при раскрытии статической неопределимости методом сил . . . . .	244
10.6. Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости . . . . .	245

*Глава 11***Сложные виды сопротивления**

<b>одноосного напряженного состояния</b> . . . . .	260
11.1. Общие положения . . . . .	260
11.2. Балка при косом изгибе . . . . .	261
11.2.1. Напряжения и нулевая линия . . . . .	262
11.2.2. Расчеты на прочность при косом изгибе . . . . .	264
11.3. Пространственный изгиб балки . . . . .	271
11.4. Совместное действие изгиба и растяжения–сжатия . . . . .	273
11.5. Внецентренное растяжение–сжатие . . . . .	274

*Глава 12*

<b>Гипотезы прочности и пластичности</b> . . . . .	281
12.1. Назначение гипотез . . . . .	281
12.2. Первая гипотеза прочности . . . . .	284
12.3. Вторая гипотеза прочности . . . . .	285
12.4. Третья гипотеза прочности . . . . .	286
12.5. Четвертая гипотеза прочности . . . . .	287
12.6. Пятая гипотеза прочности . . . . .	289
12.7. О механике хрупкого разрушения тел при наличии трещин . . . . .	290

*Глава 13*

<b>Расчеты на прочность при двухосном напряженном состоянии</b> . . . . .	296
13.1. Расчет на прочность при совместном действии изгиба и кручения . . . . .	296
13.2. Поверочные расчеты (определение коэффициента запаса прочности) . . . . .	302
13.3. Расчет на прочность тонкостенных сосудов . . . . .	304

*Глава 14*

<b>Расчеты на устойчивость</b> . . . . .	313
14.1. Общие положения . . . . .	313
14.2. Формула Эйлера . . . . .	316
14.3. Учет влияния способа крепления стержня на величину $F_{кр}$ в формуле Эйлера . . . . .	318
14.4. Пределы применимости формулы Эйлера . . . . .	319
14.5. Формула Ясинского . . . . .	321
14.6. Практическая формула . . . . .	329
14.7. Общие сведения о расчетах труб и оболочек, работающих в условиях наружного давления . . . . .	332

*Глава 15*

<b>Динамическая нагрузка</b> . . . . .	335
15.1. Общие положения . . . . .	335
15.2. Динамические нагрузки в равноускоренном движении . . . . .	336
15.3. Продольный удар . . . . .	337
15.4. Поперечный удар . . . . .	342

*Глава 16*

<b>Механические колебания упругих систем</b> . . . . .	344
16.1. Общие положения . . . . .	344
16.2. Свободные гармонические колебания системы с одной степенью свободы . . . . .	346
16.3. Вынужденные колебания. Резонанс . . . . .	349
16.4. Критическая скорость вращения вала . . . . .	354



*Глава 17*

<b>Циклическое действие нагрузок</b> . . . . .	361
17.1. Общие положения . . . . .	361
17.2. Кривая усталости Велера. Предел выносливости образца . . . . .	366
17.3. Диаграмма предельных амплитуд (диаграмма Хэя) . .	369
17.4. Предел выносливости детали . . . . .	372
17.4.1. Влияние концентраторов напряжений в детали . . . . .	373
17.4.2. Влияние размера детали (масштабный фактор) . . . . .	375
17.4.3. Влияние качества поверхности детали . . . . .	376
17.5. Коэффициенты запаса прочности при несимметричном цикле нагружения. Общий коэффициент запаса . . . . .	377
17.6. Понятие о малоцикловой усталости . . . . .	384
17.7. Повышение выносливости конструктивными и технологическими приемами . . . . .	388

*Глава 18*

<b>Расчет на прочность при контактных напряжениях</b> . . . . .	394
18.1. Общие положения . . . . .	394
18.2. Формулы контактных напряжений . . . . .	395
18.3. Проверка прочности при контактных напряжениях . . . . .	397
18.4. О механизме усталостного выкрашивания от контактных напряжений . . . . .	398

<b>Заключение</b> . . . . .	401
-----------------------------	-----

<b>Приложение</b> . . . . .	403
Таблицы геометрических параметров стальных прокатных профилей . . . . .	404
Формулы для определения площадей основных простых фигур и координат их центров тяжести . . . . .	406
<b>Библиографический список</b> . . . . .	408

*Валерий Григорьевич ЖУКОВ*  
**МЕХАНИКА**  
**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
*Учебное пособие*

Зав. редакцией  
инженерно-технической литературы *Е. Л. Дубова*  
Ответственный редактор *Е. А. Мармылева*  
Художественный редактор *С. Ю. Малахов*  
Редактор *А. С. Мишин*  
Корректоры *В. О. Логунова, Т. А. Кошелева*  
Выпускающие *И. Е. Вильман, Е. П. Королькова*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10  
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**

192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.  
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 23.03.12.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108<sup>1/32</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 21,84. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленных диапозитивов  
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».  
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.

