

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт машиноведение им. А.А.Благонравова РАН (ИМАШ РАН).

На правах рукописи  
УДК 621.833

НАХАТАКЯН Филарет Гургенович

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГИХ  
ЭЛЕМЕНТОВ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ И СООРУЖЕНИЙ ПРИ ИХ  
ЛИНЕЙНОМ И КРОМОЧНОМ КОНТАКТЕ

Специальность:

01.02.06 - Динамика, прочность машин и аппаратуры

Диссертация  
на соискание ученой степени  
доктора технических наук

Научный консультант :  
доктор технических наук

Косарев О.И. (ИМАШ РАН)

Москва 2014 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ .....	6.
1.1. Общая характеристика работы .....	6.
1.2. Анализ методов расчета нагруженности и прочности податливых элементов зубчатых передач .....	18.
1.3. Цели и задачи исследования .....	29.
РАЗДЕЛ I	
МОДЕЛИ СИЛОВОГО КОНТАКТА УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ ИХ ЛИНЕЙНОМ И КРОМОЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ .....	31.
2. КОНТАКТНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ НАЧАЛЬНОМ КАСАНИИ ПО ОБРАЗУЮЩЕЙ.....	31.
2.1. Модель линейного контакта круговых цилиндров бесконечной длины для определения контактной деформации .....	31.
2.2. Уточнение формулы Б.С. Ковальского по определению контактной деформации круговых цилиндров .....	42.
2.3. Уточнение формулы Н.М. Беляева по определению контактной деформации круговых цилиндров .....	45.
2.4. Выводы по второй главе .....	51.
3. УЧЕТ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПО ЛИНИИ .....	53.
3.1. Модель контакта упругих тел конечных размеров, находящихся в силовом воздействии до деформации по линии .....	53.
3.2. Суммарная контактная деформация двух упругих тел конечных размеров при начальном касании по линии .....	56.
3.3. Выводы по третьей главе .....	61.
4. КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ (ЦИЛИНДР С ПЛОСКОСТЬЮ) В УСЛОВИЯХ ПЕРЕКОСА.....	63.
4.1. Модель контакта цилиндров при перекосе .....	63.

4.2. Контактные напряжения, деформации и размеры площадки контакта цилиндров при перекосе .....	65.
4.3. Выводы по четвертой главе .....	73.
5. ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПО ДЛИНЕ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС В УСЛОВИЯХ ПЕРЕКОСА С УЧЕТОМ ИХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ .....	75.
5.1. Дискретно- континуальная модель зуба зубчатых колес .....	75.
5.1.1. Решение задачи об изгибе балки конечной длины на упругом основании. Определение функции Грина для этой балки .....	78.
5.2. Определение деформативной составляющей угла перекоса .....	89.
5.3. Концентрация изгибных напряжений в основании зубьев зубчатых колес при перекосе .....	98.
5.4. Выводы по пятой главе .....	102.
6. ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ НА ИХ КОНТАКТНУЮ ПОДАТЛИВОСТЬ И КОНЦЕНТРАЦИЮ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КРАЕВОЙ ЗОНЕ (КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ) .....	104.
6.1. Расчетная модель контакта цилиндров различных длин с параллельными осями .....	104.
6.2. Концентрация контактных напряжений и деформаций на концах короткого цилиндра .....	109.
6.3. Выводы по шестой главе .....	113.
РАЗДЕЛ II	
ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРАБОТАННЫХ ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, МЕТОДОВ И ПОДХОДОВ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ МАШИНОВЕДЕНИЯ .....	114.
7. КОНТАКТНЫЕ И ИЗГИБНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ В ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧАХ .....	114.
7.1. Теоретическое определение контактной податливости зубчатых зацеплений в отсутствии перекоса.....	114.
7.2. Контактные деформации зубчатых зацеплений при перекосе .....	116.

7.3. Контактные напряжения зубчатых зацеплений при перекосе .....	117.
7.4. Расчетные изгибные напряжения в основании зубьев зубчатых колес при перекосе .....	117.
7.5. Выводы по седьмой главе .....	118.
8. ПОДАТЛИВОСТЬ СИСТЕМЫ ПЛИТА- РОЛИК, (МОСТОВЫЕ ОПОРЫ) .....	119.
8.1. Податливость ролика, при сжатии его двумя плитами из одинаковых материалов .....	119.
8.2. Выводы по восьмой главе .....	123.
9. ПОДАТЛИВОСТЬ РОЛИКОВЫХ ПОДШИПНИКОВ .....	125.
9.1. Теоретическое определение контактной податливости роликовых подшипников в отсутствии перекоса.....	125.
9.2. Контактные деформации и напряжения в роликовых подшипниках при перекосе .....	130.
9.3 Выводы по девятой главе .....	131.
10. ХАРАКТЕРИСТИКИ НАГРУЖЕННОСТИ МНОГОПАРНЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ ЗАЦЕПЛЕНИЕМ И ЗУБЧАТЫХ СОЕДИНЕНИЙ (МУФТ) ЗУБЧАТЫЕ МУФТЫ .....	132.
10.1. Расчетная модель нагружения многопарных зубчатых зацеплений	132.
10.1.1. Метод расчета статической нагруженности многопарных передач зацеплением .....	132.
10.2. Нагруженность зубчатых соединений (муфт) .....	147.
10.2.1. Распределение нагрузки на зубьях муфт .....	147.
10.2.2. Контактные и изгибные напряжения на зубьях муфт .....	153.
10.2.3. Изгибные напряжения в ободьях муфт .....	155.
10.3. Выводы по десятой главе .....	158.
РАЗДЕЛ III	
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И СОПОСТАВЛЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ .....	159.

11. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНТАКТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГИХ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ПРИ ИХ ЛИНЕЙНОМ И КРОМОЧНОМ КОНТАКТЕ .....	159.
11.1. Экспериментальные исследования контактных деформаций цилиндрических, конических и бочкообразных роликов, имитирующих контакт зубьев зубчатых колес и муфт и роликовых подшипников .....	159.
11.1.1. Цели и задачи исследования .....	159.
11.1.2. Методы и средства исследования .....	160.
11.2. Результаты экспериментальных исследований .....	167.
12. СОПОСТАВЛЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ .....	171.
12.1. Выводы по двенадцатой главе .....	171.
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	186.
ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ .....	190.
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	192.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

### 1.1. Общая характеристика работы

Зубчатые передачи имеют ряд неоспоримых достоинств (большая долговечность и высокая надежность; высокий КПД; постоянство передаточного отношения; возможность применения в широком диапазоне моментов, скоростей и передаточных отношений; малые габариты; простота эксплуатации и т.д.) по сравнению с другими механическими передачами, что способствовало их широкому применению в разнообразных машинах и механизмах в ряде отраслей промышленности, начиная от авиации, судостроения и кончая общемашиностроительными отраслями, осуществляя передачу вращения от источника движения к исполнительному органу. Нередко от работоспособности зубчатых передач, их нагрузочной способности зависит долговечность всего агрегата, поэтому совершенствование методов расчета нагруженности и прочности податливых элементов зубчатых механизмов является актуальной проблемой современного машиностроения.

Определение нагруженности зубчатых механизмов является комплексной задачей, требующей для своего решения изучения деформации податливых элементов передачи, учета их погрешностей изготовления и монтажа, раскрытия статической неопределимости системы, содержащей зубчатую передачу, т.е. расчета характера распределения нагрузки по длине контактных линий и между зубьями, определения уровня напряжений в податливых элементах передачи с учетом реальных условий работы деталей и узлов зубчатых механизмов.

Необходимость учета конечных размеров элементов передачи вызвана тем, что и контактная линия на зубьях зубчатых колес, и сами зубья имеют конечные размеры. И точное решение задачи о нагруженности зубчатых зацеплений может быть получено только на базе пространственной теории упругости.

Многочисленные исследования, в том числе и фундаментальные, отечественных и зарубежных ученых [1, 3, 5, 6, 8, 10, 16 17, 54, 62, 63, 68, 74, 77, 80, 108, 114, 120, 122, 134, 157, 161, 166, 167, 171, 176, 194, 195, 207, 216, 227, 231, 240, 247] позволили в значительной мере продвинуть теорию зубчатых передач зацеплением, в которых, по существу, разработаны основы строительной механики зубчатых механизмов, включая их точность, жесткость, статику и динамику. При этом их расчет нагруженности и прочности в значительной мере основывается на отечественном стандарте.

Несмотря на длительную историю исследований и значительные успехи в области расчета и проектирования зубчатых передач, остаются некоторые **проблемы**, нуждающиеся в дальнейшей разработке и развитии. В частности, до сих пор остаются слабо развитыми аналитические методы расчета нагруженности таких узлов и элементов зубчатых механизмов, как зубчатое зацепление, роликовые подшипники, зубчатые соединения (муфты) и т.д.

Совершенствование конструкций зубчатых механизмов, уменьшение их веса и габаритов приводит к тому, что упругие деформации их элементов оказывают существенное влияние на нагруженность зубчатых передач и их долговечность. Это влияние сказывается в том, что упругие деформации наряду с погрешностями изготовления и монтажа элементов передачи нарушают симметрию нагружения зубьев колес, приводят к неравномерному погружению зубьев, к концентрации нагрузки по длине контактных линий и концентрации изгибных напряжений в основании зубьев. Все это вызывает значительное расхождение величин нагрузок и напряжений в элементах идеальных (т.е. точных и жестких) и реальных (т.е. неточных и деформируемых) зубчатых механизмов.

Основная проблема при расчете нагруженности и прочности передач зацеплением заключается в корректном определении

контактных и изгибных напряжений и деформаций на зубьях зубчатых колес в условиях перекоса.

В существующих методах [164, 219] расчетах на прочность зубчатых зацеплений, отклонение условий работы реальных передач от идеальных оценивается коэффициентом нагрузки, равным произведению ряда коэффициентов, учитывающих реальные условия нагружения передачи, на этот коэффициент умножается номинальная нагрузка в зацеплении. Такой подход, вызывает возражение в связи с условностью учета реальных условий работы передачи при определении, по существу, фиктивной расчетной удельной нагрузки в зацеплении. Вообще понятие “удельная нагрузка” теряет физический смысл в условиях начального неприлегания боковых поверхностей зубьев вызванного перекосом, когда начальный контакт происходит в точке. Она также теряет смысл в зубчатых зацеплениях с продольной модификацией, когда нагрузка локализуется в пределах незначительной площадки контакта. Поэтому представляется целесообразным отказ от условной удельной нагрузки и переход к реальным контактным давлениям для определения непосредственно контактных и изгибных напряжений на зубьях.

Изгибная деформация зубьев существенно влияет на параметры [8, 16, 120] контакта зубьев (размеры площадки контакта, уровень контактных давлений), причем это влияние различно: при локализации нагрузки на торце или в среднем сечении зубчатого венца. Так, уровень контактных напряжений на зубьях колес зависит не только от погрешностей изготовления и монтажа и деформации элементов передачи, но и от податливости собственно зубьев колес. Например, неравномерная по длине зубьев их изгибная деформация частично компенсирует перекос между зубьями. Из-за отсутствия аналитических зависимостей это явление в существующих расчетах учитывается приближенно. Поэтому представляется актуальным дальнейшее



развитие исследований по учету изгибной деформации зубьев при перекосе для определения не только концентрации изгибных напряжений, но и параметров контакта.

При расчете зубчатых передач приходится считаться [8, 208, 209, 227] с необходимостью учета конечных размеров элементов передачи: контактная линия на зубьях колес имеет конечные размеры, сами зубья также имеют конечные размеры. В связи с особенностью контакта цилиндрических тел конечных размеров, возникает концентрация напряжений на краях у таких тел, которые не удастся описать в рамках теории Герца, несмотря на то, что контактные напряжения, действующие вдоль большей части длины цилиндра, рассчитываются по теории Герца с хорошей точностью. Стремление учесть конечные размеры элементов передачи при разработке инженерных методов расчета нагруженности зубчатых передач, приводит к необходимости изыскивать приближенные подходы к решению задачи. Стремление соблюсти принцип равной точности расчета задач нагруженности зубчатых передач, вызывает необходимость учета конечных размеров не только контактной линии (при расчете контактных перемещений и напряжений), но и зубьев колес (при расчете изгибных перемещений и напряжений).

Известно, что одним из ответственных узлов планетарных зубчатых передач, лимитирующим срок их безаварийной работы, являются [9, 10, 11, 14, 15] также зубчатые соединения (муфты). Характерным условием работы зубчатых соединений с прямо- и криволинейной формой образующей зубьев являются погрешности взаимного расположения осей соединяемых валов- смещение и перекос, которые нарушают идеальные условия контактирования зубьев и приводят к перегрузке контактирующих поверхностей.

Многолетний опыт эксплуатации зубчатых муфт показывает, что основная причина выхода из строя (80-85 %) зубчатых муфт –

контактные разрушения, происходящие на зубьях и шлицах и приводящие к необходимости заменять всю муфту. Следовательно, в зубчатых муфтах при их стандартном исполнении нарушается принцип равнопрочности, так как наиболее слабый элемент муфты (зубья, шлицы) выходит из строя раньше, чем другие ее элементы (валы, втулки, обоймы), и поэтому он лимитирует срок службы всего узла в целом, также нерационально используется материал.

В таких условиях актуальным является совершенствование существующих методов и разработка новых подходов расчетов нагруженности элементов муфты для обеспечения принципа равнопрочности по контактными напряжениям на зубьях и изгибными напряжениям в других элементах муфт. Например, повышая изгибную податливость элементов муфт (в частности обода), удастся повлиять на снижение уровня контактных напряжений на поверхностях зубьев, что в результате приведет к обеспечению принципа равнопрочности, повышению долговечности муфты в целом и к более рациональному использованию материала.

Реальная многопарная передача зацеплением, вследствие того, что элементы имеют ограниченную точность и конечную жесткость, является статически неопределимой системой. Кроме нее, такой системой являются также, например, многосателлитные планетарные механизмы, волновые передачи, опоры качения с шарико- и роликоподшипниками при наличии зазоров-натягов в опоре и перекосе между кольцами подшипника и т.д. Необходимо отметить, что все эти системы являются статически неопределимыми системами с односторонними упругими связями. В строительной механике специально рассматриваются класс таких упругих систем и разрабатываются итерационные методы раскрытия их статической неопределимости [70]. Однако эти методы неоправданно сложны. Даже реализованные на ЭВМ, так как приходится рассчитывать систему

уравнений высокого порядка, а также дополнительную реализацию итерационного процесса для учета нелинейных свойств опор качения и т.д. Поэтому для упрощения решения задачи необходим поиск других подходов.

Известно, что в роторных системах с опорами качения иногда возникают интенсивные колебания на частоте мелькания тел качения. Связано это с изменением жесткости опоры качения в двух характерных положениях тел качения - когда внешняя сила проходит по их центру, и когда между ними. Поэтому деформация опор является важным фактором, определяющим нагруженность передач зацеплением. Известно, что податливость (жесткость) подшипников складывается из упругих сближений тел качения и колец. В случае шариковых подшипников параметры контакта определяются по формулам Герца [118], а для роликовых подшипников существует проблема определения суммарной деформаций в контакте ролик-кольцо, из-за отсутствия соответствующих расчетных зависимостей. Кроме того, отсутствуют расчетные методы для определения жесткости роликовых подшипников, как в отсутствии перекоса, так и при его наличии. До сих пор нет аналитических формул для определения контактных напряжений в роликовых подшипниках при перекосе. Отсутствуют также аналитических формул для корректного учета конечных размеров тел качения роликовых подшипников в контакте ролик – кольцо. Большинство указанных параметров в существующих методах из-за отсутствия аналитических методов определяются экспериментально, что может быть достоверно только в конкретном диапазоне варьирования входных параметров.

Важным конструктивным параметром, определяющим деформацию опор, является зазор-натяг и перекося между кольцами подшипника. Известные решения этой практически важной задачи [43] не были доведены до простых расчетных зависимостей, поэтому важным этапом

в исследовании деформации опор с шарико- и роликоподшипниками послужили работы [7, 31], в которых сделаны попытки получить приближенные (нелинейные) зависимости для расчетной оценки статической характеристики опоры качения (связь между нагрузкой и взаимным смещением колец подшипника) с шарико- и роликоподшипниками при наличии зазоров-натягов и перекоса между кольцами подшипника. В существующих методиках, величину преднатяга из-за отсутствия аналитических зависимостей определяют приближенно, экспериментальными способами. Однако эмпирические методы могут дать достоверную точность при конкретном диапазоне изменения входных параметров. Поэтому для решения указанных проблем необходим поиск аналитических методов определения контактных напряжений и деформаций в роликовых подшипниках при перекосе с учетом их конечных размеров.

Настоящая работа посвящена решению названных выше проблемных вопросов, чем определяется ее **актуальность**.

**Общая методика исследования** основывалась на общих методах теории механизмов и машин, теории упругости и строительной механики и выполнены в рамках общепринятых допущений и заключалась в теоретическом решении рассматриваемых вопросов с последующей экспериментальной проверкой.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается удовлетворительным соответствием полученных результатов теоретических исследований с экспериментальными данными, при этом использовались как результаты специально поставленных автором экспериментов, так и проведенных другими авторами. Также использовались имеющиеся в литературе данные МКЭ.

**Научная новизна** работы заключается в:

1. Разработке метода определения контактной деформации круговых цилиндров бесконечной длины с начальным прилеганием по линии, что

позволило дать теоретическое обоснование применения теории Герца при определении контактной деформации двух цилиндров, а также оценить погрешность формул Б.С.Ковальского и Н.М.Беляева по сравнению с точным решением;

2. Расчетном определении суммарной контактной деформации двух упругих тел, при силовом взаимодействии до деформации по линии, с учетом их конечных размеров;

3. Решении задачи о контакте двух цилиндров (также цилиндр- плоскость) конечных размеров в условиях перекоса;

4. Разработке физико- математической модели изгибной деформации по длине зубьев конечной длины и на ее основе разработке аналитического метода определения коэффициента концентрации изгибных напряжений в зубьях муфт и зубчатых колес в условиях перекоса с учетом их конечных размеров;

5. Разработке аналитического метода определения коэффициента концентрации контактных напряжений и деформаций цилиндрических тел конечных размеров неодинаковых длин, при контакте по образующей (краевой эффект);

6. Расчетном определении контактной податливости зубьев зубчатых колес в отсутствии перекоса и при его наличии;

7. Теоретическом определении контактной податливости в роликовых подшипниках в отсутствии перекоса и при его наличии;

8. Расчетном определении контактных напряжений зубьев зубчатых колес и роликовых подшипников при перекосе;

9. Развитии метода расчетной оценки нагруженности зубчатых соединений (муфт) при различной форме боковых поверхностей зубьев с учетом податливости обода при перекосе;

10. Экспериментальном определении методом голографической интерферометрии контактной деформации роликов при различной геометрии образующей.

**На защиту выносятся научные положения:**

1. Результаты теоретических методов исследования контактной деформации бесконечных круговых цилиндров при контакте по линии.
2. Результаты теоретических исследований контактных деформаций и напряжений круговых цилиндров конечных размеров при их контактном взаимодействии в условиях перекоса.
3. Результаты аналитического определения суммарной контактной деформации двух упругих тел, находящихся в силовом контакте до деформации по линии, с учетом их конечных размеров.
4. Аналитический метод определения коэффициента концентрации изгибных напряжений по длине зубьев ограниченной длины при перекосе и учета влияния изгибной деформации зубьев на параметры контакта.
5. Результаты теоретических методов исследования контактного взаимодействия упругих тел различных длин при начальном касании по линии (краевой эффект).
6. Результаты теоретических методов исследования контактной деформации зубьев зубчатых колес и роликовых подшипников в отсутствие перекоса и при его наличии.
7. Методика расчетной оценки напряженно- деформированного состояния зубчатых соединений (муфт) при различной форме боковых поверхностей зубьев с учетом перекоса.
8. Результаты экспериментальных исследований методом голографической интерферометрии контактных деформаций роликов при различной геометрии образующей.

**Практическую ценность** диссертационной работы составляют:

- разработанные в диссертации физико- математические модели, методы и методики расчета контактных деформаций, напряжений зубьев зубчатых колес и роликовых подшипников при отсутствии и наличии перекоса с учетом их конечных размеров;

- методики расчетного определения изгибных напряжений и деформаций, а также влияния изгиба на параметры контакта зубьев зубчатых колес в условиях перекоса с учетом их конечных размеров;
- методика расчетной оценки нагруженности зубчатых соединений (муфт) при различной форме боковых поверхностей с учетом податливости обода и зубьев при перекосе;
- методика расчетного определения жесткости (податливости) роликовых подшипников при наличии и отсутствии перекоса;
- проведение качественного и количественного анализа влияния нагружения, условий контакта, геометрических и упругих параметров на напряженно- деформированное состояние элементов зубчатых механизмов;
- доказательство положения о том, что изгибная деформация зуба, возникающая вследствие перекоса, способствует снижению концентрации контактных напряжений и частично компенсирует перекос за счет деформативного угла перекоса в зацеплении зубьев;
- результаты, полученные на основе теоретических и экспериментальных исследований, а также рекомендации по расчету нагруженности и прочности зубчатых зацеплений, соединений (муфт) и роликовых подшипников, используемые при оценке прочности и долговечности элементов зубчатых механизмов при проектировании.

По результатам исследований получены **патенты**:

- Патент № 1781477 Способ снижения уровня вибрации подшипника качения (в соавторстве). Бюл. изобр.- 1992- № 46.
- Патент № 1788364 Прямозубая цилиндрическая передача (в соавторстве). Бюл. изобр.- 1993- № 2

### **Внедрение работы.**

Часть результатов работы легла в основу разработанных с участием автора методических рекомендаций по расчету на прочность цилиндрических и конических зубчатых передач и зубчатых муфт, которые вошли в ГОСТы, а именно:

- Расчеты и испытания на прочность. Общие требования к расчетам на прочность зубчатых передач. Госстандарт СССР, М.: ВНИИНМАШ.

- Расчеты и испытания на прочность. Общие требования и методы расчета на прочность цилиндрических эвольвентных зубчатых передач. Р54-285-90. Госстандарт СССР. М.: ВНИИНМАШ.

- Метод расчета на прочность конических прямозубых эвольвентных передач. Госстандарт СССР. М.: ВНИИНМАШ.

- Метод расчета на прочность зубчатых муфт. Р54-313-90, Госстандарт СССР. М.: ВНИИНМАШ.

Результаты диссертации реализованы:

- в конструкции зубчатых муфт и шпинделей, изготавливаемых на Электростальском заводе тяжелого машиностроения (ЭЗТМ);

- на ОАО Калужском турбинном заводе (КТЗ), при проектировании и экспериментальной отработке перспективных проектов планетарных зубчатых редукторов.

Результаты диссертации использованы:

- в Методике расчета вибраций малошумных редукторов;

- в Правилах акустического проектирования основных механизмов и систем перспективных кораблей ВМФ (инв. № 145, НПВП “Турбокон“ 2009 г.).

**Апробация работы.** Материалы диссертации докладывались и обсуждались: на IУ Всесоюзном симпозиуме "Теория реальных передач зацеплением" часть 2-я, Прочность и технология реальных передач зацеплением" г. Курган, 1988 г.; на республиканском научно-практическом семинаре “Голография в промышленности и научных исследованиях” г. Гродно 1989 г.; на отраслевом научно-техническом совещании “Повышение качества зубчатых колес с момента передающих деталей сельскохозяйственных машин путем использования РК- профилей и технологических методов повышения точности обработки” г. Ташкент, 1989 г.; на межреспубликанской научно-технической конференции “Опыт исследований, проектирования, изготовления и эксплуатации зубчатых



передач Новикова” г. Рига, 1989 г.; на республиканской научно-технической конференции “Тенденции повышения нагрузочной способности передач зацеплением” г. Кишинев, 1989 г.; на республиканской научно-технической конференции “Проблемные вопросы создания средств вибрационной техники для использования в различных технологических процессах машиностроительной отрасли Узбекистана”, г. Ташкент, 1990 г.; на всесоюзной научно-технической конференции “Зубчатые передачи: Современность и прогресс”, г. Одесса, 1990 г.; на научно-технической конференции “Автоматизированное проектирование механических трансмиссий. САПР- МТ” , г. Ижевск, 1990 г.; на междунар. научн.- техн. семинара, “Автоматизированное проектирование механических трансмиссий. САПР- МТ”, г. Ижевск, 1991 г.; на пятом научном симпозиуме "Теория реальных передач зацеплением", г. Курган, 1993г.; заседании кафедры «Машиноведение и детали машин» Московского Авиационного Института (Национальный Исследовательский Университет), МАИ, М.: 2012 г.; Международной конференции «Современные проблемы механики», посвященная 100- летию Л.А.Галина. ИПМ РАН, М.: 2012 г. ; Международном симпозиуме «Современные проблемы создания и производства механических передач». ИМАШ РАН, М.: 2012 г.; 43-м Всероссийском симпозиуме «Механика и процессы управления», Миасс, Челябинская обл. 2013 г. ; Международной научной конференции «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения». ИМАШ РАН, М.: 2013 г.; 2- ом Международном симпозиуме "Современные проблемы создания и производства механических передач". ИМАШ РАН, М.: 2013 г.;

**Публикации.** Основные результаты диссертации полностью отражены в печатных работах. Автором по теме диссертации опубликовано 49 печатных работ, из них 27 в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Получены два патента на изобретения.

## 1.2. Анализ методов расчета нагруженности и прочности податливых элементов зубчатых передач

Нагруженность зубчатых зацеплений. В основе современных расчетов и конструкций зубчатых механизмов лежат исследования, в том числе фундаментальные, отечественных и зарубежных ученых. Среди них: Абрамов В.М., Айрапетов Э.Л., Бакингом Е., Биргер И.А., Берестнев О.В., Брагин В.В., Веллауэр, Вулгаков Э.Б., Генкин М.Д., Гинзбург Е.Г., Гольдфарб В.И., Грубин А.Н., Державец Ю.А., Дорофеев В.Л., Дроздов Ю.Н., Журавлев Г.А., Заблонский К.И., Иосилевич Г.Б., Ишикава И., Клеников С.С., Ковалевский В.И., Косарев О.И., Кудрявцев В.Н., Литвин Ф.Л., Мак Грегор, Медведев В.И., Петрусевич А.И., Пинегин С.В., Плеханов Ф.И., Решетов Д.Н., Сирицин А.И., Снесарев Г.А., Сызранцев В.Н., Тимофеев Б.П., Устиненко В.Л., Умезава К., Часовников Л.Д., Шевелева Г.И. [1- 10, 13, 48, 54- 55, 58, 62- 64, 67- 70, 77, 80- 82, 93- 95, 102, 104, 106, 108- 109, 112- 113, 116, 120- 122, 125, 132, 134- 135, 157, 165- 170, 176- 178, 189- 191, 193- 195, 202, 205, 207, 217, 227, 231, 245, 247] и др., что позволило значительной мере продвинуть теорию зубчатых передач.

**Изгибные напряжения в зубьях** обычно определяются в два этапа- напряжения в выкружке зубьев находится из решения плоской задачи теории упругости, а концентрация напряжений по длине зубьев- из решения задачи о тонкой консольной пластине, нагруженной распределенной на боковой поверхности пластины нагрузкой. [8]

Наиболее полно изучена первая часть задачи о напряженном состоянии зубьев зубчатых колес- исследование характера распределения изгибных напряжений в выкружке зубьев. От первых попыток экспериментальным путем учесть концентрацию изгибных напряжений в выкружке прямых зубьев [197, 48] к упрощенным гипотезам неплоских сечений [50] и далее к уточненным решениям методами теории упругости [202, 201]. В работе [85]

приведен обзор работ, посвященных исследованию напряженного состояния зубьев зубчатых колес.

Значительно меньше изучена вторая часть задачи о напряженном состоянии зубьев- исследование изменения изгибных напряжений по длине зубьев в связи с пространственным характером их нагружения и деформирования. Этот вопрос имеет важное значение при исследовании не только косозубых зубчатых передач, где пространственный характер нагружения и деформирования зубьев обусловлен в первую очередь наклонным расположением контактной линии на части боковой поверхности зубьев, но и прямозубых зубчатых передач, где номинальная протяженность контактной линии повсей длине зубьев частично или полностью нарушается погрешностями и упругими деформациями податливых элементов передачи.

Впервые консольная пластина в качестве модели зуба зубчатого колеса была использована в работе [231]. Выражение для деформации пластины было представлено в виде интеграла Фурье. В связи со сложностью решения и необходимостью графо- аналитического метода нахождения несобственных интегралов, вычисления были выполнены только для случая приложения силы на свободном крае пластины.

В [226] методом конечных разностей получено приближенное решение задачи о консольной пластине конечной длины, подвергнутой действию сосредоточенной силы на ее длинном свободном крае.

Точное решение задачи о нагруженности консольной пластины бесконечной длины получено в [228] в виде несобственных интегралов с использованием контурного интегрирования. Автор установил, что величина максимального изгибающего момента на защемленном крае пластины зависит лишь от отношения  $y_p / h$  и не зависит от самих величин  $y_p$  и  $h$  ( $y_p$  – координата точки приложения силы по высоте пластины). Упругие перемещения найдены для различных значений координаты точки приложения нагрузки по высоте пластины.

Экспериментальное исследование характера распределения изгибных напряжений в основании консольной пластины ограниченной длины при изменении координаты точки приложения силы  $P$  на свободном крае пластины выполнено в [245].

Значительным вкладом в дальнейшее развитие методов расчета зубчатых передач в части учета ограниченных размеров зубьев явилась работа [247], в которой введена гипотеза (так называемая гипотеза Веллауэра- Сейрага), позволяющая учитывать ограниченные размеры зубьев при оценке их напряженного состояния, суть которой заключается в следующем: располагая эпюрой изгибающего момента на защепленном крае бесконечно

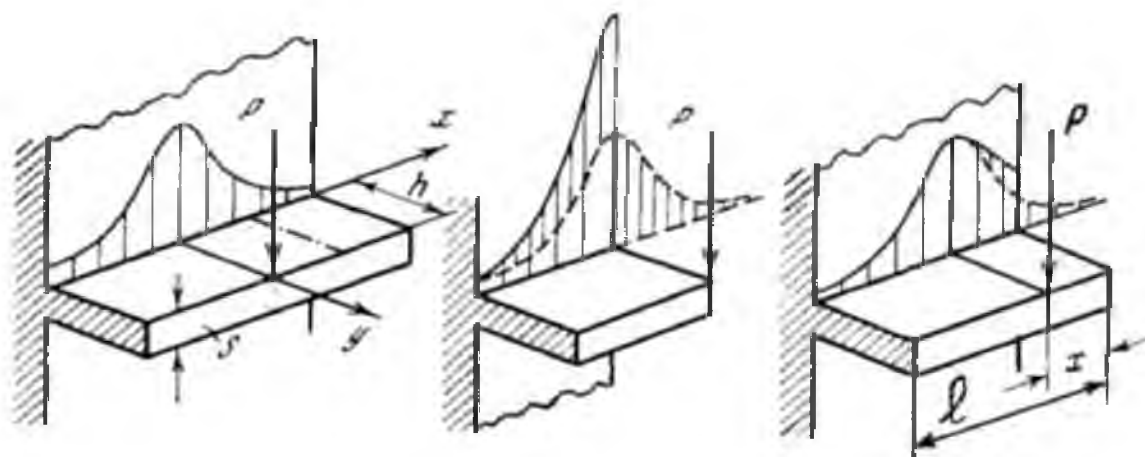


Рис. 1.1 Иллюстрация гипотезы Веллауэра- Сейрага

длинной пластины, предлагается строить эпюру изгибающего момента для пластины конечной длины, зеркально отразив эпюру изгибающего момента от отброшенной части бесконечно длинной пластины на оставшуюся часть пластины. Таким путем учитывается поддерживающий эффект пластины конечной длины по сравнению с пластиной бесконечной длины. В этом случае напряжения на торце пластины конечной длины всегда будут вдвое превосходить напряжения для соответствующего сечения бесконечно длинной пластины.

В работе [80] К.И.Заблонским предложен приближенный расчет толстых плит конечной длины, основанный на использовании численного метода

решения дифференциального уравнения равновесия пластин, отличающийся от расчета тонких консольных пластин измененными граничными условиями на защемленном крае, - вместо жесткого защемления одного края пластины

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad W_{y=0} = 0,$$

принимается упругое защемление этого края

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=0} = K_1 M, \quad W_{y=0} = K_2 Q_y,$$

где  $K_1$  и  $K_2$  - изгибная и крутильная жесткость пластины в заделке.

В работе [80] были проведены модельные экспериментальные исследования с целью распространения гипотезы Веллауэра- Сейрага [247] на упругие перемещения консольных пластин- зубьев конечной длины.

Для исследования напряженно- деформированного состояния зубьев иной подход принят в работах Э.Л.Айрапетова [5,6] и О.И.Косарева [11], в которых наряду с зубьями зубчатых зацеплений были рассмотрены зубья зубчатых соединений (муфт), имеющих отличительные особенности по характеру контактирования, где на основе модельных испытаний зубьев получены коэффициенты влияния, для которых подобраны простейшие аналитические зависимости.

**Контактная деформация зубьев зубчатых колес.** Обычно для определения контактных деформаций зубьев используются результаты решения плоской контактной задачи теории упругости Г.Герца [223, 224]. Известно, однако, что Герц не привел расчетных формул для сближения цилиндров с параллельными осями, которыми имитируются боковые поверхности зубьев зубчатых колес. Дальнейшие исследования Н.М.Беляева [44- 46], А.Н.Динника [71- 72], Б.С.Ковальского [97- 101] и др. позволили получить Э.Л.Айрапетову [4] следующую формулу для сближения цилиндров:

$$w_k = \frac{2(1-\nu^2)q}{\pi E} \left( \ln \frac{4Z_1 Z_2}{b_H^2} - \frac{\nu}{1-\nu} + \Delta \right),$$

где  $E$  и  $\nu$  модуль упругости и коэффициент Пуассона материала контактирующих тел;  $q$  – удельная нагрузка;  $b_H$  – полуширина площадки контакта по Герцу;  $\Delta$  – постоянная, учитывающая влияние уравнивающих контактную нагрузку сил;  $Z_1$  и  $Z_2$  – координаты базовых точек, сближение которых принимается за меру контактной деформации тел. Из последней формулы следует, что при  $Z_i \rightarrow \infty$  следует  $w_k \rightarrow \ln \infty$ . Предположение принимать  $Z_i = k b_H$  сводится к попытке учесть конечные размеры контактирующих тел. Как показано в работе [4], можно принимать  $10 \leq k \leq 16$ . В работе [9] принято  $k=10$ ,  $\Delta=0$ , тогда  $w_k = k_\alpha q/E$ .

Впервые учет ограниченных размеров тел в продольном направлении сделан в работе [230], где предложена следующая расчетная зависимость для  $w_k$

$$w_k = \frac{2(1-\nu^2)q}{\pi E} \left( 2 \ln \frac{b}{b_H} + 2 \ln 4 + 1 \right),$$

где  $b$  – длина цилиндра.

Как уже отметили выше, существующие методы расчета на прочность зубчатых зацеплений, отклонение условий работы реальных передач от идеальных оценивают коэффициентом нагрузки, и по существу основываются на отечественном стандарте.

В этих работах методы расчета зубьев колес на выносливость основаны на определении и сопоставлении расчетных контактных  $\sigma_H$  и изгибных  $\sigma_F$  напряжений с допускаемыми напряжениями  $[\sigma_H]$  и  $[\sigma_F]$ .

**При расчете зубьев на контактную прочность** определяют контактные напряжения  $\sigma_H$  в полюсе зацепления [164]:

$$\sigma_H = \sigma_{H0} \sqrt{K_H},$$

где  $\sigma_{Ho}$  – контактные напряжения без учета дополнительных нагрузок (динамических и от неравномерности распределения, т.е. при  $K_H=1$ )

$$\sigma_{Ho} = Z_E Z_H Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{b_w d_1} \cdot \frac{u+1}{u}};$$

$K_H$  - коэффициент нагрузки,

$$K_H = K_A K_{Hv} K_{H\beta} K_{H\alpha},$$

здесь:  $Z_i$  – коэффициенты, учитывающие: механические свойства материалов сопряженных зубчатых колес; форму сопряженных поверхностей зубьев в полюсе зацепления (влияния радиусов кривизны боковых поверхностей и переход от окружной силы на делительном цилиндре на нормальную на начальном цилиндре); суммарную длину контактных линий; наклон зуба (влияние угла наклона, не охваченное другим коэффициентами) соответственно;  $F_t$  - окружная сила на делительном цилиндре в торцевом сечении;  $b_w$  - рабочая ширина венца зубчатой передачи;  $d_1$  - делительный диаметр шестерни;  $u$  - передаточное число;

$K_i$  - коэффициенты, учитывающие: внешнюю динамическую нагрузку (не учтенную в циклограмме нагружения); внутреннюю динамическую нагрузку; неравномерность распределения нагрузки по длине контактных линий; распределение нагрузки между зубьями соответственно.

**При расчете зубьев на прочность при изгибе** определяют напряжение изгиба  $\sigma_F$  в опасном сечении:

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b m_n} K_F Y_{FS} Y_\beta Y_\varepsilon,$$

где  $K_F$  - коэффициент нагрузки

$$K_F = K_A K_{Fv} K_{F\beta} K_{F\alpha};$$

$b$  – ширина венца зубчатого колеса;  $m_n$  – нормальный модуль;  $Y_i$  - коэффициенты, учитывающие: влияние формы зуба; влияние наклона зуба; влияние перекрытия зубьев соответственно.  $K_i$  – коэффициенты,

учитывающие: внешнюю динамическую нагрузку; внутреннюю динамическую нагрузку; неравномерность распределения нагрузки по длине контактных линий; распределение нагрузки между зубьями соответственно.

Все эти методы расчета нагруженности зубчатых зацеплений основываются на введении условной удельной расчетной нагрузки, которая теряет физический смысл особенно при начальном не номинальном контакте, связанного с погрешностями изготовления и монтажа и упругими деформациями элементов передачи, а также при продольной модификации зубьев, в которых нагрузка локализуется в пределах незначительной площадки контакта, поэтому представляется целесообразным отказ от условной удельной нагрузки и переход к реальным контактным давлениям для определения непосредственно контактных и изгибных напряжений на зубьях.

Нагруженность зубчатых соединений (муфт). Исследованию напряженно-деформированного состояния элементов зубчатых муфт посвящено значительное число исследований, в том числе и фундаментальных, отечественных и зарубежных ученых. Среди них: Айрапетов Э.Л., Браун, Глухарев Е.Г., Зубарев Н.И., Косарев О.И., Коськин В.П., Мокид, Плахтин В.Д., Плотников В.С., Попов А.П., Уткин Б.С. [9, 10, 11, 12, 14, 15, 157, 175, 181, 186] и др., которые достаточно глубоко и подробно исследовали вопросы нагруженности и прочности зубчатых соединений (муфт).

Многолетний опыт использования зубчатых соединений (муфт) показывает, что основным видом их эксплуатационных отказов является износ контактирующих поверхностей зубьев, обусловленный уровнем контактных давлений на контактирующих поверхностях и особенностями их относительного движения при наличии погрешностей взаимного расположения соединяемых валов. Следовательно, в зубчатых муфтах при их стандартном исполнении нарушается принцип равнопрочности, так как наиболее слабый элемент муфты (зубья, шлицы) выходит из строя раньше, чем другие ее элементы (валы, втулки, обоймы), и поэтому он лимитирует



срок службы всего узла в целом, также нерационально используется материал.

Естественно, что первостепенной задачей расчета и проектирования зубчатых соединений (муфт) является совершенствование методов расчета нагруженности слабого элемента- зубьев, с учетом реальных условий их функционирования- неизбежных погрешностей изготовления и монтажа и упругих деформаций податливых элементов и контактирующих поверхностей.

Для максимального повышения долговечности зубчатых соединений (муфт), необходимо на основе теоретического исследования выявить те конструктивные и технологические мероприятия, которые позволяют решить основную задачу повышения износостойкости контактирующих поверхностей зубьев- максимально снизить уровень контактных давлений на контактирующих поверхностях.

В условиях работы при повышенных углах перекоса в шарнирах и при ограниченной точности изготовления зубчатых соединений деформативность их упругих элементов является важным фактором, определяющим статическую нагруженность зубьев соединения. Без знания деформации податливых элементов зубчатого соединения в условиях многопарного зацепления невозможно раскрыть статическую неопределимость системы и найти нагрузки, действовавшие на зубья соединения. Кроме того, рациональное распределение податливости элементов соединения позволит уменьшить неравномерность распределения нагрузки по зубьям соединения и, следовательно, повысить их нагрузочную способность и надежность.

В таких условиях актуальным является совершенствование методов расчета нагруженности податливых элементов муфты и поиск конструктивных и технологических мероприятий, обеспечивающих принцип равнопрочности по контактными напряжениям на зубьях и изгибным напряжениям в других элементах муфт. Например, повышая изгибную податливость элементов муфт (в частности обода), удастся повлиять на

снижение уровня контактных напряжений на поверхностях зубьев, что в результате приведет к обеспечению принципа равнопрочности, повышению долговечности муфты в целом и к более рациональному использованию материала. Сказанное определяет необходимость изучения податливости элементов зубчатых соединений- зубьев и ободьев.

Важное значение для оценки нагрузочной способности и долговечности зубчатых соединений (муфт) имеют расчетные зависимости напряженного состояния зубьев, дающие ответ о величине изгибных  $\sigma_F$  и контактных  $\sigma_H$  напряжений. Характер распределения изгибных напряжений в выкружке зубьев исследовался методами экспериментального учета концентрации изгибных напряжений [48], также использованием упрощенных гипотез неплоских сечений проф. А.В.Верховского [50], и наконец, применением уточненных решений методами теории упругости [178, 181].

В большинстве работ, посвященных исследованию нагрузочной способности зубчатых соединений (муфт) податливость ободьев обоймы при расчете не учитывается [50, 81, 186], что видимо, оправдано при небольших углах перекоса. Однако при повышенных углах перекоса неуравновешенные силы, действующие на ободья, возрастают в связи с увеличивающейся неравномерностью нагружения зубьев, и в этом случае деформация обода обоймы будет существенно влиять на величину зазоров по зубьям, выравнивая их. Наиболее полно деформативность ободьев зубчатых соединений рассмотрена в работах [9, 15, 14], результаты которых могут быть использованы при исследовании нагруженности зубчатых соединений.

Нагруженность подшипников качения. Деформация опор является важным фактором, определяющим нагруженность передач зацеплением. Исследованию нагруженности подшипников качения посвящено большое количество работ следующих авторов: Айрапетова Э.Л., Бальмонта В.Б., Бейзельмана Р.Д., Гаррис, Генкина М.Д., Герасимова Н.Н., Журавлева В.Ф., Захарова В.А., Ковалева М.П., Лупандина В.В., Народецкого М.З., Орлова А.В., Перель Л.Я., Пинегина С.В., Трейера В.Н., Фролова К.В., Ципкин Бюв.

[2, 7, 43, 60, 79, 83, 84, 92, 159, 160, 162, 163, 172, 174] и др. Необходимо отметить, что важным конструктивным параметром, определяющим деформацию опор, является зазор-натяг и перекос между кольцами подшипника. Известные решения этой практически важной задачи [43] не были доведены до простых расчетных зависимостей, поэтому важным этапом в исследовании деформации опор с шарико- и роликоподшипниками послужили работы [7, 31], в которых сделаны попытки получить приближенные (нелинейные) аппроксимационные зависимости для расчетной оценки статической характеристики опоры качения (связь между нагрузкой и взаимным смещением колец подшипника) с шарико- и роликоподшипниками при наличии зазоров-натягов и перекоса между кольцами подшипника. Эти зависимости позволяют включить опоры в расчетную модель передачи зацеплением как некие нелинейные упругие связи, что значительно упростит процедуру расчета нагруженности собственно зубчатого зацепления.

В работе [7] впервые применительно к подшипникам качения реализован метод [31] расчета подшипника как упругой системы с односторонними избыточными связями, при этом решалась не прямая задача (нахождение числа нагруженных тел качения при заданной радиальной силе), а многократно более простая задача (нахождение радиальной силы при заданном (варьируемом) числе нагруженных тел качения). При этом обратная задача решалась в безразмерном виде, благодаря чему удалось получить приближенные эмпирические зависимости для параметров нагружения шарико- и роликоподшипников.

В работе [7] выполнено сопоставление результатов расчета по полученным формулам с примером расчета, приведенным в работе [115] для подшипника 306 при радиальной силе  $F_r = 3$  кН. Анализ которого показал их удовлетворительное соответствие при указанной нагрузке.

Дальнейшее развитие метод расчета жесткости опор качения получил в работе [31], в которой наряду с зазором учтен также перекос между кольцами

подшипника. Важным результатом выполненного расчетного исследования явилось определение деформации подшипника в двух положениях тел качения по отношению к радиальной силе – когда линия ее действия проходит через ось тела качения ( $\varphi_1 = 0$ ) и когда она делит пополам угол между соседними телами качения ( $\varphi_1 = 0$  и  $\pi/z$ ).

Этот результат особенно важен для передач зацеплением по следующим причинам.

Во-первых, известно, что в роторных системах с опорами качения иногда возникают интенсивные колебания на частоте мелькания тел качения. Связано это с изменением жесткости опоры качения в двух отмеченных положениях тел качения ( $\varphi_1 = 0$  и  $\pi/z$ ), причем как следует из [31], можно сделать количественную оценку пульсации радиальной жесткости опоры качения. Таким образом, для расчетной оценки параметрических колебаний в роторной системе в связи с пульсацией жесткости опор, необходимо включить подшипник в динамическую систему зубчатой передачи или редуктора как некоторую упругую (в общем случае нелинейную) связь с известными жесткостными параметрами.

Кроме того, в работе [31] показано и в дальнейшем защищено патентом [24] предложение по снижению вибраций на частоте мелькания тел качения. Идея этого метода заключается во взаимной компенсации кинематического и деформативного смещения колец подшипника, достигаемого расчетным определением оптимальной величины радиального зазора в подшипнике.

Во-вторых, колебания вала на частоте мелькания тел качения отразится на возбуждении колебаний (и нарушении плавности работы) в зубчатом зацеплении, и это обстоятельство также необходимо учитывать при расчете виброактивности передачи.

Из сказанного следует, что деформация опор является важным фактором, определяющим нагруженность зубчатой передачи. А в связи с тем, что податливость подшипников качения складывается из упругих сближений тел качения и колец, то при ее определении возникает проблема вычисления

деформаций в контакте ролик- кольцо, аналитическое решение которой отсутствует.

### 1.3. Цели и задачи исследования

Выполненный анализ методов расчета нагруженности упругих элементов зубчатых механизмов показал, что существующие методы расчета позволяют в основном рационально проектировать высокоскоростные, тяжелонагруженные зубчатые передачи. Однако дальнейшее совершенствование конструкций зубчатых механизмов, повышение срока их безаварийной работы, рациональное использование материала в конструкциях- возможны лишь на основе уточнения и развития методов расчета на прочность с учетом ограниченной точности и деформации системы.

По совокупности и направленности выполненных исследований диссертационная работа может быть квалифицирована как решение важной научно- технической проблемы развития существующих, разработки новых методов и подходов расчетов нагруженности и прочности податливых элементов зубчатых передач, для повышения точности их расчетов **с целью** совершенствования конструкций существующих и разработки нового поколения зубчатых механизмов, улучшения их массо- габаритных характеристик, повышения надежности и срока безаварийной работы. Повышение точности расчетов достигается за счет учета влияния следующих факторов: перекоса, вызываемого технологическими погрешностями изготовления, монтажа и деформациями упругих элементов; конечных размеров деталей; продольной модификации зубьев. Для достижения этой цели в диссертации сформулированы и решены **следующие задачи**:

1. Расчетное определение контактной деформации круговых цилиндров бесконечной длины с начальным прилеганием по линии.

2. Аналитическое решение задачи о контакте двух цилиндров (цилиндр-плоскость) конечной длины при наличии перекоса.
3. Расчетное определение коэффициента концентрации изгибных напряжений в зубьях муфт и зубчатых колес в условиях перекоса с учетом их конечных размеров.
4. Расчетная оценка влияния неравномерной по длине зубьев изгибной деформации, возникающей вследствие перекоса, на параметры контакта с учетом конечных размеров.
5. Расчетное определение коэффициента концентрации контактных напряжений и деформаций цилиндрических тел конечных размеров при контакте по линии в отсутствие перекоса (краевой эффект).
6. Аналитическое определение суммарной контактной деформации двух упругих тел конечных размеров, находящихся в силовом контакте до деформации по линии.
7. Аналитическое определение контактной податливости зубчатых зацеплений в отсутствие перекоса и при его наличии.
8. Аналитическое определение контактной податливости роликовых подшипников в отсутствие перекоса и при его наличии.
9. Расчетное определение контактных напряжений в зубчатых зацеплениях и роликовых подшипниках при наличии перекоса.

## РАЗДЕЛ I.

МОДЕЛИ СИЛОВОГО КОНТАКТА УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ ИХ ЛИНЕЙНОМ  
И КРОМОЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИГЛАВА 2. КОНТАКТНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ  
НАЧАЛЬНОМ КАСАНИИ ПО ОБРАЗУЮЩЕЙ2.1. Модель линейного контакта круговых цилиндров бесконечной  
длины для определения контактной деформации

При расчете статической нагруженности и прочности зубчатых передач, роликовых подшипников и других инженерных приложений обычно пользуются решением задачи теории упругости о контакте цилиндров с параллельными осями. Известно, что Г.Герц в 1881 г. впервые решивший контактную задачу теории упругости, являющуюся основой при контактных расчетах деталей машин, не получил зависимостей для контактной деформации цилиндров с параллельными осями, ограничившись лишь определением максимального контактного давления и полуширины полосы контакта [222, 223]. В дальнейшем этой проблемой занимались многие отечественные и зарубежные ученые [2, 44- 46, 71- 73, 97- 101, 203, 221]. Многие из них [71- 73, 97- 101, 203] считали теорию Герца (модель- упругое полупространство) непригодной для определения контактной деформации цилиндров. По их мнению «трудности» заключаются в том, что теория Герца для этого параметра дает логарифмическую бесконечность. Вкратце опишем суть их подхода. Пусть два бесконечных параболических цилиндра 1 и 2 соприкасаются до деформации по образующей (рис.2.1). Точку  $O$  примем за начало прямоугольной системы координат, направляя ее таким образом, чтобы оси  $Ox$  и  $Oy$  находились в общей касательной плоскости, при этом ось  $Ox$  направим по общей образующей, а оси  $z_{1,2}$ - внутрь каждого тела. После приложения нагрузки  $q$  первоначальная линия касания переходит в полосу,

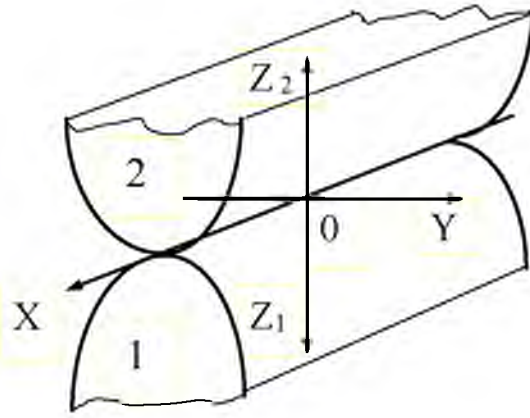


Рис.2.1. Два бесконечных параболических цилиндра соприкасаются по образующей.

при этом давление по этой площадке будет распределяться в виде половины эллиптического цилиндра.

В работе [72] показано, что напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , в плоскости симметрии  $Y=0$  внутри параболического цилиндра определяются по зависимостям:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{4q\nu}{\pi \cdot b^2} \left( \sqrt{b^2 + z^2} - z \right) \\ \sigma_y &= -\frac{4q}{\pi \cdot b^2} \left( \sqrt{b^2 + z^2} - z - \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \\ \sigma_z &= -\frac{2q}{\pi \sqrt{b^2 + z^2}}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Тогда, используя соотношение -

$$E \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y),$$

с учетом (2.1) легко найти перемещения  $w(z)$  точек в плоскости симметрии согласно [72],

$$\begin{aligned}w(z) &= \int_0^z \frac{\partial w}{\partial z} dz = \\ &= -\frac{2(1-\nu^2)q}{\pi E} \left\{ \ln \left( \sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}} + \frac{z}{b} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{z}{b} \left( \sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}} - \frac{z}{b} \right) \right\}\end{aligned}\tag{2.2}$$



где  $\nu$  и  $E$  - коэффициент Пуассона и модуль упругости материала;  $q$  - погонная нагрузка;  $b$  - полуширина площадки контакта по Герцу.

В случае кругового контура давления (пространственная задача), с возрастанием  $z$  до бесконечности величина  $w(z = \infty)$  стремится к конечному пределу, который и принимают за меру сближения тел. Здесь же, в задаче о сжатии цилиндров, величина  $w(z)$  в выражении (2.2) с возрастанием  $z$  неограниченно растет. На основании этого обстоятельства многие авторы сделают вывод о непригодности метода Герца к рассматриваемой задаче.

Однако, как показано в работе [144], эту задачу можно решить (ниже изложен этот метод) с использованием разработанной физико-математической модели на основе упругого полупространства.

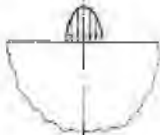
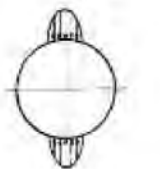
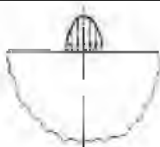
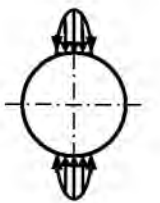
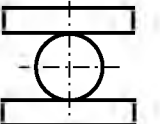
Как отмечено выше, многие ученые [71- 73, 97- 101, 203] считали теорию Герца (модель- упругое полупространство) непригодной для определения контактной деформации цилиндров. Например, автор работы [73] отмечает, что перемещения определенной точки в случае плоской задачи определить с помощью модели упругого полупространства нельзя, их можно определить только относительно произвольно выбранных отсчетных значений. Поэтому, для определения этого параметра они использовали другую модель: решили принципиально другую задачу- сжатие диска в двух диаметрально расположенных зонах распределенной нагрузкой [таблица 2.1, формулы (2.4); (2.6- 2.7)].

Эта проблема рассмотрена также в работах [123, 185], но и здесь для величины контактной деформации цилиндров не приведена формула.

Однако, как показано в работе [141], на основе решения задачи контактной деформации упругого полупространства можно приближенно определить контактную деформацию плит прямоугольного блока толщиной  $S$ , а также различных упругих тел, касающихся до деформации по линии, в том числе и круговых цилиндров. Что же касается бесконечно большого сближения двух цилиндров, то оно объясняется тем, что Герц, Динник и другие, по существу рассматривали не круговые цилиндры, а упругие

Таблица.2.1

Контактная деформация круговых цилиндров радиуса  $R$  у различных авторов

Автор	Расчетная модель	Формула контактной деформации круговых цилиндров	Закон распределения нагрузки
А.Н.Динник [72] по методу Герца		$\ln \infty$ (2.3)	Эллиптический
А.Н.Динник [72] Фепплъ [203] Хоприх, Цантопулос [204]		$\frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,36 \right]$ (2.4)	Параболический
Н.М.Беляев [44]		$\frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \left[ \frac{1}{2} - \ln \frac{b}{2} \right]$ (2.5)	Эллиптический
Б.С.Ковальский [98]		$\frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,286 \right]$ (2.6)	Эллиптический
Хоприх, Цантопулос [204] Джонсон [73]		$\frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,5 \right]$ (2.7)	
Э.Л.Айрапетов [5]		$\frac{4,86q}{E}$ (2.8)	
А.В.Орлов [161]		$\frac{5,5q}{E}$ (2.9)	
М.М.Матлин, А.И.Мозгунова, А.А.Стариков [130]		$\frac{5,27q}{E}$ (2.10)	

полупространства (точнее бесконечные параболические цилиндры), ограниченные в окрестности контакта цилиндрическими поверхностями и находили сближения таких тел путем интегрирования местных деформаций в каждом из них от нуля до бесконечности.

Опишем содержание предложенного в настоящей работе метода. Из теории упругости известно, что определив напряженное состояние в произвольной точке упругого полупространства (и вообще, любого упругого тела), можно определить относительные деформации, далее, определив последние, можно вычислить перемещения точек упругого тела. Тогда возникает вопрос, почему теория Герца, дающая исчерпывающий ответ [44, 72] по отношению напряжений контактной задачи, непригодна для определения сближения двух цилиндров при начальном касании по линии. Решим эту задачу на основе теории Герца (модель- упругое полупространство). Пусть два бесконечных параболических цилиндра 1,2 соприкасаются до деформации по образующей (рис.2.1). Систему координат направим так, как показана на рис.2.1. Для этой системы перемещения по оси  $z$  определяются (модель- упругое полупространство) формулой (2.2). Теперь можно сформулировать вопрос- имея решение (2.2) для полупространства, как получить контактную деформацию круговых цилиндров с параллельными осями. Выше уже отметили, что если поступить аналогично пространственной задаче, то на бесконечности получим логарифмическую бесконечность. И на основании этого обстоятельства многие считали метод Герца непригодным для определения «сближения» цилиндрических тел при начальном касании по линии, и в частности для определения контактной деформации круговых цилиндров с параллельными осями. Возникает вопрос, что такое перемещение на бесконечности, и почему оно должно быть там конечным для этой задачи. Если понятия напряжения в точке, относительные деформации в точке возмущений не вызывают, то перемещение в точке не совсем конкретно. Здесь было бы правильно говорить о перемещении точки относительно другой точки, т.е. речь идет о системе отсчета в данной системе координат. Для конкретизации задачи, убираем второе тело, а его воздействие на первое заменяем нагрузкой, распределенной в виде половины эллиптического цилиндра. Для сохранения равновесия такое бесконечное тело должно быть закреплено на бесконечности (рис.2.2а). Понятно, что для

определения относительного перемещения точек  $A_0$  и  $B$  в таком полупространстве (изменение расстояния между точками), необходимо вычислить разность перемещений этих точек (пояснить это можно на простой стержневой модели). Итак, для определения изменения расстояния между точками  $A_0$  и  $B$  полупространства под действием указанной нагрузки, необходимо по (2.2) вычислить разность

$$\alpha_1 = w(z_{A_0}) - w(z_B). \quad (2.12)$$

В частности, при  $z_{A_0} = 0$ ,  $z_B = R$  получим

$$\alpha_1 = w(0) - w(R) = \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \times \left[ \ln \frac{R}{b} \left( \sqrt{1 + \frac{b^2}{R^2}} + 1 \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{R^2}{b^2} \left( \sqrt{1 + \frac{b^2}{R^2}} - 1 \right) \right]. \quad (2.13)$$

Следовательно, если требуется определить контактную деформацию цилиндров радиуса  $R$  (рис.2.2б), достаточно взять удвоенную величину  $\alpha_1$ . При  $\nu = 0,3$ , и с учетом условия  $b \ll R$ , когда можно пренебречь отношением  $\frac{b^2}{R^2}$  по сравнению с единицей в (2.13), для определения

сближения окончательно получим формулу

$$\alpha = 2\alpha_1 = \frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,693 \right]. \quad (2.14)$$

Результат (2.14) будет более точным, хотя отличие будет несущественным, если в (2.13) квадратный корень разложить по малой величине в ряд Маклорена и удержать два члена, в этом случае сближение определяется:

$$\alpha = 2 \cdot \alpha_1 = 2 \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \times \left[ \ln \frac{R}{b} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{R^2} + 1 \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{R^2}{b^2} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{R^2} - 1 \right) \right],$$

или

$$\alpha = \frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,91 \right] \quad (2.15)$$

Еще об одном обстоятельстве предложенного метода. Согласно изложенному выше, и в случае пространственной задачи необходимо сближение вычислить (в частности, и для двух шаров) как разность перемещений двух точек упругого полупространства с координатами:  $z = 0$  и  $z = R$ . Для этого нам необходима функция  $w = w(z)$  для полупространства под действием силы  $P$  (при круговом контуре давления), которую несложно получить [72]:

$$w(z) = -\frac{3P(1+\nu)}{2\pi \cdot a^2 E} \times \left[ (a - \nu \cdot a) \operatorname{arctg} \frac{z}{a} - \nu \left( z - \frac{z^2}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{z} \right) \right]$$

С учетом последней зависимости, перемещение точки  $A_0$  относительно точки  $B$  для полупространства определяется по зависимости (2.12). В частности, если необходимо определить сближение центров шаров радиуса  $R$  ( $z_{A_0} = 0$ ,  $z_B = R$ ), необходимо взять удвоенную величину  $\alpha_1$

$$\alpha = 2 \cdot [w(0) - w(R)] = \frac{3P(1-\nu^2)}{\pi a E} \left[ \operatorname{arctg} \frac{R}{a} - \frac{\nu \cdot a}{3(1-\nu)R} \right],$$

или, при  $\nu = 0,3$  с учетом  $a \ll R$ , для сближения окончательно получим формулу

$$\alpha = \frac{3P(1-\nu^2)}{2aE} = \frac{3P\mathcal{G}}{8a},$$

где  $\mathcal{G} = \frac{4(1-\nu^2)}{E}$ ;  $a$  - радиус круга давления. Откуда, если соприкасаются два

шара с различными материалами, то их сближение центров будет

$$\alpha = \frac{3P(\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2)}{16a},$$

что совпадает с известной формулой [72].

Однако, как указано выше, решение (2.15) для контактной деформации круговых цилиндров приближенное. Для получения точного решения контактной деформации (изменения диаметра) круговых цилиндров с использованием модели упругого полупространства на основе решения Герца, поступим следующим образом. Рассмотрим контакт двух полупространств (рис.2.1). Для конкретизации задачи убираем второе тело, а его воздействие на первое заменяем нагрузкой  $q$ , распределенной в виде половины эллиптического цилиндра. Для сохранения равновесия такое бесконечное тело необходимо закрепить на бесконечности (рис.2.2а; в) или приложить к нему там силу  $P_H$ , статически эквивалентную нагрузке  $q$ , от этого общность решения не нарушается.

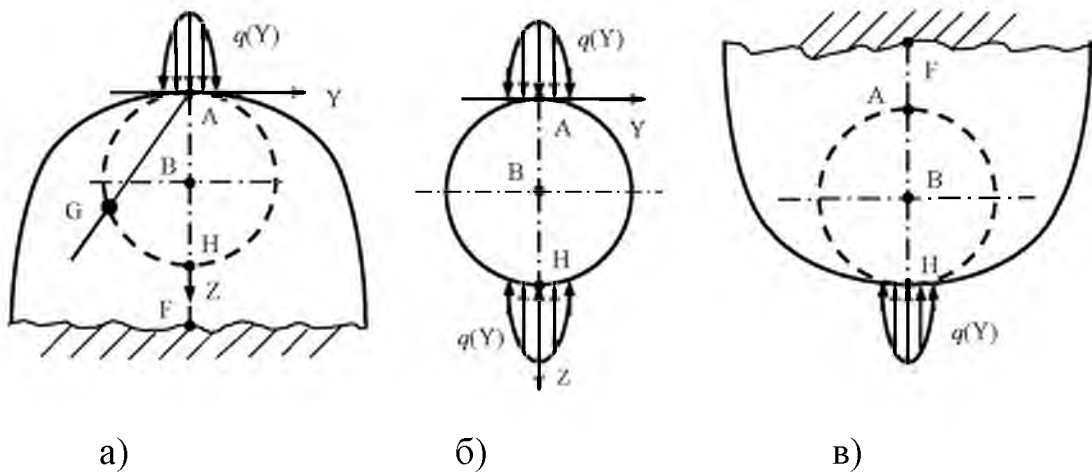


Рис.2.2. а.; в. Полупространство под действием нагрузки, распределенной в виде половины эллиптического цилиндра.

Рис.2.2. б. Бесконечно длинный круговой цилиндр под действием нагрузки, распределенной в виде половины эллиптического цилиндра, приложенной в диаметрально противоположных зонах цилиндра.

Точное решение задачи контактной деформации кругового цилиндра (изменение расстояния  $A-F$ , рис 2.2б) под действием распределенной по эллиптическому закону нагрузки  $q(Y)$  можно получить методом суперпозиций решений задач, показанных на рис 2.2 а и в, так как в этих случаях напряженное состояние тела на участке  $z = z_A \div z_F$  определяется нагрузкой  $q(Y)$ , а влиянием опоры (или силы  $P_H$ ) на напряженное состояние

на этом участке в связи с бесконечно большим расстоянием  $r = AN$  можно пренебречь (легко показать [44, 72], что напряжения в упругом теле стремятся к нулю при достаточно большом удалении от зоны приложения нагрузки).

Кроме того, должны соблюдаться граничные условия. Поверхность свободного цилиндра вне зоны нагружения свободна от напряжений, а в бесконечном полупространстве, в любой точке, в частности, и на окружности- абстрактном круговом цилиндре (штриховая линия на рис.2.2 а и в), напряжения присутствуют.

Для этого рассмотрим погонную вертикальную силу  $P$ , приложенную к горизонтальной прямолинейной границе бесконечно большой пластинки. Согласно фундаментальному решению Фламана, любой элемент  $G$ , расположенный на расстоянии  $r$  от точки приложения силы, (рис.2.3) подвергается простому сжатию в радиальном направлении [198]. Компоненты напряжений определяются при этом формулами

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r},$$

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0,$$

т.е. окружные напряжения  $\sigma_\theta$  и касательные напряжения  $\tau_\theta$  равны нулю.

Из последних формул вытекает любопытный факт. Если выбирать окружность произвольного диаметра  $d=2R$  с центром на оси  $z$  и касательную к оси  $y$  в точке  $A$  (рис.2.3), то для любой точки окружности радиуса  $R$  имеем

$$\cos\theta = \frac{r}{d}.$$

С учетом этой зависимости можно переписать последнюю формулу для радиальных напряжений  $\sigma_r$ , имеем

$$\sigma_r = -\frac{P}{\pi R},$$

т.е. во всех точках окружности радиуса  $R$  напряжения остаются одинаковыми (сжимающими), за исключением точки приложения нагрузки.

Следовательно, если к круговому цилиндру приложить [167] постоянные растягивающие напряжения  $\sigma$  [198]:

$$\sigma_{z_0} = \frac{q}{\pi R} = \sigma_{y_0};$$

$$\sigma_{x_0} = \nu(\sigma_{z_0} + \sigma_{y_0}) = \frac{2\nu q}{\pi R},$$

то граничные условия также будут соблюдаться.

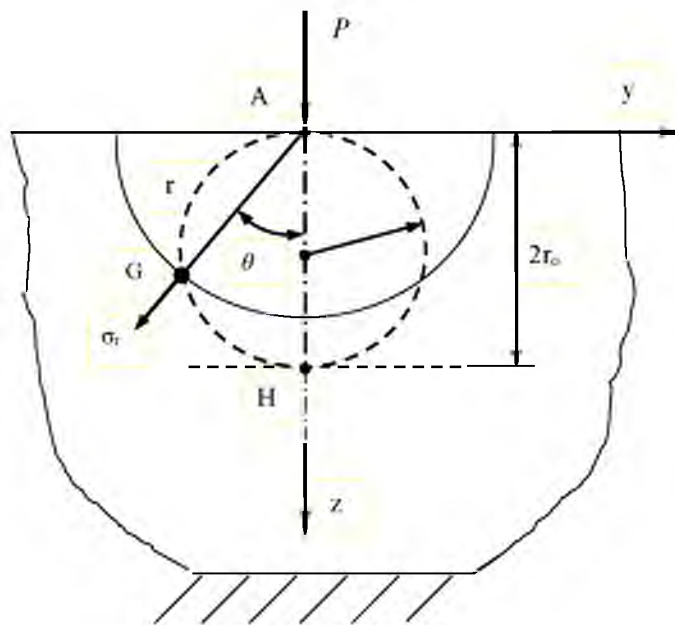


Рис.2.3

Относительная деформация  $\varepsilon_0$  от таких напряжений будет:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{E} [\sigma_{z_0} - \nu(\sigma_{y_0} + \sigma_{x_0})] = \frac{q}{\pi ER} [1 - \nu - 2\nu^2],$$

а перемещения  $w_0$  будут определяться

$$w_0 = 2 \int_0^R \varepsilon_0 dz = 2 \int_0^R \frac{q}{\pi ER} (1 - \nu - 2\nu^2) dz = 2 \frac{q}{\pi E} (1 - \nu - 2\nu^2).$$

Следовательно, при использовании изложенного подхода, решение задачи (контактная деформация  $\alpha$  - изменение диаметра цилиндра) будет:



$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad (2.16)$$

где  $\alpha_{1,2}$  определяются по зависимостям (2.2) и (2.12) при  $z_A = 0$  и  $z_F = 2R$ , т. е.

$$\alpha_{1,2} = -\frac{2(1-\nu^2)q}{\pi E} \times \left\{ \ln \frac{2R}{b} \left( \sqrt{1 + \frac{b^2}{(2R)^2}} + 1 \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{(2R)^2}{b^2} \left( \sqrt{1 + \frac{b^2}{(2R)^2}} - 1 \right) \right\}, \quad (2.17)$$

а  $\alpha_3 = w_0$ , т. е.

$$\alpha_3 = 2 \frac{q}{\pi E} (1 - \nu - 2\nu^2). \quad (2.18)$$

Преобразуем зависимость (2.17) с учетом  $\frac{b^2}{(2R)^2} \ll 1$ . Для этого разложив квадратные корни в уравнении (2.17) в ряд Маклорена и удержав в нем два члена, получим

$$\alpha_{1,2} = -\frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \ln \frac{2 \cdot 2R}{b} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \right]. \quad (2.19)$$

С учетом последних зависимостей (2.18), (2.19), перепишем соотношение (2.16)

$$\alpha = -2 \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \ln \frac{4R}{b} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \right] + 2 \frac{q}{\pi E} (1 - \nu - 2\nu^2), \quad (2.20)$$

или, после некоторых преобразований окончательно получим формулу:

$$\alpha = -\frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \ln \frac{4R}{b} - \frac{1}{2} \right], \quad (2.21)$$

что совпадает с формулой (2.7) из таблицы, полученной с помощью другой расчетной модели.

## 2.2 Уточнение формулы Б.С.Ковальского по определению контактной деформации круговых цилиндров

Здесь обратим внимание на следующее важное обстоятельство. Если зависимость (2.17) преобразовать не изложенным выше способом, а в ней пренебречь единицей по сравнению с отношением  $\left(\frac{2R}{b}\right)^2 \gg 1$ , т.е. сделать

более грубое упрощение, то вместо уравнения (2.19) получим соотношение

$$\alpha_1 = -\frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \ln \frac{2 \cdot 2R}{b} \right].$$

Далее, если проделать все так же, как показано выше при получении формулы (2.21), то выражение для контактной деформации (изменение диаметра) вместо (2.20) примет вид:

$$\alpha = -2 \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \ln \frac{2 \cdot 2R}{b} \right] + 2 \frac{q}{\pi E} (1-\nu-2\nu^2),$$

или, после простых преобразований:

$$\alpha = -\frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \ln \frac{4R}{b} - \frac{1-\nu-2\nu^2}{2(1-\nu^2)} \right],$$

что совпадает с известным решением Б.С. Ковальского [98] и А.И.Петрусевича [167], отсюда при  $\nu=0,3$  получим

$$\alpha = -\frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \ln \frac{2R}{b} + 0,407 \right]. \quad (2.22)$$

Таким образом, решение Б.С. Ковальского (2.22) [97], (или (2.6) в таблице, что одно и то же), является более грубым приближением данной задачи, чем решение (2.21).

В справочной литературе [183, 180] приводится зависимость для определения сближения осей цилиндров, полученная по формуле (2.22) Б.С.Ковальского [97]. Однако даже неглубокий анализ зависимостей таблицы показывает, что формула (2.6) (или (2.22), что одно и то же) неверная, т.к.

при эллиптическом законе распределения нагрузки поперек полосы контакта деформация должна быть меньше, чем при параболическом законе (2.4).

В заключении остановимся на эксперименте, проведенном Динником [72]. По-видимому, действительно, радиус образца был 29,8 см, а не 2,98 см, как справедливо указывает автор работы [4]. Потому что, во-первых, Динник повсюду образцы с отношением  $R/l \geq 5$  называет дисками, а с отношением  $R/l \leq 2$  – цилиндрами (или катками), здесь он их называет дисками, и во-вторых, второй размер образца - 1,94 см - Динник называет толщиной диска, в противном случае этот размер у него был бы длиной цилиндра (или катка). В пользу этого предположения говорит также анализ результатов расчетных данных Динника, приведенный в работе [4].

Уникальность этого эксперимента в том, что диски сжимались не плоскими плитами, как во многих других экспериментах (при этом по сути измеряется не изменение диаметра цилиндра, а суммарная деформация цилиндра и плиты), а круглыми дисками одинаковых диаметров, чем достигалась высокая точность результатов эксперимента- измеряется только изменение диаметра. На рис.2.4 приведено сопоставление расчетных (линия)

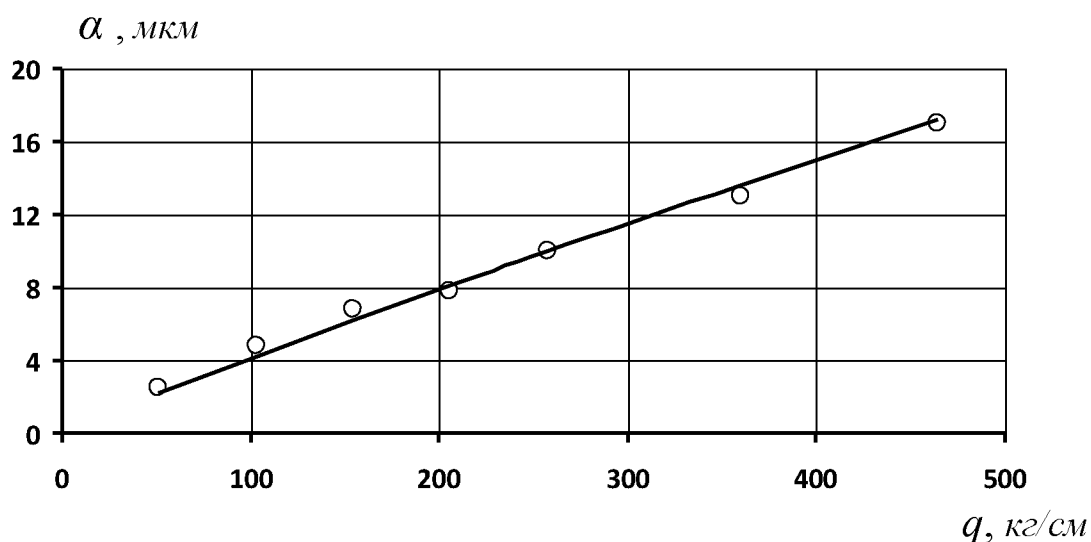


Рис.2.4. Сопоставление экспериментальных (по А.Н.Диннику, значки) и расчетных (линия) данных зависимости контактной деформации диска (изменение диаметра) от нагрузки.

– вычисленных по формуле (2.21), и экспериментальных (точки) величин контактной деформации цилиндров, из которого видно их хорошее соответствие.

### Погрешность решения Б.С. Ковальского.

Из сопоставления двух решений- точного (2.21) и Б.С.Ковальского (2.6) видно, что их отличие не константа, а зависит от параметров: материала-  $E$  цилиндров; радиусов цилиндров-  $R$  и от внешней нагрузки-  $q$ . На рис.2.5 и 2.6 показаны графики погрешности  $\delta$  решения Б.С.Ковальского в зависимости от радиуса цилиндров  $R$  и от их материала  $E$  соответственно. Из этих графиков видно, что для стали погрешность  $\delta$ , при варьировании  $R$  в широком диапазоне, колеблется в пределах от 5 до 6 %. Однако при малых значениях  $R$  и  $E$  погрешность  $\delta$  растет.

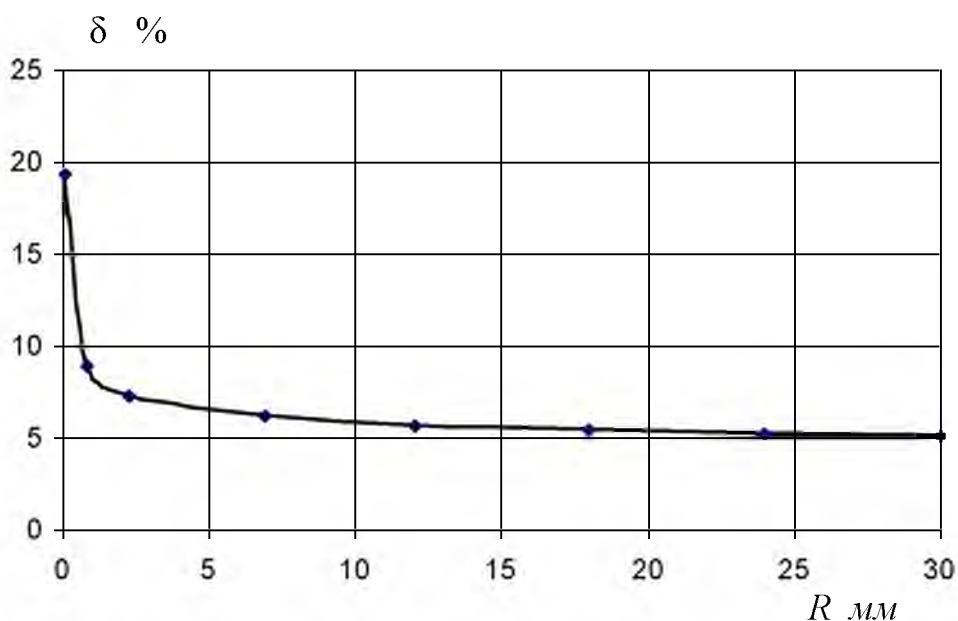


Рис.2.5.

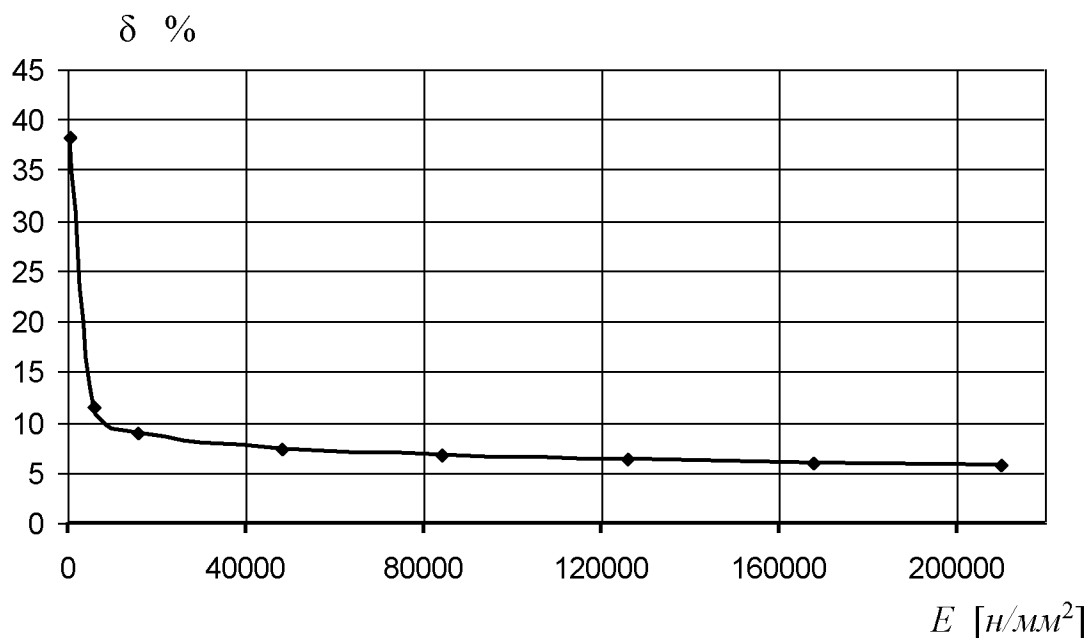


Рис.2.6.

### 2.3 Уточнение формулы Н.М.Беляева по определению контактной деформации круговых цилиндров

Проф. Н.М.Беляев считал [44], что на основе теории Герца можно эту задачу решить. Ему удалось с применением теории потенциала решить ее, и он получил следующую формулу для определения контактной деформации цилиндров:

$$\alpha = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \left[ \frac{1}{2} - \ln \frac{b}{2} \right].$$

Однако легко видеть, что эта формула не работает, в ней под знаком логарифма находится размерная величина. Это обстоятельство, не раз отмеченное многими исследователями, послужило основанием считать решение Н.М.Беляева в части определения контактной деформации цилиндров, неверным.

Тем не менее, эта задача решается методом Н.М.Беляева (модель упругое полупространства), что и сделано в настоящей работе и показана ошибка, допущенная им. Также показана, что решение, полученное методом

Н.М.Беляева, приближенное, что видно из сопоставления его с точным решением.

Суть данного подхода заключается в следующем. Под действием сосредоточенной силы  $P$  в т.  $O_1$  на упругое полупространство (рис.2.7) компонента перемещения  $w$  по оси  $Z$  будет определяться по решению задачи Буссинеску [44]:

$$w = -\frac{P}{4\pi\mu} z \frac{\partial V_0}{\partial z} + \frac{P}{4\pi\mu} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} V_0,$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  - постоянные Ламе:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

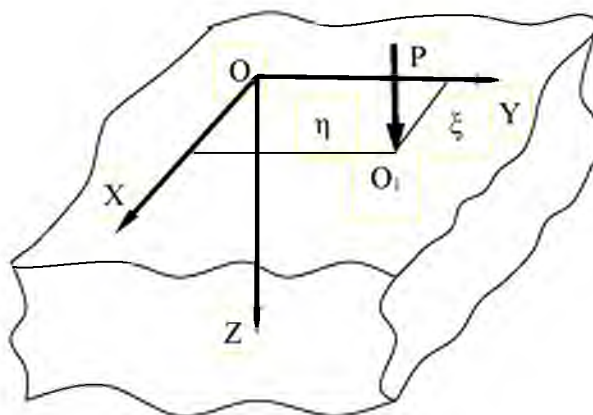


Рис.2.7 Упругое полупространство под действием сосредоточенной силы

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} = \frac{1}{\rho} \text{ - Ньютонов потенциал точки (для задачи}$$

Буссинеска); координаты  $\xi$  и  $\eta$  - смещение нагрузки от начало координат. Для перемещений в точках полупространства под действием равномерно распределенной нагрузки  $q$  Н.М.Беляев получает результат

$$w = -\frac{q}{4\pi\mu} z \frac{\partial V_0^e}{\partial z} + \frac{q}{4\pi\mu} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} V_0^e, \quad (2.23)$$

который совпадает с решением Лява, полученным другим способом, здесь

$$V_0^e = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}},$$

- потенциал прямой линии (для задачи Лява). Возьмем две точки с координатами  $(x, y, z)$  и  $(x_1, y_1, z_1)$ , и обозначим  $t = \sqrt{(y-\eta)^2 + z^2}$  и  $t_1 = \sqrt{(y_1-\eta)^2 + z_1^2}$ , (при указанной нагрузке потенциал не зависит от координаты  $x$ ). Для определения относительного перемещения т.  $A(x, y, z)$  по отношению т.  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ , Н.М.Беляев пишет, что необходимо составлять разность потенциалов  $V_0^e$  и вычисляет:

$$V_0^e = [V_0^e] - [V_0^e]_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 + (y_1-\eta)^2 + z_1^2}} = \dots = 2 \left( \ln \frac{1}{t} - \ln \frac{1}{t_1} \right).$$

Далее, однако, почему- то, вместо того, чтобы использовать по последней зависимости потенциал  $V_0^e$  для определения относительного перемещения указанных точек:

$$V_0^e = 2 \left( \ln \frac{1}{t} - \ln \frac{1}{t_1} \right) = 2 \ln \frac{t_1}{t}, \quad (2.24)$$

он переписывает потенциалы:

$$[V_0^e] = 2 \ln \frac{1}{t} + const ;$$

$$[V_0^e]_1 = 2 \ln \frac{1}{t_1} + const ,$$

и утверждает, что с точностью до постоянной для определения деформаций и напряжений можно использовать потенциал  $V_0^e$  по зависимости

$$V_0^e = 2 \ln \frac{1}{t}. \quad (2.25)$$

Для определения деформаций и напряжений его утверждения правильны, но что касается относительного перемещения точек, то для

определения последних использовать потенциал (2.25) нельзя- (это приведет к ошибочному результату), а надо использовать разность потенциалов (2.24) двух точек (на что указывает и сам Н.М.Беляев). Далее, (по аналогии со случаем первоначального касания в точке) Н.М.Беляев использует эллиптический закон распределения нагрузки поперек полосы давлений, т.е. в этом случае эллипсоид давления переходит в бесконечный эллиптический цилиндр. Для определения перемещения от такой нагрузки необходимо в (2.23) вместо  $q$  взять элементарную нагрузку  $p(\eta)d\eta$  и интегрировать от  $-b$  до  $+b$ , т.е. имеем

$$dw = -\frac{p(\eta)d\eta}{4\pi\mu} z \frac{\partial V_0^e}{\partial z} + \frac{p(\eta)d\eta}{4\pi\mu} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} V_0^e,$$

откуда

$$w = -\frac{z}{4\pi\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_{-b}^b p(\eta)V_0^e d\eta + \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{-b}^b p(\eta)V_0^e d\eta. \quad (2.26)$$

Введем обозначение:

$$V^e = -\frac{1}{2} \int_{-b}^b p(\eta)V_0^e d\eta. \quad \text{Так как, наша цель определять относительное}$$

перемещение точек, то воспользуемся формулой (2.24) для  $V_0^e$ , имеем

$$V^e = -\frac{1}{2} \int_{-b}^b p(\eta) \cdot \ln \frac{t}{t_1} d\eta, \quad (2.27)$$

тогда зависимость (2.26) можно переписать

$$w = -\frac{z}{2\pi\mu} \cdot \frac{\partial V^e}{\partial z} + \frac{1}{2\pi\mu} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} V^e,$$

или

$$w = -\frac{z}{2\pi\mu} \cdot \frac{\partial V^e}{\partial z} + 2\theta V^e,$$

а на поверхности ( $z=0$ ) имеем:

$$w = 2\theta V^e, \quad (2.28)$$



где  $\theta = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)}$ . Здесь необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. При определении параметров контакта двух тел уравнение совместности деформаций, перемещений и зазоров будет:

$$w_1 + w_2 = \alpha - B \cdot y^2, \quad (2.29)$$

т.е. берется сумма упругих деформаций тел, где  $\alpha$  - сближение;  $w_1, w_2$  - упругие деформации первого и второго тела в рассматриваемом сечении;  $B$  - приведенная кривизна;  $y$  - координата данного сечения, а для определения относительного перемещения двух точек одного тела, необходимо взять разность потенциалов (2.27), т.е. рассматривается одно тело, а воздействие второго тела заменяется нагрузкой и вычисляется относительное перемещение. Для вычисления потенциала  $V^e$  по зависимости (2.27) воспользуемся методом Н.М.Беляева [44].

Разность потенциалов будет:

$$V^e = [V^e] - [V^e]_1 = \frac{q}{2} \left[ 1 - 2 \ln \frac{\sqrt{b^2 + t} + \sqrt{t}}{2} - \int_t^\infty \frac{y^2 / (b^2 + s) + z^2 / s}{\sqrt{(b^2 + s)s}} ds \right] - \frac{q}{2} \left[ 1 - 2 \ln \frac{\sqrt{b^2 + t_1} + \sqrt{t_1}}{2} - \int_{t_1}^\infty \frac{y_1^2 / (b^2 + s) + z_1^2 / s}{\sqrt{(b^2 + s)s}} ds \right],$$

или

$$V^e = \frac{q}{2} \left[ 2 \ln \frac{\sqrt{b^2 + t_1} + \sqrt{t_1}}{\sqrt{b^2 + t} + \sqrt{t}} - \int_t^\infty \frac{y^2 / (b^2 + s) + z^2 / s}{\sqrt{(b^2 + s)s}} ds + \int_{t_1}^\infty \frac{y_1^2 / (b^2 + s) + z_1^2 / s}{\sqrt{(b^2 + s)s}} ds \right] \quad (2.30)$$

где  $t, t_1$  - корни уравнений

$$\frac{y_i^2}{b^2 + t_i} + \frac{z_i^2}{c^2 + t_i} - 1 = 0. \quad (2.31)$$

Тогда при переходе от эллипса не изменяя своей массы к отрезку прямой с переменной (изменяющегося по эллиптическому закону) плотностью, когда одна полуось  $C$  стремится к нулю, с учетом (2.31) для точек  $z_1 = R$ ,  $t_1 = z_1^2$  и точек отрезка  $2b$  ( $z=0$ ,  $t=0$ ) из уравнений (2.28), (2.29) и (2.30) получим следующее выражение для потенциала:

$$V^e = \frac{q}{2} \left[ 2 \ln \frac{\sqrt{b^2 + R^2} + R}{b} - \int_t^\infty \frac{y^2 / (b^2 + s) + z^2 / s}{\sqrt{(b^2 + s)s}} ds + \int_{t_1}^\infty \frac{y_1^2 / (b^2 + s) + z_1^2 / s}{\sqrt{(b^2 + s)s}} ds \right] =$$

$$= \frac{1}{2(\theta_1 + \theta_2)} \cdot (\alpha - B \cdot y^2).$$

Отсюда, сопоставляя коэффициенты справа и слева последнего уравнения при одинаковых степенях переменных, получим следующую зависимость

$$\frac{q}{2} \cdot 2 \ln \frac{\sqrt{b^2 + R^2} + R}{b} = \frac{1}{2(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \alpha,$$

или,

$$\alpha = \frac{q}{2} \cdot 2(\theta_1 + \theta_2) \cdot 2 \ln \frac{\sqrt{b^2 + R^2} + R}{b},$$

откуда при одинаковых материалах тел, и с учетом условия  $b \ll R$ , когда можно пренебречь отношением  $\frac{b^2}{R^2}$  по сравнению с единицей, для

определения сближения (с учетом  $\theta = \frac{1 - \nu^2}{\pi E}$ ) окончательно получим

формулу

$$\alpha = \frac{4q(1 - \nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,693 \right] \quad (2.32)$$

Здесь необходимо сделать следующее замечание. В работе [144] показано, что для определения относительного перемещения двух точек  $A_0$  и  $B$  в упругом полупространстве (параболическом цилиндре), достаточно по формуле (2.2) определить разность перемещений этих точек:

$$\alpha_1 = w(z_{A_0}) - w(z_B).$$

В частности, при  $z_{A_0} = 0$ ,  $z_B = R$  получим

$$\alpha_1 = w(0) - w(R) = \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \times \left[ \ln \frac{R}{b} \left( \sqrt{1 + \frac{b^2}{R^2}} + 1 \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{R^2}{b^2} \left( \sqrt{1 + \frac{b^2}{R^2}} - 1 \right) \right] \quad (2.33)$$

Следовательно, если требуется определить деформацию цилиндров радиуса  $R$ , достаточно взять удвоенную величину  $\alpha_1$ . При  $\nu = 0,3$ , и с учетом условия  $b \ll R$ , когда можно пренебречь отношением  $\frac{b^2}{R^2}$  по сравнению с единицей в (2.33), для определения контактной деформации окончательно получим формулу совпадающую с формулой (2.32). Следовательно, метод Н.М.Беляева, по сути, определяет относительное перемещение двух точек упругого полупространства.

Таким образом, ошибка Н.М.Беляева заключалась в том, что он для определения перемещения вместо разности потенциалов двух точек взял потенциал в точке.

И последнее. Во второй главе приведено точное решение (2.21) плоской контактной задачи по определению контактной деформации цилиндров радиуса  $R$ :

$$\alpha = \frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,5 \right],$$

которое отличается, хотя и несущественно, от полученного по методу Н.М.Беляева решения (2.32).

#### 2.4. Выводы по этой главе

На основе разработанного метода определения контактной деформации цилиндров с начальным касанием по образующей, впервые показано, что с

использованием модели упругого полупространства можно получить точное решение данной задачи.

Показано, что известное решение Б.С. Ковальского этой задачи является грубым приближением более точного ее решения.

Приведена погрешность решения Б.С. Ковальского. Установлено, что она зависит от радиуса цилиндров  $R$ , их материала  $E$  и от внешней нагрузки  $q$ . Для стали, в частности, при варьировании в широком диапазоне радиуса  $R$ , погрешность  $\delta$  колеблется в пределах от 5 до 6 %. Однако при малых значениях  $R$  и  $E$  погрешность  $\delta$  растет.

Приведено теоретическое объяснение ошибки известного решения Н.М.Беляева в части определения контактной деформации круговых цилиндров и приведено правильное решение по его методу.

Показано, что результат решения по его методу по сути есть относительное перемещение двух точек упругого полупространства.

Путем сопоставления этого результата с точным решением для круговых цилиндров установлено, что он является приближенным.

### ГЛАВА 3. УЧЕТ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПО ЛИНИИ

#### 3.1. Модель контакта упругих тел конечных размеров, находящихся в силовом воздействии до деформации по линии

Как отмечено выше, при расчете нагруженности и прочности шарико- и роликовых подшипников обычно пользуются решением так называемой контактной задачи теории упругости о сжатии двух цилиндров по образующей и о сжатии ролика (или шарика) двумя плоскими плитами. Очевидно, что в таких случаях необходимо учитывать деформации всех тел, находящихся в силовом контакте (например- ролика (шарика) и двух плит).

В работе [141] приведено приближенное решение задачи о контактной деформации  $w_{A_0/B}$  плоской плиты (рис.3.1) – относительное сближение точки приложения нагрузки  $A_0$  и основания плиты  $B$  при нагружении ее

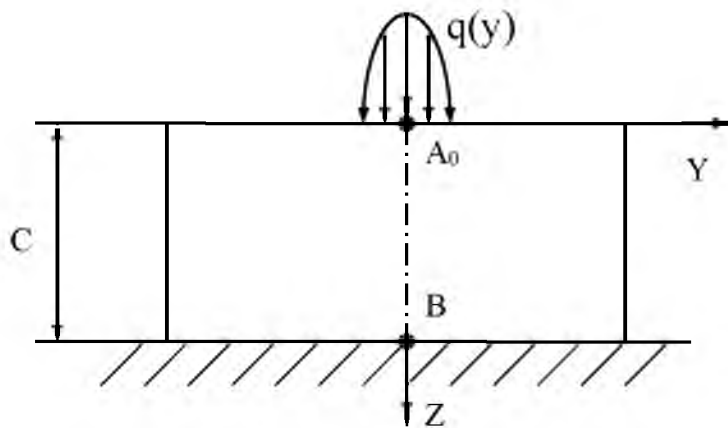


Рис.3.1

распределенной в виде половины эллиптического цилиндра нагрузкой (что имеет место, например, при контакте плиты с цилиндром) в виде

$$w_{A_0/B} = \frac{2(1-\nu^2)q}{\pi E} \left[ \ln \frac{2C}{b} - 0,214 \right], \quad (3.1)$$

которое совпадает с решением Джонсона [73]  $w_{A_0/B} = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} * \left[ 2 \ln \frac{2C}{b} - 0,428 \right]$ , но как указано выше, этот результат приближенный.

Более точное решение этой задачи можно получить, если использовать метод определения контактной деформации упругих тел, предложенный в работе [144]. Опишем суть данного метода. Рассмотрим плиту толщиной  $2C$ , нагруженной симметричной системой нагрузок (рис 3.2). Обозначим плиту

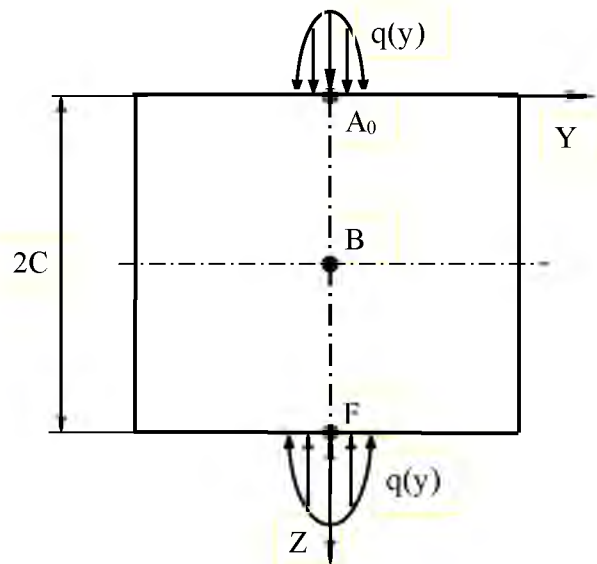


Рис.3.2

толщиной  $C$  через букву «а», а плиту толщиной  $2C$  через букву «б». Очевидно, что искомое решение  $w_{A_0/B}$  равняется половине контактной деформации плиты «б»  $w_{A_0/B} = w_{A_0/F} / 2$ . Контактная деформация плиты «б» можно определить суперпозицией решений двух задач, показанных на рис.3.3 а и б, т.е.

$$w_{A_0/F} = w'_{A_0/F} + w''_{A_0/F},$$

где  $w'_{A_0/F}$  и  $w''_{A_0/F}$  – решения задач, показанных на рис.3.3 а и б (изменение расстояния между точками  $A_0$  и  $F$  внутри упругого полупространства, под действием указанной нагрузки). Последнее утверждение можно обосновать исходя из следующих выводов теории упругости. Напряженное состояние

внутри полупространства (рис.3.3 а) в рамках пунктирной линии (абстрактная плита толщиной  $2C$ ) определяется нагрузкой  $q(y)$ , а влиянием опоры из-за большого расстояния исследуемой области от

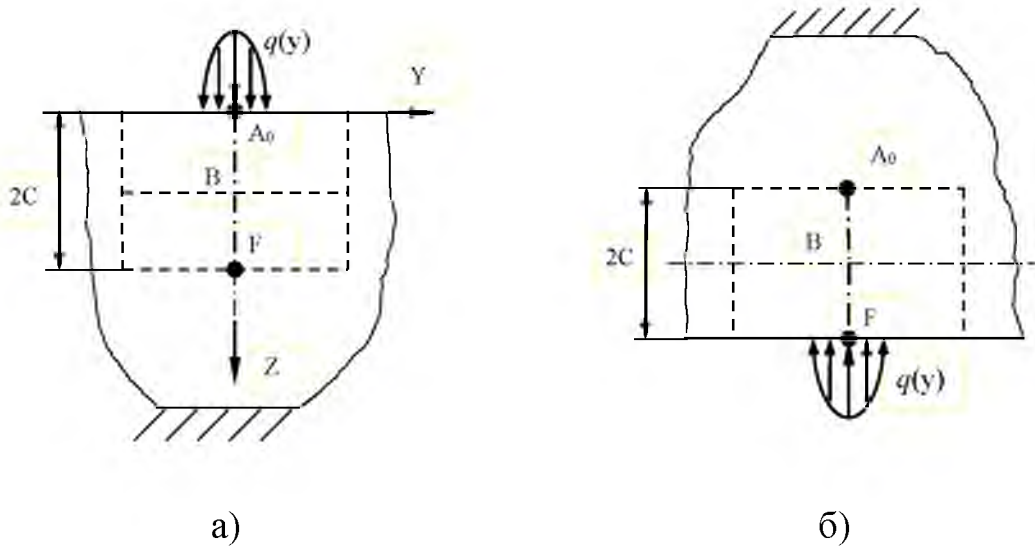


Рис.3.3

опоры (последняя находится на бесконечно большом расстоянии от зоны приложения нагрузки) можно пренебречь.

Согласно формуле (2.2) перемещение  $w(z)$  в упругом полупространстве под действием нагрузки  $q(y)$  в произвольной точке с координатой  $z$  на плоскости симметрии определяется по формуле

$$w(z) = -\frac{2(1-\nu^2)q}{\pi E} \left\{ \ln \left( \sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}} + \frac{z}{b} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{z}{b} \left( \sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}} - \frac{z}{b} \right) \right\},$$

где-  $\nu$  и  $E$ - коэффициент Пуассона и модуль упругости материала;  $q$ - погонная нагрузка;  $b$ - полуширина площадки контакта по Герцу.

Следовательно, контактная деформация  $w'_{A_0/F}$  определяется:

$$w'_{A_0/F} = w(z_{A_0}) - w(z_F),$$

или

$$w'_{A_0/F} = \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4C}{b} - \frac{1-\nu}{2(1-\nu)} \right].$$

Очевидно, что  $w'_{A_0/F} = w''_{A_0/F}$ , поэтому сближение точек  $A_0$  и  $F$  будет

$$w_{A_0/F} = \frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4C}{b} - \frac{1-\nu}{2(1-\nu)} \right].$$

Таким образом, искомое решение с учетом  $\nu = 0,3$  будет

$$w_{A_0/B} = w_{A_0/F} / 2 = \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4C}{b} - 0,214 \right]. \quad (3.2)$$

Сопоставление этого решения с приближенным (3.1) показывает (см. рис. 3.4), что при больших значениях толщины плиты различие несущественно. В реальном диапазоне изменения  $C$  погрешность колеблется от 8 до 12 %. Однако при малой толщине плиты погрешность приближенного решения резко растет, что видно из приведенного графика (рис. 3.4).

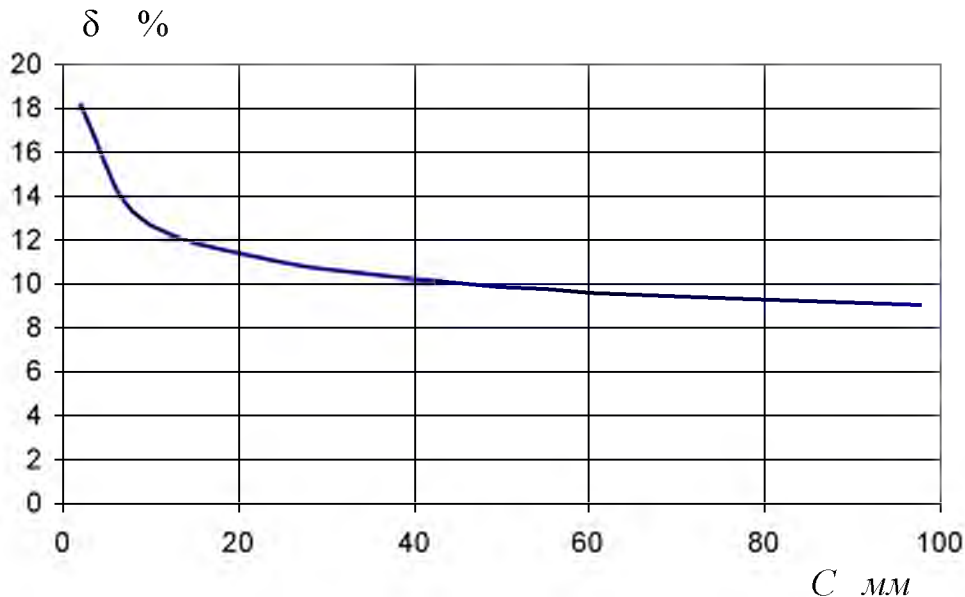


Рис 3.4

3.2. Суммарная контактная деформация двух упругих тел конечных размеров при начальном касании по линии

Определим, далее, суммарную контактную деформацию двух упругих тел конечных размеров, находящихся в силовом контакте до деформации по линии. Рассмотрим два цилиндрических сегмента (рис.3.5), находящихся в



контакте по образующей. Сближение точек  $A$  и  $B$  (суммарная контактная деформация) после приложения нагрузки определим как сумма сближений точек  $A_0$  и  $A$  (контактная деформация первого тела) и  $A_0$  и  $B$  (контактная деформация второго тела):

$$w_{A/B} = w_1 + w_2 ,$$

где для величин контактных деформаций  $w_1$  и  $w_2$  легко получить (по аналогии с плитой) следующие зависимости

$$w_i = \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4C_i}{b} - 0,214 \right] , \text{ где } i=1, 2.$$

Следовательно, суммарная контактная деформация определяется

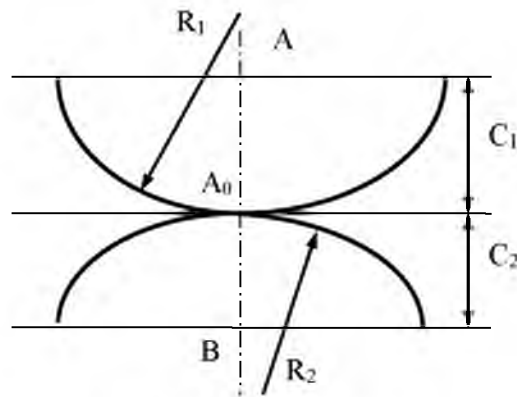


Рис.3.5

$$w_{A/B} = \frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4\sqrt{C_1 C_2}}{b} - 0,214 \right] , \quad (3.3)$$

где полуширина полоски контакта по Герцу определяется [72]

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{qR}{E}} = 1,52 \sqrt{\frac{qR_1 R_2}{E(R_1 + R_2)}} , \quad (3.4)$$

с учетом последнего соотношения формулу (3.3) можно переписать

$$w_{A/B} = \frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln 2,124 \sqrt{\frac{EC_1 C_2 (R_1 + R_2)}{qR_1 R_2}} \right] . \quad (3.5)$$

С помощью последней формулы можно определить суммарную контактную деформацию двух упругих тел конечных размеров, контактирующих до деформации по линии. Например, чтобы найти сближение точек  $A$  и  $B$  цилиндрического сегмента и плоской плиты, достаточно в (3.5) вместо  $R_2$  подставить бесконечность. Некоторые примеры приведены в табл. 3.1.

Таблица № 3.1

Суммарная контактная деформация двух упругих тел из одинаковых материалов, контактирующих до деформации по линии

№	Контактирующие до деформации по линии упругие тела из одинаковых материалов	Формула для определения перемещения точки $A$ относительно точки $B$
1	Цилиндр с плитой 	$\frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \ln \left[ 1,842 \sqrt{\frac{EC}{q}} \right]$
2	Цилиндрический сегмент с цилиндром 	$\frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \ln \left[ 1,842 \sqrt{\frac{EC(R_1 + R_2)}{qR_2}} \right]$
3	Цилиндрический сегмент с плитой 	$\frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \ln \left[ 2,124 \sqrt{\frac{EC_1 C_2}{qR}} \right]$
4	Два цилиндрических сегмента 	$\frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \ln \left[ 2,124 \sqrt{\frac{EC_1 C_2 (R_1 + R_2)}{qR_1 R_2}} \right]$

Имея решение (3.2) задачи о контактной деформации плиты толщиной  $C$  под действием указанной нагрузки  $q(y)$ , легко найти сближение  $w_{A/B}$  центра ролика  $A$  относительно основания плиты  $B$  (суммарная контактная деформация ролика и плоской плиты). Действительно,

$$w_{A/B} = w_{A/A_0} + w_{A_0/B}, \quad (3.6)$$

где  $w_{A/A_0}$  - половина контактной деформации ролика радиуса  $R$ , которая согласно формуле (2.21) определяется

$$w_{A/A_0} = \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,5 \right],$$

следовательно, с учетом последней формулы и (3.2) из (3.6) получаем

$$w_{A/B} = \frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4\sqrt{RC}}{b} - \frac{0,714}{2} \right],$$

подставляя в последнюю зависимость полуширину полосы контакта (3.4) по Герцу, окончательно получим

$$w_{A/B} = \frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln 1,842 \sqrt{\frac{EC}{q}} \right]. \quad (3.7)$$

Для проверки полученной зависимости, на рис.3.6 показано сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных (точки) данных (по работе [161]) сближения стальных плит от нагрузки, при сжатии ими стальных роликов. Как видно, соответствие удовлетворительное, что говорит о правильности разработанного метода.

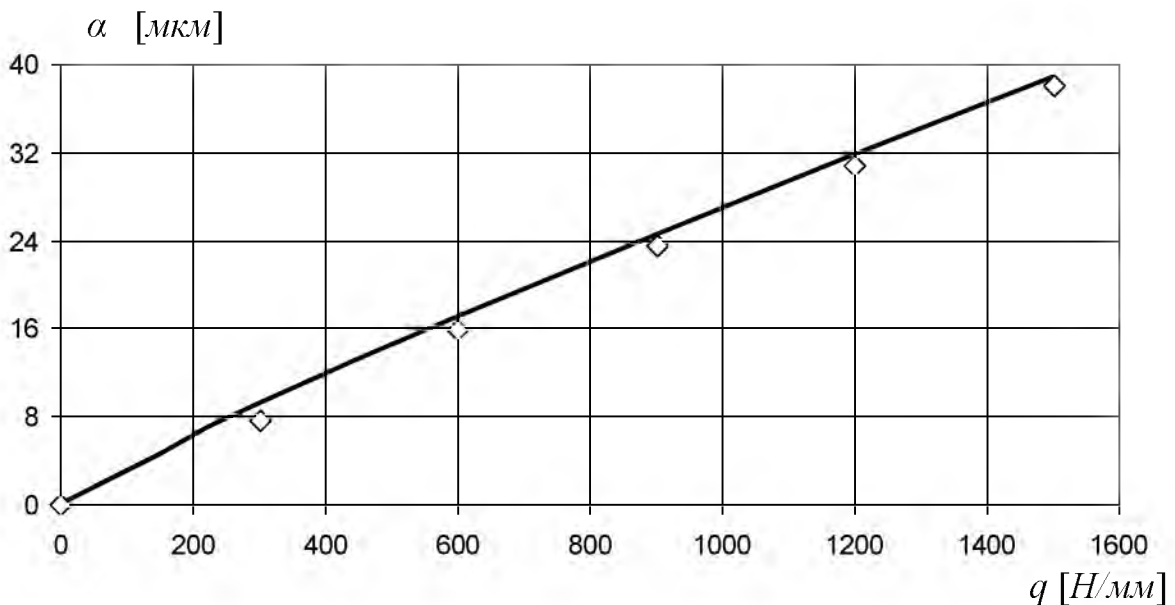
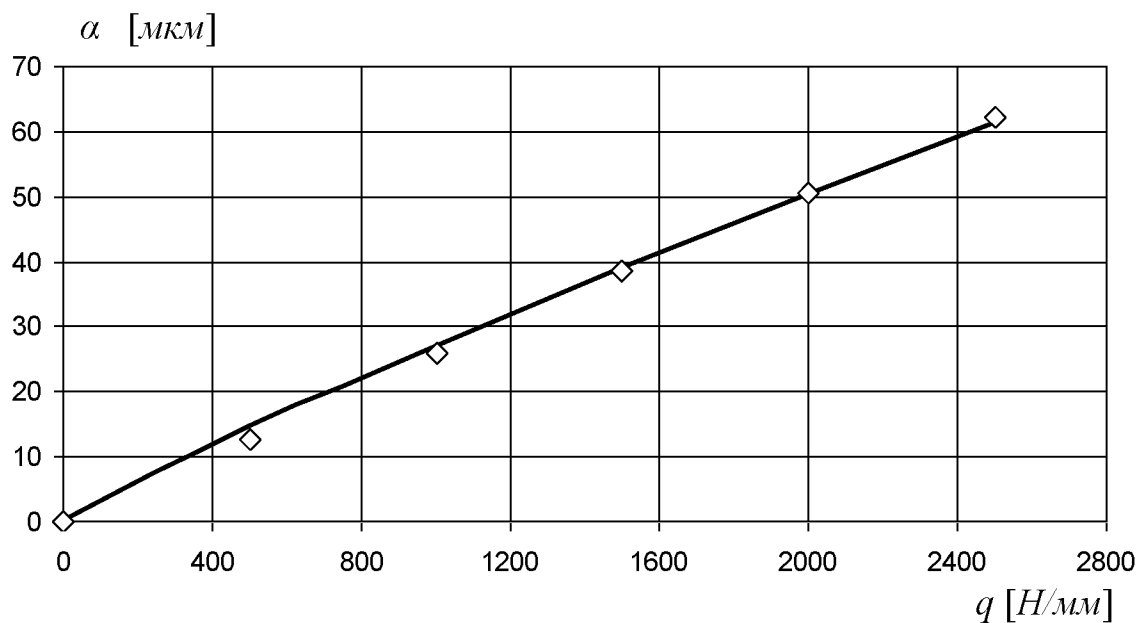
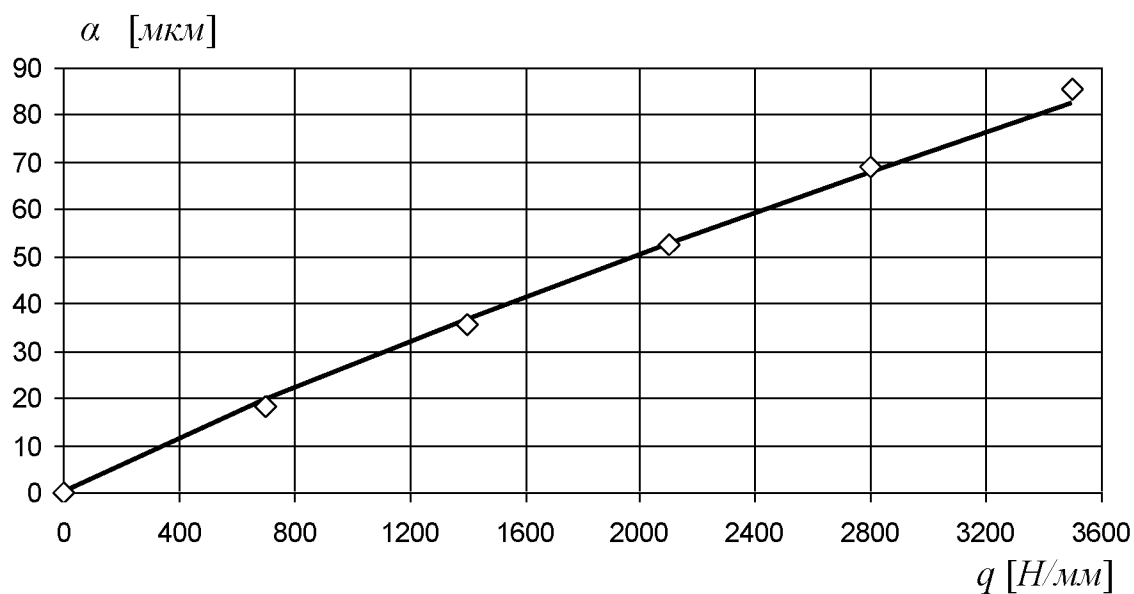


Рис.3.6 Сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных (точки) данных [161] сжатия стального ролика стальными плитами. Сближение плит от погонной нагрузки. Параметры роликов:

а) длина  $l = 50$  мм; диаметр  $2r = 12$  мм



б) длина ролика  $l=50$  мм; диаметр  $2r=20$  мм



в) длина ролика  $l=50$  мм; диаметр  $2r=30$  мм

Полученные зависимости позволяют получить также суммарную контактную деформацию ролика и цилиндрического сегмента (рис.3.7), т.е. сближение центра ролика  $A$  относительно основания сегмента  $B$  :

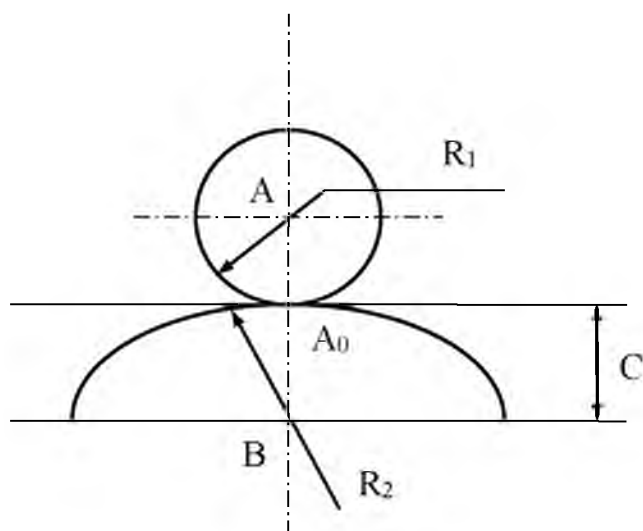


Рис.3.7

$$w_{A/B} = \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4R_1}{b} - 0,5 \right] + \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln \frac{4C}{b} - 0,214 \right],$$

или

$$w_{A/B} = \frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln 1,842 \sqrt{\frac{EC(R_1 + R_2)}{qR_2}} \right]. \quad (3.8)$$

### 3.3. Выводы по третьей главе

На основе предложенной модели контакта упругих тел конечных размеров при начальном касании по линии, разработан метод и впервые аналитически определена суммарная контактная деформация двух тел цилиндрической формы, находящихся в силовом контакте, с учетом их конечных размеров.

Сопоставление при варьировании в широком диапазоне толщины плиты  $C$  предложенного решения по определению контактной деформации прямоугольной плиты с имеющимся в литературе приближенным решением

показало, что погрешность последнего колеблется от 8 до 12 % . При уменьшении толщины  $C$  погрешность растет до 18 % .

## ГЛАВА 4. КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ (ЦИЛИНДР С ПЛОСКОСТЬЮ) В УСЛОВИЯХ ПЕРЕКОСА

### 4.1. Модель контакта цилиндров при перекосе

При расчете нагруженности машин и механизмов, содержащих зубчатые передачи и соединения (муфты) и роликовые опоры, возникает задача о контакте цилиндров с непараллельными осями, обусловленного как погрешностями изготовления и монтажа элементов, так и их упругими деформациями. Теория упругости не дает методов аналитического решения этой задачи. Отсутствие точного решения неклассической контактной задачи о сжатии цилиндров с непараллельными осями (рис 4.1) и предопределило поиск приближенных решений этой практически важной задачи.

В работе предложена физико-математическая модель контактного взаимодействия упругих тел цилиндрической формы при перекосе с использованием Винклеровской модели упругого основания. Согласно последней основание состоит из тесно расположенных линейных пружин, деформирующихся независимо друг от друга [248], для которой давление  $p(x,y)$ , действующее в направлении оси  $z$ , и соответствующий нормальный прогиб  $w(x,y)$  поверхности основания

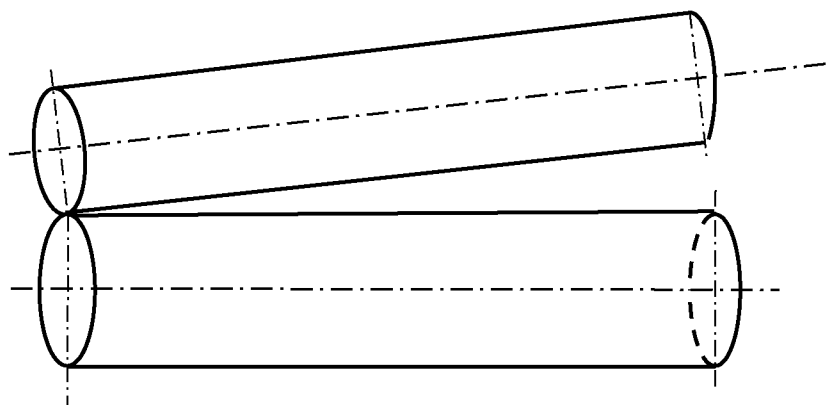


Рис.4.1. Контакт цилиндров с непараллельными осями

связаны следующей зависимостью

$$p(x, y) = k \cdot w(x, y) ,$$

где  $k$ - коэффициент постели упругого основания.

Использование этой модели упругого основания дает возможность приближенно решить поставленную задачу – контакт двух цилиндров (или цилиндра с плоскостью) при наличии перекоса  $\gamma$  между ними и определить параметры контакта: контактную деформацию  $\alpha$  ; максимальные контактные напряжения  $\sigma_{\max}$  ; максимальную полуширину  $b_\gamma$  и длину  $l_k$  площадки контакта.

Для решения поставленной задачи представим цилиндр в виде набора круглых тонких элементарных дисков (полученных рассечением тела цилиндра плоскостями, нормальными к оси цилиндра), смещенных друг относительно друга таким образом, чтобы образовался перекос  $\gamma$  (рис.4.2). Пусть длина исходного цилиндра  $l$ , тогда  $a_o \cdot n = l$  , где  $a_o$ - толщина элементарного диска,  $n$ - количество этих дисков. Получаем вместо исходного цилиндра другой- "ступенчатый", который служит расчетной моделью для исходной задачи, что позволит при приложении нагрузки каждому элементарному диску вступать в контакт без перекоса.

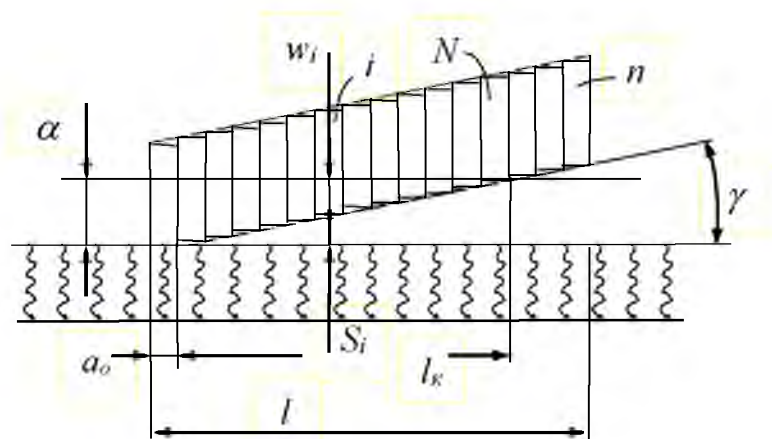


Рис.4.2



При этом очень важно, что при стремлении  $a_o \rightarrow 0$  (и естественно  $n \rightarrow \infty$ ) получим практически гладкий цилиндр, при этом, естественно, перекося останется прежним -  $\gamma$ .

4.2. Контактная деформация, концентрация контактных напряжений, длина и максимальная ширина площадки контакта при взаимодействии двух цилиндров в условиях перекося

Пусть после приложения нагрузки в контакт входят  $N$  элементарных дисков ( $N$  - й диск только вошел в контакт, но пока нагрузку не воспринимает:  $P_N=0$ ), тогда длина контактной линии  $l_k$  будет-

$$l_k = a_o \cdot N. \quad (4.1)$$

В этом случае согласно принятой модели основания уравнение равновесия определяется соотношением:

$$\sum_i^N P_i = P, \quad (4.2)$$

а уравнение совместности деформаций, перемещений и зазоров-

$$\alpha_i = W_i + S_i, \quad (4.3)$$

где  $\alpha_i, W_i, S_i, P_i$  - перемещение, контактная деформация, зазор и нагрузка на  $i$ - м элементе соответственно. Согласно (2.21) для цилиндров в отсутствии перекося контактная деформация определяется:

$$w = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \left( \ln \frac{4R}{b_H} - 0,5 \right),$$

или  $w = \frac{\delta P}{l}$ , где

$$\delta = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \left( \ln \frac{4R}{b_H} - 0,5 \right), \quad (4.4)$$

здесь  $\nu$  и  $E$  - коэффициент Пуассона и модуль упругости материала цилиндра;  $q = \frac{P}{l}$  - погонная нагрузка;  $R$  - приведенный радиус кривизны

цилиндров;  $b_H$  - полуширина площадки контакта по Герцу. Тогда для  $i$  - го элементарного диска упругая деформация будет-

$$w_i = \frac{\delta_i P_i}{l_i}, \quad (4.5)$$

где  $l_1 = l_2 = \dots = l_i = a_o$ .

Сначала рассмотрим случай, когда площадка контакта распространяется не на всю длину цилиндра, т.е.  $l_k < l$ . Зазоры  $S_i$  в (4.3) этом случае определяются:

$$S_i = (i-1)a_o\gamma; \quad i = 1; 2; 3 \dots N. \quad (4.6)$$

Следовательно, из (4.3) с учетом (4.5) и (4.6) получим

$$\alpha_i = \frac{\delta_i P_i}{l_i} + (i-1)a_o\gamma; \quad i = 1; 2; 3 \dots N, \quad (4.7)$$

где согласно принятой модели основания  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_i = \delta$ . Просуммируем уравнения (4.7)

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = \frac{\delta}{a_o} \sum_{i=1}^N P_i + a_o\gamma \sum_{i=1}^N (i-1) \quad i = 1; 2; 3 \dots N. \quad (4.8)$$

Или, так как  $\alpha_i = \alpha$ , и с учетом (4.2) из (4.8) получим

$$\alpha \cdot N = \frac{\delta}{a_o} \cdot P + a_o \cdot \gamma \cdot \frac{N-1}{2} \cdot N. \quad (4.9)$$

Преобразуем (4.5) для  $i$ - го элемента:

$$w_i = \frac{\delta_i}{l_i} \cdot P_i = \frac{\delta \cdot P_i \cdot N}{l_k};$$

следовательно (4.9) можно переписать

$$\alpha = \frac{\delta \cdot P}{l_k} + a_o \cdot \gamma \cdot \frac{N-1}{2};$$

или, так как  $N \gg 1$

$$\alpha = \frac{\delta \cdot P}{l_k} + l_k \cdot \gamma \cdot \frac{1}{2}. \quad (4.10)$$

Но так как  $l_k \cdot \gamma = \alpha$ , при условии  $\gamma \neq 0$  из зависимости (4.10) получим :

$$\alpha = \frac{\delta \cdot P \cdot \gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда, учтя, что

$$w = \frac{\delta P}{l} \equiv \alpha_H,$$

окончательно получим:

$$\alpha = \sqrt{2 \cdot \alpha_H \cdot l \cdot \gamma}, \quad (4.11)$$

где  $\alpha_H$  - контактная деформация цилиндров при отсутствии перекоса. Из (4.11) нетрудно получить величину коэффициента угла перекоса  $K_\gamma$  (коэффициент концентрации контактных деформаций) в безразмерном виде  $\alpha / \alpha_H$

$$\frac{\alpha}{\alpha_H} = \sqrt{2} \cdot \left( \frac{l \cdot \gamma}{\alpha_H} \right)^{0,5} = K_\gamma, \quad (4.12)$$

или

$$K_\gamma = \sqrt{2} \cdot \zeta^{0,5}, \quad (4.13)$$

где безразмерный загрузочный параметр  $\zeta$  определяется  $\zeta = \frac{l\gamma}{\alpha_H}$ .

Далее определим коэффициент концентрации контактных напряжений  $K_\sigma$  - как отношение максимального контактного напряжения  $\sigma_{\max}$  к номинальным (при  $\gamma = 0$ ) напряжениям  $\sigma_H$  по Герцу:

$$K_\sigma = \sigma_{\max} / \sigma_H.$$

Максимальное контактное напряжение будет на первом диске:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \equiv \sigma_{H1} = \sqrt{\frac{P_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}{l_1 \pi^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)},}$$

где  $\vartheta_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}$  ;  $i = 1; 2$ ,  $R_i$  -,  $\nu_i$  -,  $E_i$  - радиусы кривизны,

коэффициенты Пуассона и модули упругости материалов соприкасающихся

тел. Тогда, при условии  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$ , последнее соотношение можно переписать-

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \sqrt{\frac{P_1}{l_1 \pi^2 2 \mathcal{G} R}},$$

здесь  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ . Для упрощения записи последнего выражения, можно

ввести обозначение  $C_\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\pi(1-\nu^2)}}$ . С учетом последнего, запись для максимальных напряжений будет:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = C_\sigma \sqrt{\frac{P_1 E}{l_1 R}}.$$

С другой стороны, учитывая что  $P_N = 0$ , справедливо соотношение

$$P = \sum_{i=1}^N P_i = \frac{P_1 + P_N}{2} N = \frac{P_1 N}{2},$$

отсюда  $P_1 = \frac{2P}{N}$ . Следовательно с учетом (4.12) и (4.13) можно переписать

последнее выражение для  $\sigma_{\max}$  -

$$\sigma_{\max} = C_\sigma \sqrt{\frac{2PE}{l_1 NR}}.$$

Преобразуем последнее выражение:

$$\sigma_{\max} = C_\sigma \sqrt{\frac{2PE}{l_1 NR}} = C_\sigma \sqrt{\frac{2PE\gamma}{l_k R \gamma}} = C_\sigma \sqrt{\frac{2PE\gamma l}{\alpha_H K_\gamma R l}} = C_\sigma \sqrt{\frac{2PE\gamma l}{\alpha_H K_\gamma R l}}.$$

Отсюда для  $\sigma_{\max}$  окончательно получим

$$\sigma_{\max} = C_\sigma \sqrt{\frac{PE}{R l}} K_\gamma = \sigma_H \sqrt{K_\gamma}. \quad (4.13 \square)$$

Таким образом, для коэффициента концентрации контактных напряжений окончательно получим формулу

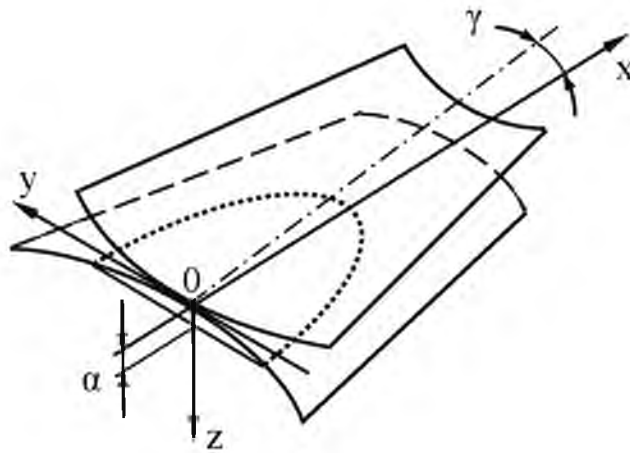
$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_H} = \sqrt{K_{\gamma}} . \quad (4.13)$$

□□□ □)

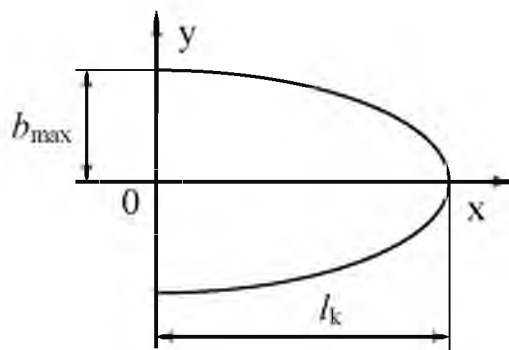
Максимальная полуширина площадки контакта (рис. 4.3а; б) будет также на первом диске и определяется:

$$b_{\max} = b_1 \equiv b_{H_1} = \sqrt{\frac{4P_1(\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2)}{l_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}} .$$

При условии  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$ , последнее соотношение можно переписать:



а)



б)

Рис. 4.3.

$$b_{\max} = b_1 = \sqrt{\frac{8P_1\mathcal{G}}{l_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}} ,$$

ИЛИ

$$b_{\max} = b_1 = \sqrt{\frac{8P_1 \mathcal{R}}{l_1}} .$$

После некоторых преобразований, аналогичным образом, как и для максимальных контактных напряжений, легко получим

$$b_{\max} = b_1 = C_b \sqrt{\frac{P_1 R}{l_1 E}} = b_H \sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha_H K_\gamma}} = b_H \sqrt{K_\gamma} ,$$

здесь для упрощения записи введено обозначение  $C_b = \sqrt{\frac{8(1-\nu^2)}{\pi}}$ .

Длина площадки контакта определяется из условия

$$l_K \gamma = \alpha = \alpha_H K_\gamma ,$$

или

$$l_K = \frac{\alpha_H}{\gamma} K_\gamma ,$$

или

$$\frac{l_K}{l} = \bar{l}_K = \frac{\alpha_H}{l\gamma} K_\gamma = \frac{K_\gamma}{\zeta} .$$

Рассмотрим далее случай, когда площадка контакта распространяется на всю длину цилиндра:  $l_K = l$ . В этом случае система уравнений (4.7) примет вид:

$$\alpha_i = \frac{\delta_i P_i}{l_i} + (i-1)a_0 \gamma ; \quad i = 1; 2; 3 \dots n .$$

Просуммируем последние уравнения,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \frac{\delta}{a_0} \sum_{i=1}^n P_i + a_0 \gamma \sum_{i=1}^n (i-1) ; \quad i = 1; 2; 3 \dots n ,$$

отсюда с учетом условия  $n \gg 1$  получим:

$$\alpha \cdot n = \frac{\delta P}{a_0} + a_0 \gamma \frac{n}{2} ,$$

или-

$$\alpha = \frac{\delta P}{l} + \frac{a_0 n}{2} \gamma ,$$

отсюда

$$\alpha = \alpha_H + \frac{l\gamma}{2}.$$

Следовательно, для коэффициента угла перекоса  $K_\gamma$  в случае  $l_K = l$  окончательно получим формулу

$$K_\gamma = \frac{\alpha}{\alpha_H} = 1 + \frac{l\gamma}{2\alpha_H} = 1 + 0,5\zeta. \quad (4.14)$$

Любопытно, что формула (4.13) для коэффициента угла перекоса в случае  $l_e < l$ , (что соответствует  $\zeta > 2$ ), и формула (4.14), что соответствует  $\zeta < 2$  (или  $l_K = l$ ) при  $\zeta = 2$  для  $K_\gamma$  дают одинаковое значение -  $K_\gamma = 2$ .

Если требуется определить параметры в силовом контакте цилиндр-плоскость в условиях перекоса (рис. 4.4), то решение аналогично изложенному (при контакте двух цилиндров при перекосе), только в этом случае вместо формулы (4.4) для определения контактной деформации двух цилиндров в отсутствии перекоса, необходимо взять формулу (3.7) для определения сближения в контакте цилиндр-плита в отсутствии перекоса:

$$w = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \left( \ln 1,842 \sqrt{\frac{EC}{q}} \right) \quad (4.15)$$

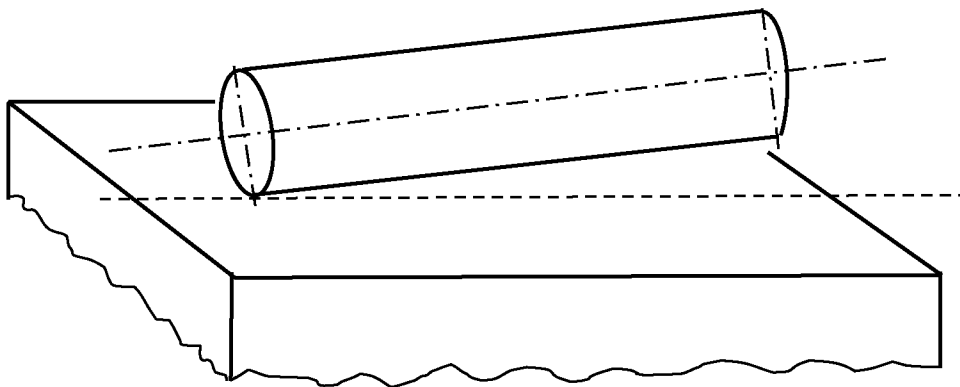


Рис.4.4.

или

$$w = \frac{\delta P}{l},$$

где  $\delta$  в этом случае будет определяться  $\delta = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \left( \ln 1,842 \sqrt{\frac{EC}{q}} \right)$ , и соответственно, при определении безразмерного нагрузочного параметра  $\zeta$  в формуле  $\zeta = \frac{l\gamma}{\alpha_H}$ , необходимо принимать  $\alpha_H \equiv w$  по формуле (4.15).

Для проверки полученных зависимостей на рис.4.5 приведено сопоставление расчетных (линии), вычисленных по формулам, и имеющимися в литературе [161] данных МКЭ контактных деформаций цилиндров при перекосе. Из этих графиков видно, что эти данные согласуются удовлетворительно. Это говорит о правильности полученных формул.

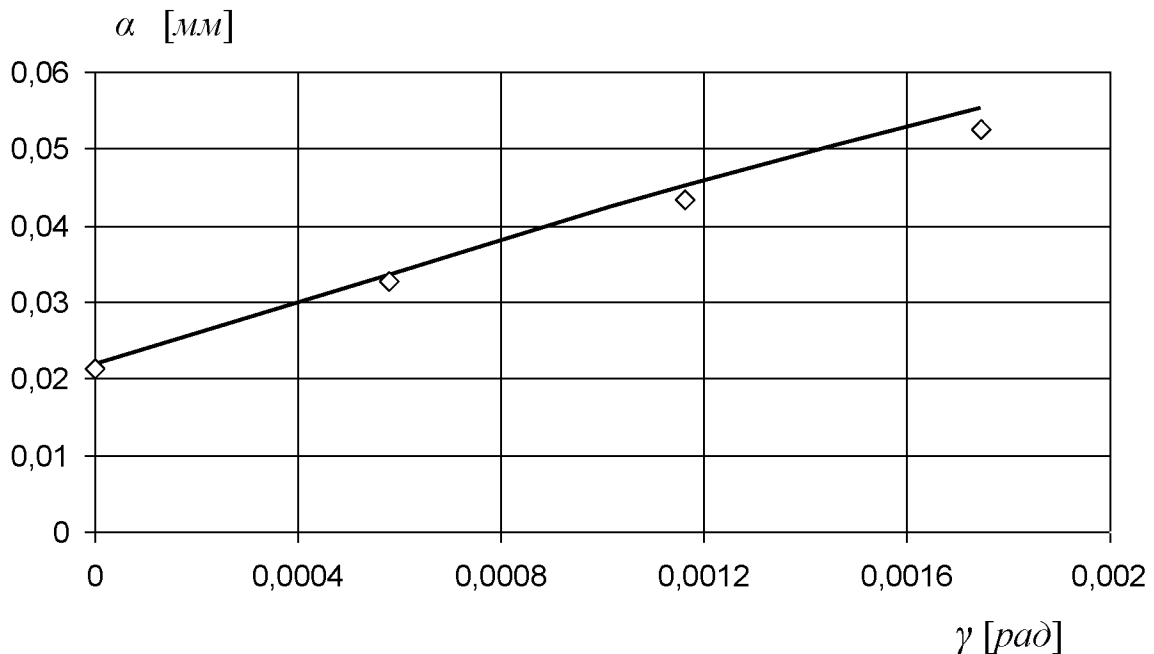
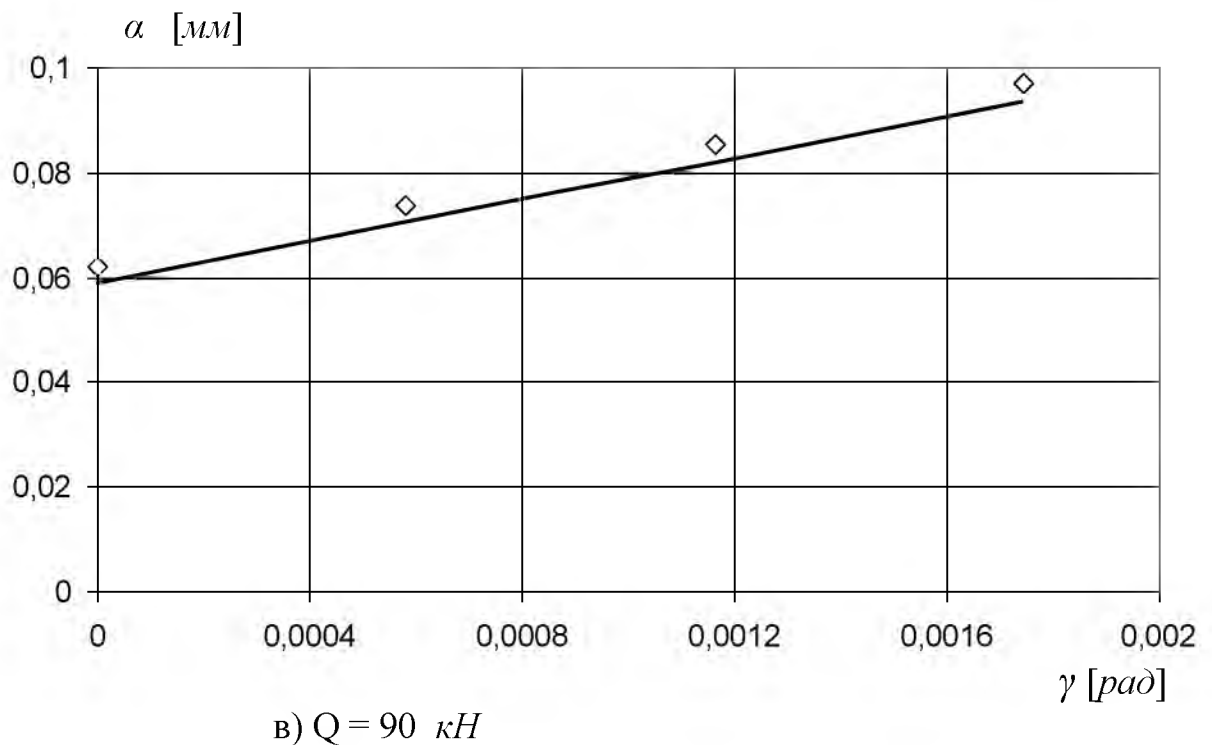
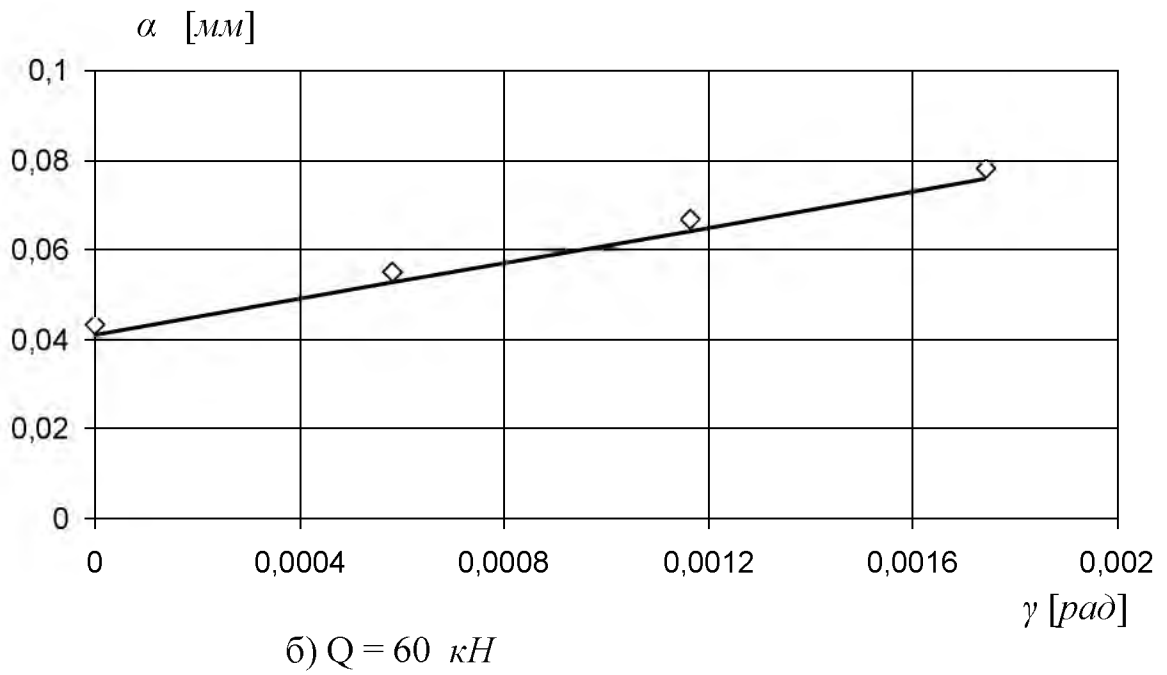


Рис.4.5. Сопоставление расчетных (линии) и данных МКЭ (точки). Зависимость контактной деформации (при силовом взаимодействии стального цилиндра с плитой при наличии перекоса) от угла перекоса (длина ролика  $l = 40 \text{ mm}$ ; диаметр ролика  $2r = 40 \text{ mm}$ ; сжимающая сила:

а)  $Q = 30 \text{ кН}$





4.3. Выводы по четвертой главе.

На основе предложенной физико- математической модели контактного взаимодействия двух цилиндров при наличии перекоса (также в контакте цилиндр- плоскость при перекосе), впервые получено аналитическое решение указанной (рис. 4.1) задачи. В замкнутом виде получены зависимости для определения контактной деформации, максимального контактного напряжения, максимальной полуширины площадки контакта и ее длины в условиях перекоса.

Полученные формулы (4.13) и (4.14) определяют значение коэффициента угла перекоса  $K_\gamma$  в безразмерном виде во всем диапазоне изменения угла перекоса (или загрузочного параметра  $l\gamma/\alpha_H$ ) и тем самым определяются все параметры контакта (контактная деформация  $\alpha$ , максимальные контактные напряжения  $\sigma_{\max}$ ; максимальное значение полуширины и длины площадки контакта  $b_\gamma$  и  $l_k$  соответственно), которые используются при расчете нагруженности и прочности зубчатых зацеплений и роликовых подшипников при перекосе.

## ГЛАВА 5. ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПО ДЛИНЕ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС В УСЛОВИЯХ ПЕРЕКОСА С УЧЕТОМ ИХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

### 5.1. Дискретно- континуальная модель зуба зубчатых колес

В настоящей главе определено напряженно- деформированное состояние зубьев зубчатых колес в условиях перекоса и на ее основе исследовано влияние изгибной деформации зубьев (по их длине) на концентрацию контактных напряжений на боковых поверхностях зубьев и на концентрацию изгибных напряжений в основании зубьев, вызванного перекосом, с учетом их конечной длины.

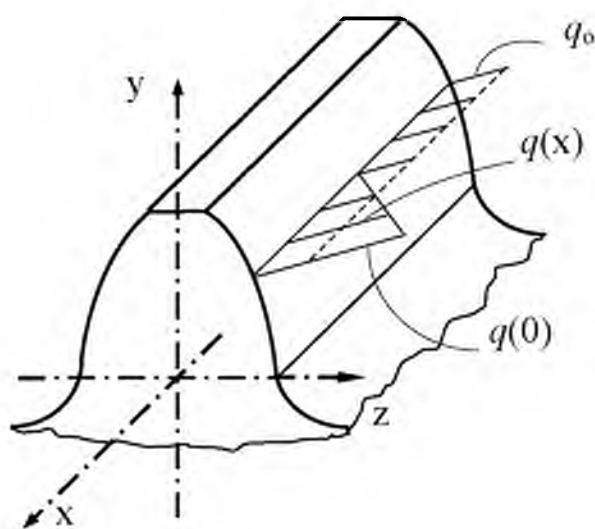


Рис. 5.1.

Теоретические и экспериментальные исследования напряженно- деформированного состояния зубьев ограниченной длины показали [231], что в качестве расчетной модели зуба зубчатых колес может быть выбрана консольная пластина (рис.5.2).

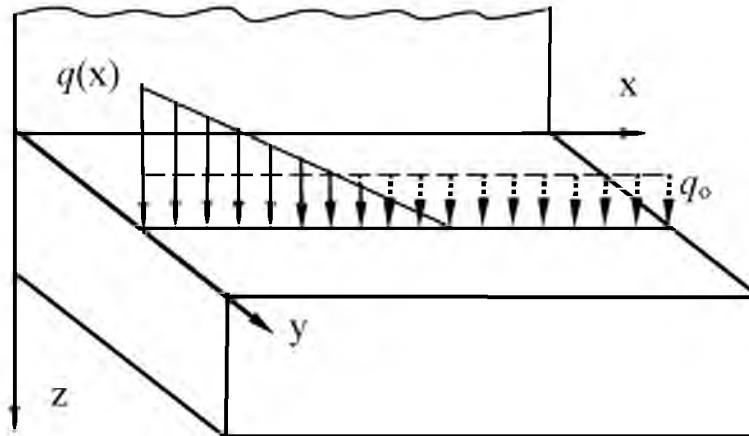


Рис. 5.2.

Известно, что уравнение равновесия пластины в дифференциальной форме, имеющее вид [199]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D},$$

где  $q=q(x,y)$  – заданная внешняя нагрузка;  $D = Es^3 / 12(1 - \nu^2)$  – цилиндрическая жесткость пластины;  $s$  – толщина пластины, может быть решено в замкнутой форме лишь в исключительных случаях. Поэтому в строительной механике пластин и оболочек известны методы [53] сведения двумерной задачи теории упругости к одномерной задаче. Суть этих методов (так называемые дискретно- континуальные расчетные модели) заключается в том, что в одном направлении сохраняются непрерывные свойства системы, а в другом направлении они задаются в дискретном виде. Математически такой подход сводится к применению метода Фурье разделения переменных в решении дифференциальных уравнений в частных производных. То есть, поверхность прогибов  $w(x, y)$  ищут в виде

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^n w_k(y) k_k(x),$$

где  $w_k(y)$  - функция, характеризующая прогиб пластины-зуба в поперечном направлении и имеющая размерность прогиба;  $k_k(x)$  - безразмерная функция, характеризующая прогиб пластины-зуба по длине. В.З.Власовым установлено, что сохраняя в ряде лишь первый член, можно получить основную часть решения дифференциального уравнения. Следовательно, решение можно искать в виде

$$w(x, y) = w(y) k(x),$$

где  $w(y)$  - характеризует изменение упругих перемещений пластины в поперечном сечении, а  $k(x)$  - затухание перемещений в продольном направлении по мере удаления от сечения, где приложена сосредоточенная сила.

Поэтому для решения задачи об определении деформации зуба-пластины в продольном направлении можно воспользоваться дискретно-континуальной моделью зуба с целью расчетной оценки влияния перекоса между боковыми поверхностями зубьев (с учетом их ограниченных размеров) на изгибные напряжения по их длине. Согласно этой модели (рис.5.3) зуб зубчатого колеса представляется в виде набора дискретных консольных балок (в поперечном направлении), объединенных между собой балками, (в продольном направлении), которые деформируются подобно балке конечной длины на упругом основании. Упругим основанием служат упомянутые консольные балки.

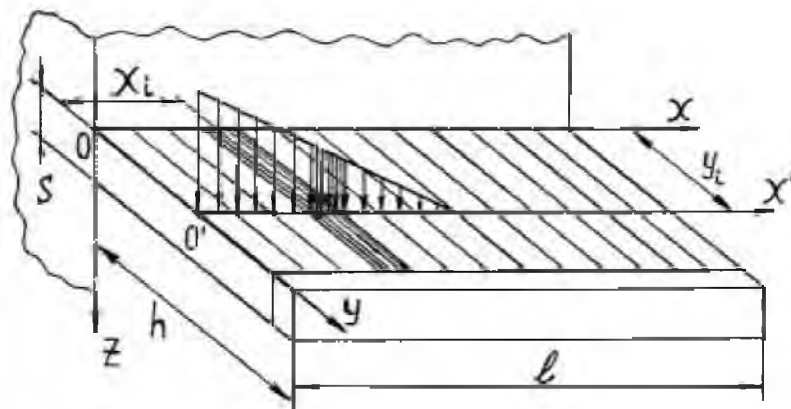


Рис.5.3

Поскольку дискретно- континуальная модель зуба построена на приближенном представлении его в виде тонкой консольной пластины, а зуб имеет соизмеримые длину консоли  $h$  и толщину  $S$ , то возникла необходимость экспериментальной проверки соответствия модели путем сопоставления расчетных и экспериментальных результатов. Для экспериментальной оценки этой модели в работе [8] проведены ряд экспериментов. Испытания проводились: во первых, на модели зуба в виде толстой консольной плиты с размерами: ширина-  $b=600$  мм; высота- $h=100$  мм; толщина-  $S=60$  мм. Во вторых, на модели зуба рейки с линейно-переменным сечением по высоте зуба с параметрами: модуль-  $m=40$  мм; угол зацепления-  $\alpha=20^\circ$ ; длина-  $l=600$  мм. В третьих, на модели прямого зуба с размерами: число зубьев-  $Z=35$ ; модуль-  $m=12$ мм; и тремя значениями ширины зубчатого венца-  $b=250$ мм; 120мм; 72мм. Результаты показали удовлетворительное их соответствие [8].

Следовательно, для решения указанной задачи (для определения функции  $k(x)$  – затухание перемещений в продольном направлении зуба-пластины по мере удаления от сечения, где приложена сосредоточенная сила) в качестве расчетной модели можно взять изгиб балки конечной длины на упругом основании при нагружении ее сосредоточенной силой и неравномерно распределенной по треугольному закону нагрузкой.

5.1.1. Решение задачи об изгибе балки конечной длины на упругом основании. Определение функции Грина для этой балки

Задачу об изгибе балки на упругом основании рассмотрели многие авторы [196, 53]. С.П.Тимошенко решил задачу об изгибе балки конечной длины на упругом основании при нагружении ее сосредоточенной силой в характерных точках (например, в середине или на концах балки). Он также

решил аналогичную задачу для бесконечной и полубесконечной балки при действии сосредоточенной силы (и момента) и равномерно распределенной нагрузки. В.З.Власов предложил метод для решения задачи об изгибе бесконечной балки и балки конечной длины под действием сосредоточенной силы, [53].

Решим задачу в общем виде, т.е. задачу изгиба балки конечной длины на упругом основании при нагружении ее произвольной распределенной нагрузкой  $q(x)$  (рис.5.4).

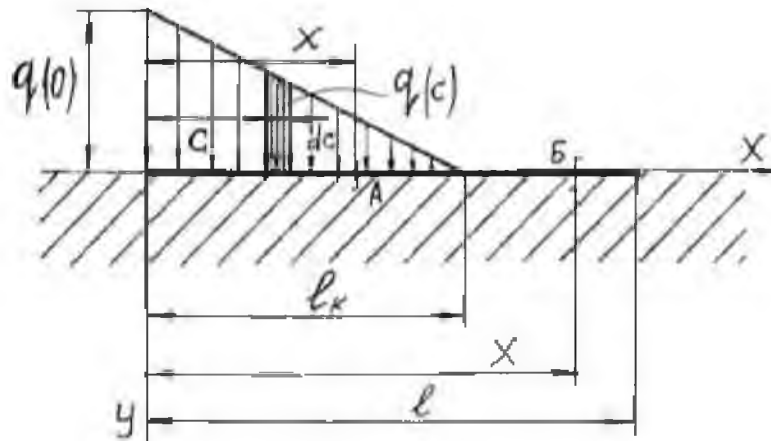


Рис.5.4. Балка конечной длины на упругом основании под действием распределенной по треугольному закону нагрузки

Воспользуемся методом С.П.Тимошенко, [196]. Предварительно решим задачу об изгибе балки конечной длины на упругом основании под действием сосредоточенной силы  $P$  (рис.5.5а), приложенной в произвольной точке, с дальнейшим интегрированием полученной функции прогиба от 0 до  $l_k$ . Для решения этой задачи воспользуемся методом наложения- т.е. решение для показанного на рис.5.5а случая получим наложением решений симметричного (рис.5.5б) и антисимметричного (рис.5.5в) случаев. А последние две задачи также решим методом наложения решений для двух видов нагружения бесконечно длинной балки. Например, задача, показанная на рис.5.5б решается путем наложения двух задач: рис.5.6б и рис.5.6в. На

рис.5.6б две силы  $P$  действуют на бесконечно длинную балку. На рис.5.6в бесконечно длинная балка нагружена внешними силами  $Q_0$  и моментами  $M_0$

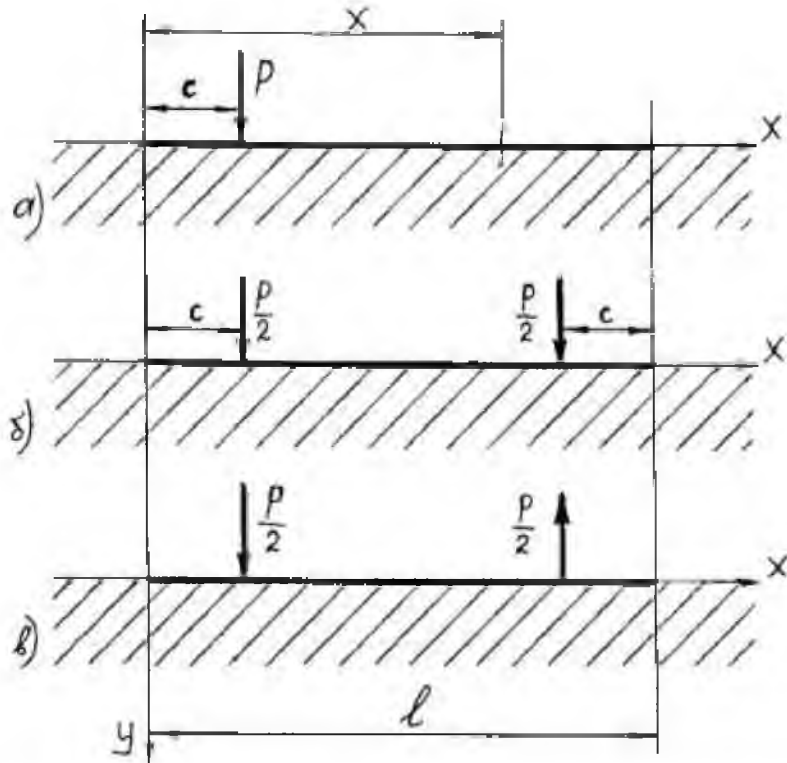


Рис.5.5. Балка конечной длины на упругом основании

в точках  $A$  и  $B$ , которые соответствуют свободным концам данной балки (рис.5.6а).

При надлежащем выборе сил  $Q_0$  и моментов  $M_0$  изгибающий момент и поперечная сила вызываемые силами  $P$  в поперечных сечениях  $A$  и  $B$  бесконечной балки, могут стать равными нулю. Тогда средний участок бесконечной балки будет находится в тех же условиях, что и конечная балка (на рис.5.6а) и все необходимые величины, относящиеся к изгибу последней балки, будут получены путем наложения решений, найденных по рис.5.6б;в.

Чтобы вывести уравнения для определения надлежащих значений  $M_0$  и  $Q_0$ , рассмотрим сечение  $A$  бесконечно длинной балки (рис.5.6б;в). Принимая начало координат в этой точке и пользуясь уравнениями для внутренних



силовых факторов балки бесконечной длины нагруженной сосредоточенной силой [196]

$$M = -EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta \cdot x)$$

$$Q = -EJ_z \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{P}{2} \theta(\beta \cdot x)$$

найдем, что изгибающий момент  $M'$  и поперечная сила  $Q'$ , вызываемые в этой точке двумя силами  $P$  (рис.5.6б) будут:

$$M' = \frac{P}{4\beta} [\psi(\beta(l-c)) + \psi(\beta \cdot c)]$$

$$Q' = \frac{P}{2} [\theta(\beta(l-c)) + \theta(\beta \cdot c)] . \quad (5.1)$$

Момент  $M''$  и поперечная сила  $Q''$ , вызываемые в той же точке силами  $Q_0$  и  $M_0$ , показанными на рис.5.6в, будут определяться

$$M'' = \frac{Q_0}{4\beta} [1 + \psi(\beta l)] + \frac{M_0}{2} [1 + \theta(\beta l)]$$

$$Q'' = -\frac{Q_0}{2} [1 - \theta(\beta l)] - \frac{M_0 \beta}{2} [1 - \varphi(\beta l)] . \quad (5.2)$$

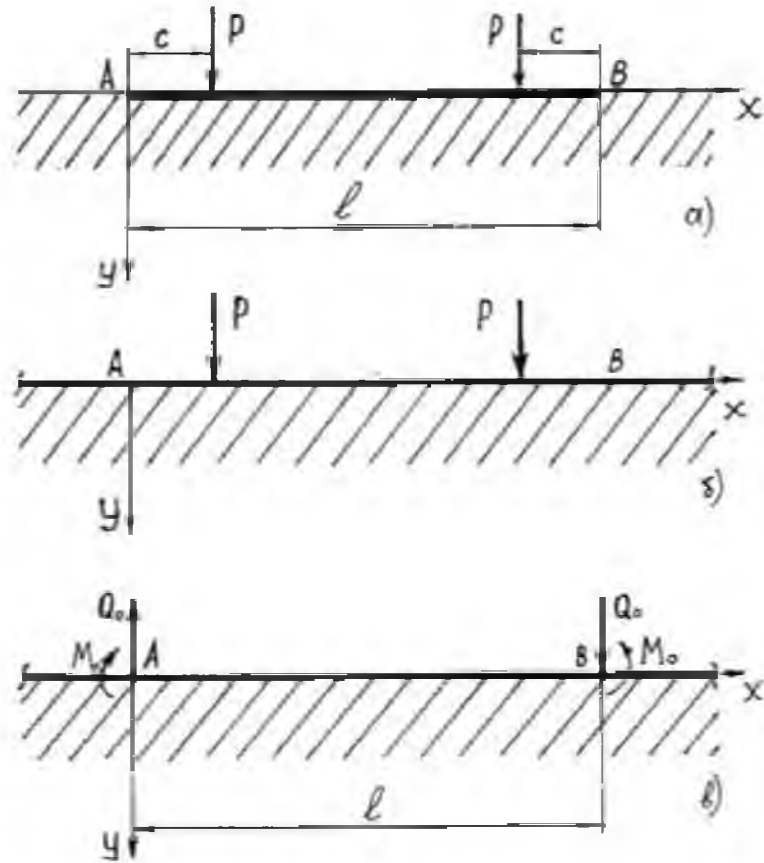


Рис.5.6. Балки конечной (а) и бесконечной длины (б); (в) на упругом основании

Таким образом, надлежащие значения  $M_0$  и  $Q_0$  для симметричной задачи теперь получаются из уравнений

$$\begin{aligned} M' + M'' &= 0 \\ Q' + Q'' &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Перепишем (5.3) с учетом (5.1) и (5.2)

$$\begin{aligned} \frac{Q_0}{4\beta} [1 + \psi(\beta l)] + \frac{M_0}{2} [1 + \theta(\beta l)] &= -\frac{P}{4\beta} [\psi(\beta(l-c)) + \psi(\beta c)] \\ -\frac{Q_0}{2} [1 - \theta(\beta l)] - \frac{M_0 \beta}{2} [1 - \phi(\beta l)] &= -\frac{P}{2} [\theta(\beta(l-c)) + \theta(\beta c)]. \end{aligned} \quad (5.3')$$

Решение (5.3') для симметричной задачи будет

$$\begin{aligned} Q_{01} &= \frac{\Delta Q_0}{\Delta} \\ M_{01} &= \frac{\Delta M_0}{\Delta}; \end{aligned}$$

где

$$\Delta Q_0 = \begin{vmatrix} -\frac{P}{4\beta} [\psi(\beta(1-c)) + \psi(\beta c)] & \frac{1}{2} [1 + \theta(\beta l)] \\ -\frac{P}{2} [\theta(\beta(1-c)) + \theta(\beta c)] & \frac{\beta}{2} [\varphi(\beta l) - 1] \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{4\beta} [1 + \psi(\beta l)] & \frac{1}{2} [1 + \theta(\beta l)] \\ \frac{1}{2} [\theta(\beta l) - 1] & \frac{\beta}{2} [\varphi(\beta l) - 1] \end{vmatrix}$$

$$\Delta M_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{4\beta} [1 + \psi(\beta l)] & -\frac{P}{4\beta} [\psi(\beta(l-c)) + \psi(\beta c)] \\ \frac{1}{2} [\theta(\beta l) - 1] & -\frac{P}{2} [\theta(\beta(l-c)) + \theta(\beta c)] \end{vmatrix}.$$

Или, после некоторых преобразований

$$Q_{01} = P \cdot \frac{[3 + 2\theta(\beta l) - \varphi(\beta l)] \times}{1 - \theta^2(\beta l) - \xi^2(\beta l) + 2\xi(\beta l)} \times \frac{[\theta(\beta(l-c)) + \theta(\beta l)] - [1 - \varphi(\beta l)] \cdot [\xi(\beta(l-c)) + \xi(\beta c)]}{1 - \theta^2(\beta l) - \xi^2(\beta l) + 2\xi(\beta l)} \quad (5.4)$$

$$M_{01} = \frac{P}{\beta} \cdot \frac{[\xi(\beta l) - 2] \times}{1 - \theta^2(\beta l) - \xi^2(\beta l) + 2\xi(\beta l)} \times \frac{[\theta(\beta(l-c)) + \theta(\beta c)] - [\theta(\beta l) - 1] \cdot [\xi(\beta(l-c)) + \xi(\beta c)]}{1 - \theta^2(\beta l) - \xi^2(\beta l) + 2\xi(\beta l)} \quad (5.5)$$

Следовательно, прогиб балки (рис.5.6а) можно записать

$$\begin{aligned} y_1(x, c) &= y_1(P) + y_2(P) + y_3(Q_0) + y_4(Q_0) + y_5(M_0) + y_6(M_0) = \\ &= \frac{P\beta}{2K} \cdot [\varphi(\beta(c-x)) + \varphi(\beta(l-c-x))] + \\ &\quad + \frac{Q_{01}\beta}{2K} [\varphi(\beta x) + \varphi(\beta(l-x))] + \frac{M_{01}\beta^2}{K} [\xi(\beta x) + \xi(\beta(l-x))] ; \end{aligned}$$

где  $Q_0$  и  $M_0$  определяются по (5.4) и (5.5).

Метод, применяемый для симметричной задачи (рис.5.6а), может быть также использован в антисимметричной задаче (рис.5.5в).

Поступая аналогичным образом, в этом случае для величин  $Q_o$  и  $M_o$  (для антисимметричной задачи) получены выражения

$$Q_{o2} = \frac{P [3 - \theta(\beta l) + \xi(\beta l)] [\theta(\beta(l-c)) - \theta(\beta l)] - [1 + \theta(\beta l) + \xi(\beta l)] \cdot [\xi(\beta(l-c)) - \xi(\beta c)]}{1 - \theta^2(\beta l) - \xi^2(\beta l) - 2\xi(\beta l)}$$

$$M_{o2} = \frac{P}{\beta} \cdot \frac{[\xi(\beta(l-c)) - \xi(\beta c)] \cdot [1 + \theta(\beta l)] - [\theta(\beta(l-c)) - \theta(\beta c)] \cdot [2 + \xi(\beta l)]}{1 - \theta^2(\beta l) - \xi^2(\beta l) - 2\xi(\beta l)}$$

Следовательно, прогиб в случае нагружения системой сил, показанной на рис.5.5в, будет определяться

$$y_2(x, c) = \frac{P\beta}{2K} \cdot [\varphi(\beta(c-x)) - \varphi(\beta(l-c-x))] + \frac{Q_{o2}\beta}{2K} [-\varphi(\beta x) + \varphi(\beta(l-x))] +$$

$$+ \frac{M_{o2}\beta^2}{K} [-\xi(\beta x) + \xi(\beta(l-x))].$$

Наконец, решение задачи, показанной на рис.5.5а будет как сумма решений  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$

$$y(x, c) = y_1(x, c) + y_2(x, c) = \frac{P/l}{K} \cdot \frac{\beta l}{4H(\beta l)} \cdot \{ 2\varphi(\beta|x-c|) \cdot H(\beta l) + A(\beta l) *$$

$$* [\theta(\beta x) \cdot \theta(\beta(l-c)) + \theta(\beta(l-x)) \cdot \theta(\beta c)] + B(\beta l) \cdot [\theta(\beta x) \cdot \theta(\beta c) + \theta(\beta(l-x)) *$$

$$* \theta(\beta(l-c))] + C(\beta l) \cdot [\xi(\beta(l+x-c)) + \xi(\beta(l-x+c))] + D(\beta l) \cdot [\xi(\beta(x+c)) +$$

$$+ \xi(\beta(2l-x-c))] + E(\beta l) \cdot [\xi(\beta x) \cdot \xi(\beta(l-c)) + \xi(\beta(l-x)) \cdot \xi(\beta c)] + F(\beta l) \times$$

$$\times [\xi(\beta x) \cdot \xi(\beta c) + \xi(\beta(l-x)) \cdot \xi(\beta(l-c))] \} = \frac{P/l}{K} \cdot f(\beta l, c, x), \quad (5.6)$$

или в безразмерном виде

$$\bar{y}(x, c) = \frac{y(x, c)}{\frac{P/l}{K}} = f(\beta l, c, x), \quad (5.7)$$

где

$$f(\beta l, c, x) = \frac{\beta l}{4H(\beta l)} \cdot \{ 2\varphi(\beta|x-c|) \cdot H(\beta l) + A(\beta l) \times$$

$$\times [\theta(\beta x) \cdot \theta(\beta(l-c)) + \theta(\beta(l-x)) \cdot \theta(\beta c)] + B(\beta l) \cdot [\theta(\beta x) \cdot \theta(\beta c) + \theta(\beta(l-x)) \times$$

$$\times \theta(\beta(l-c))] + C(\beta l) \cdot [\xi(\beta(l+x-c)) + \xi(\beta(l-x+c))] + D(\beta l) \cdot [\xi(\beta(x+c)) +$$

$$+ \xi(\beta(2l - x - c))] + E(\beta l) \cdot [\xi(\beta x) \cdot \xi(\beta(l - c)) + \xi(\beta(l - x)) \cdot \xi(\beta c)] + F(\beta l) \times \\ \times [\xi(\beta x) \cdot \xi(\beta c) + \xi(\beta(l - x)) \cdot \xi(\beta(l - c))]; \quad (5.8)$$

$$\theta(x) = e^{-x} \cdot \cos x; \quad \xi(x) = e^{-x} \cdot \sin x; \quad \varphi(x) = e^{-x} \cdot (\cos x + \sin x) = \theta(x) + \xi(x);$$

$$\psi(x) = e^{-x} \cdot (\cos x - \sin x) = \theta(x) - \xi(x); \quad H(x) = sh^2 x - \sin^2 x;$$

$$A(x) = -3e^x \cdot \sin x + shx \cdot (\cos x - \sin x); \quad B(x) = 3e^x shx - \sin x \cdot (\cos x - \sin x);$$

$$C(x) = e^x \sin x + shx \cdot (\cos x + \sin x); \quad D(x) = -e^x shx - \sin x \cdot (\cos x + \sin x);$$

$$E(x) = -e^x \sin x - shx \cdot (\cos x - \sin x); \quad F(x) = e^x shx + \sin x \cdot (\cos x - \sin x).$$

Отметим следующее важное обстоятельство. В безразмерной функции  $f(\beta l, c, x)$ :  $c$ - координата точки приложения нагрузки  $P$ ;  $x$ - координата точки, где определяем прогиб, то есть, фактически она есть суть функция Грина для этой балки.

Таким образом, уравнения (5.6)- (5.8) определяют прогиб балки конечной длины на упругом основании под воздействием произвольно приложенной сосредоточенной силы.

С помощью этих зависимостей легко получить также собственные коэффициенты влияния такой балки- для этого достаточно в них положить  $x=c$

$$y(x) = \frac{P/l}{K} \cdot \frac{\beta l}{8H(\beta l)} \cdot \{2(sh(2\beta l) - \sin(2\beta l)) - \sin(2\beta l) \cdot [\varphi(2\beta x) + \varphi(2\beta(l - x))] + \\ + (e^{2\beta l} - \cos(2\beta l)) \cdot [\psi(2\beta x) + \psi(2\beta(l - x))] + 8sh(\beta l) \cdot ch(\beta(l - 2x)) - \\ - 8\sin(\beta l) \cdot \cos(\beta(l - 2x))\}.$$

Чтобы найти прогиб балки конечной длины на упругом основании нагруженной неравномерно распределенной нагрузкой (рис.5.4), рассмотрим какую-либо точку  $A$  с координатой  $x$ . Прогиб  $dy$  в точке  $A$ , вызываемый элементарной нагрузкой  $q \cdot dc$ , получится из уравнений (5.6) путем подстановки в него  $q \cdot dc$  вместо  $P$ , что даст

$$dy = \frac{q \cdot dc}{l \cdot K} \cdot f(\beta l, c, x),$$

следовательно, прогиб в точке  $A$ , вызываемый нагрузкой  $q(c)$ , распределенной по длине  $l_k$  по треугольному закону, будет

$$y(x, l_k) = \int_0^{l_k} \frac{q(c) \cdot dc}{IK} \cdot f(\beta l, c, x);$$

при  $x \geq l_k$ ;  $c \leq l_k$ , т.е. когда т.  $A$  находится вне нагруженного участка балки;

где  $q(c) = q(0) \cdot \left(1 - \frac{c}{l_k}\right)$ ,

После интегрирования получим

$$y(x, l_k) = \frac{q_0 \cdot \beta l_k}{4K \cdot H(\beta l)} \cdot F_1(x, l_k, \beta l), \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(x, l_k, \beta l) = & \frac{1}{2\beta l_k} \cdot \{ \{ 4 \cdot H(\beta l) [-\theta(\beta x)] + A(\beta l) \times \\ & \times [-\theta(\beta x) \cdot \psi(\beta l) + \theta(\beta(l-x))] + B(\beta l) \cdot [\theta(\beta x) - \theta(\beta(l-x))] \cdot \psi(\beta l) \} + \\ & + C(\beta l) \cdot [\varphi(\beta(l+x)) + \varphi(\beta(l-x))] + D(\beta l) \cdot [\varphi(\beta x) - \\ & - \varphi(\beta(2l-x))] + E(\beta l) \cdot [-\xi(\beta x) \cdot \varphi(\beta l) + \xi(\beta(l-x))] + F(\beta l) \times \\ & \times [\xi(\beta x) - \xi(\beta(l-x))] \cdot \varphi(\beta l) \} - \frac{1}{\beta l_k} \cdot \{ 2 \cdot H(\beta l) [-\psi(\beta|x-l_k|) + \psi(\beta x)] + A(\beta l) \times \\ & \times [\theta(\beta x) \cdot \xi(\beta(l-l_k)) + \theta(\beta(l-x)) \cdot \xi(\beta l_k) - \theta(\beta x) \cdot \xi(\beta l)] + \\ & + B(\beta l) \cdot [\theta(\beta x) \cdot \xi(\beta l_k) + \theta(\beta(l-x)) \cdot \xi(\beta(l-l_k)) - \theta(\beta(l-x)) \cdot \xi(\beta l)] + \\ & + C(\beta l) \cdot [-\theta(\beta(l+x-l_k)) - \theta(\beta(l-x+l_k)) + \theta(\beta(l+x)) - \theta(\beta(l-x))] + \\ & + D(\beta l) \cdot [-\theta(\beta(x+l_k)) - \theta(\beta(2l-x-l_k)) + \theta(\beta x) + \theta(\beta(2l-x))] + \\ & + E(\beta l) \cdot [-\xi(\beta x) \cdot \theta(\beta(l-l_k)) - \xi(\beta(l-x)) \cdot \theta(\beta l_k) + \xi(\beta x) \cdot \theta(\beta l) + \xi(\beta(l-x))] + \\ & + F(\beta l) \cdot [-\xi(\beta x) \cdot \theta(\beta l_k) - \xi(\beta(l-x)) \cdot \theta(\beta(l-l_k)) + \xi(\beta x) + \xi(\beta(l-x)) \cdot \theta(\beta l)] \} \}; \end{aligned}$$

и

$$y(x, l_k) = \int_0^x \frac{q(c) \cdot dc}{IK} \cdot f(\beta l, c, x) + \int_0^{l_k-x} \frac{q(c) \cdot dc}{IK} \cdot f(\beta l, c, x)$$

при  $x \leq l_k$ ;  $c \leq l_k$ , т.е. когда точка  $A$  находится внутри нагруженного участка балки. После интегрирования последнего уравнения получим

$$y(x, l_k) = \frac{q_0 \cdot \beta l_k}{4K \cdot H(\beta l)} \cdot F_2(x, l_k, \beta l), \quad (5.10)$$

где

$$\begin{aligned} F_2(x, l_k, \beta l) = & \frac{1}{2\beta l_k} \cdot \{ \{ 4 \cdot H(\beta l) [2 - \theta(\beta x)] + A(\beta l) \times \\ & \times [-\theta(\beta x) \cdot \psi(\beta l) + \theta(\beta(l-x))] + B(\beta l) \cdot [\theta(\beta x) - \theta(\beta(l-x))] \cdot \psi(\beta l) \} + \\ & + C(\beta l) \cdot [-\varphi(\beta(l+x)) + \varphi(\beta(l-x))] + D(\beta l) \cdot [\varphi(\beta x) - \\ & - \varphi(\beta(2l-x))] + E(\beta l) \cdot [-\xi(\beta x) \cdot \varphi(\beta l) + \xi(\beta(l-x))] + F(\beta l) \times \\ & \times [\xi(\beta x) - \xi(\beta(l-x))] \cdot \varphi(\beta l) \} - \frac{1}{\beta l_k} \cdot \{ 2 \cdot H(\beta l) \cdot [4\beta x - \psi(\beta l_k - x)] + \psi(\beta x) \} + \\ & + A(\beta l) \times [\theta(\beta x) \cdot \xi(\beta(l-l_k)) + \theta(\beta(l-x)) \cdot \xi(\beta l_k) - \theta(\beta x) \cdot \xi(\beta l)] + \\ & + B(\beta l) \cdot [\theta(\beta x) \cdot \xi(\beta l_k) + \theta(\beta(l-x)) \cdot \xi(\beta(l-l_k)) - \theta(\beta(l-x)) \cdot \xi(\beta l)] + \\ & + C(\beta l) \cdot [-\theta(\beta(l+x-l_k)) - \theta(\beta(l-x+l_k)) + \theta(\beta(l+x)) + \theta(\beta(l-x))] + \\ & + D(\beta l) \cdot [-\theta(\beta(x+l_k)) - \theta(\beta(2l-x-l_k)) + \theta(\beta x) + \theta(\beta(2l-x))] + \\ & + E(\beta l) \cdot [-\xi(\beta x) \cdot \theta(\beta(l-l_k)) - \xi(\beta(l-x)) \cdot \theta(\beta l_k) + \xi(\beta x) \cdot \theta(\beta l) + \xi(\beta(l-x))] + \\ & + F(\beta l) \cdot [-\xi(\beta x) \cdot \theta(\beta l_k) - \xi(\beta(l-x)) \cdot \theta(\beta(l-l_k)) + \xi(\beta x) + \xi(\beta(l-x)) \cdot \theta(\beta l)] \} \}; \end{aligned}$$

Для удобства проведения расчетов, целесообразно прогиб в (5.9) и (5.10) записать в безразмерном виде, для этого максимальное значение нагрузки  $q(0)$  в точке  $x=0$  лучше представить в виде

$$\frac{1}{2} q(0) \cdot l_k = P = q_{cp} \cdot l;$$

откуда

$$q(0) = \frac{2P}{l_k} = \frac{2q_{cp}}{\bar{l}_k}, \quad (5.11)$$

где  $q_{cp}$  равномерно распределенная нагрузка по длине  $l$   $q_{cp} = \frac{P}{l}$ ;  $\bar{l}_k = \frac{l_k}{l}$ ;

следовательно, уравнения (5.9) и (5.10) в безразмерном виде будут

$$\bar{y}(x, l_k) = \frac{y(x, l_k)}{q_{cp} / K} = \frac{\beta l_k}{4H(\beta l)} \cdot F_{1,2}(x, l_k, \beta l). \quad (5.12)$$

Таким образом, полученные уравнения (5.6)- (5.12) позволяют полностью решить задачу об изгибе балки конечной длины на упругом основании под действием как сосредоточенной силы, так и неравномерно распределенной нагрузки (в данном случае распределенной по треугольному закону).

Для проверки соответствия полученного решения задачи об изгибе балки конечной длины на упругом основании с прогибом зуба- пластины в продольном направлении (соответственно, и для оценки соответствия дискретно- континуальной модели зуба с балкой конечной длины на упругом основании), на рис.5.7 показаны расчетные (линии 1,2 и 3) величины затухания прогиба балки конечной длины на упругом основании под действием сосредоточенной силы  $P$  по длине  $\bar{x} = x/l$  при варьировании координаты  $\bar{c} = c/l$  точки приложения (1- $\bar{c}=0,10$ ; 2-0,23; 3-0,50). На этом же

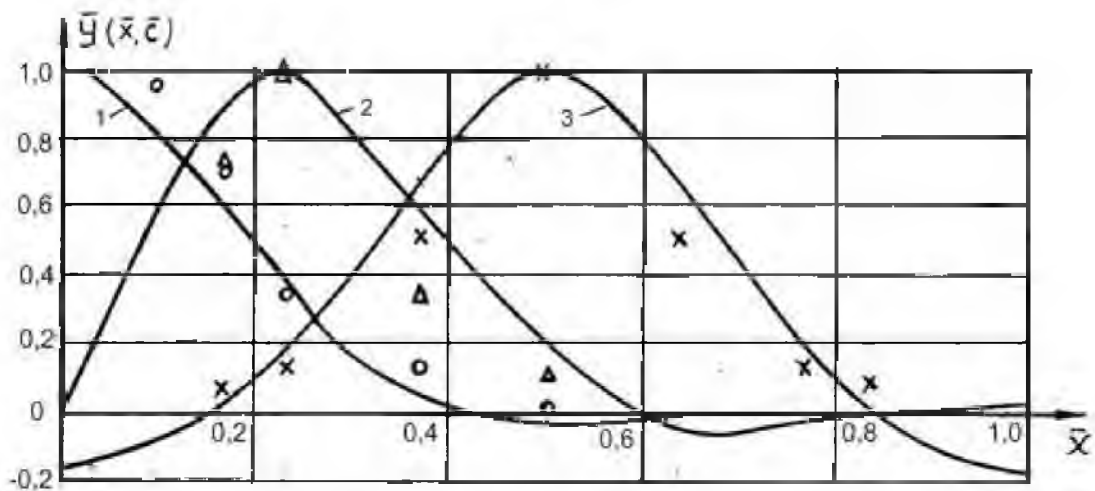


Рис.5.7. Сопоставление величин затуханий прогибов балки конечной длины на упругом основании (расчетные, линии) и пластины (экспериментальные, точки) под действием сосредоточенной нагрузки  $P$  по длине  $\bar{x} = x/l$  при варьировании координаты  $\bar{c} = c/l$  точки приложения силы (1- $\bar{c}=0,10$ ; 2-0,23; 3-0,50).



графике показаны экспериментальные значения затухания прогиба, обозначенные значками ( $\circ - \bar{c} = 0,10$ ;  $\Delta - 0,23$ ;  $\times - 0,50$ ), консольной пластины [8]. Из этого сопоставления расчетных и экспериментальных данных следует, что зуб действительно в продольном направлении деформируется подобно балке конечной длины на упругом основании.

Для установления связи между безразмерным параметром балки  $\beta \cdot l$  и размерами зуба обратимся к работе [8], где показано, что параметры эквивалентной балки на упругом основании должны зависеть от координаты точки приложения силы по высоте зуба  $Y_p$ , т.е. с уменьшением последней параметр балки  $\beta$  должен увеличиваться. По результатам экспериментальных исследований для консольных пластин в работе [8] получена зависимость  $\beta = \beta(Y_p)$  для безразмерного параметра в виде

$$\beta \cdot h = (1,1 \cdot Y_p)^{-1}, \quad (5.13')$$

где  $h$  - высота зуба,  $Y_p = y_p / h$ ,  $y_p$  - координата точки приложения силы по высоте зуба. Из (5.13') легко получить

$$\beta l = L / (1,1 Y_p), \quad (5.13)$$

где  $L = l / h$  - безразмерная длина зуба в долях высоты,  $\beta l$  - безразмерный параметр длины балки [196],

$$\beta l = (Kl^4 / 4EI)^{1/4};$$

где  $K$  - коэффициент жесткости упругого основания,  $EI$  - жесткость балки на изгиб,  $l$  - длина балки.

## 5.2. Определение деформативной составляющей угла перекоса

Определение параметров контакта, в том числе и максимальных контактных давлений, становится возможным, если учесть деформативную составляющую кривизны зубьев и угла перекоса между образующими зубьев в продольном направлении. Кроме того, износ зубьев, изменяя их геометрию

в процессе работы зубчатой передачи, также влияет на уровень контактной напряженности зубьев. Таким образом, для корректного определения уровня контактных напряжений на боковых поверхностях зубьев необходимо учесть три фактора: перекос, деформацию и износ зубьев.

Для определения деформации зуба в продольном направлении, как отмечено выше, в качестве расчетной принята дискретно-континуальная модель зуба, согласно которой зуб в продольном направлении деформируется подобно балке конечной длины на упругом основании (рис.5.8).

Для определения влияния изгибной деформации зубьев в продольном направлении на уровень их контактной напряженности многократно решена прямая задача (определение перемещений зуба при распределении

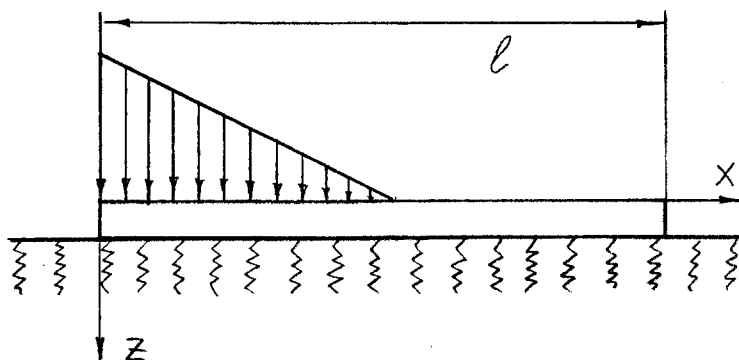


Рис.5.8 Балка на упругом основании

контактных давлений в пределах длины зоны нагружения по закону треугольника) при варьировании  $\bar{l}_k = l_k / l$  от 0 до 1. По результатам расчета изгибной деформации зуба (балки) в продольном направлении получена зависимость для относительной деформации  $\bar{W}(\bar{x})$  в текущей точке  $\bar{x} = x / l_k$  (рис.5.9) в безразмерном виде:

$$\bar{W}(\bar{x}) = \frac{W(\bar{x}) - W(\bar{l}_k)}{W(0) - W(\bar{l}_k)},$$

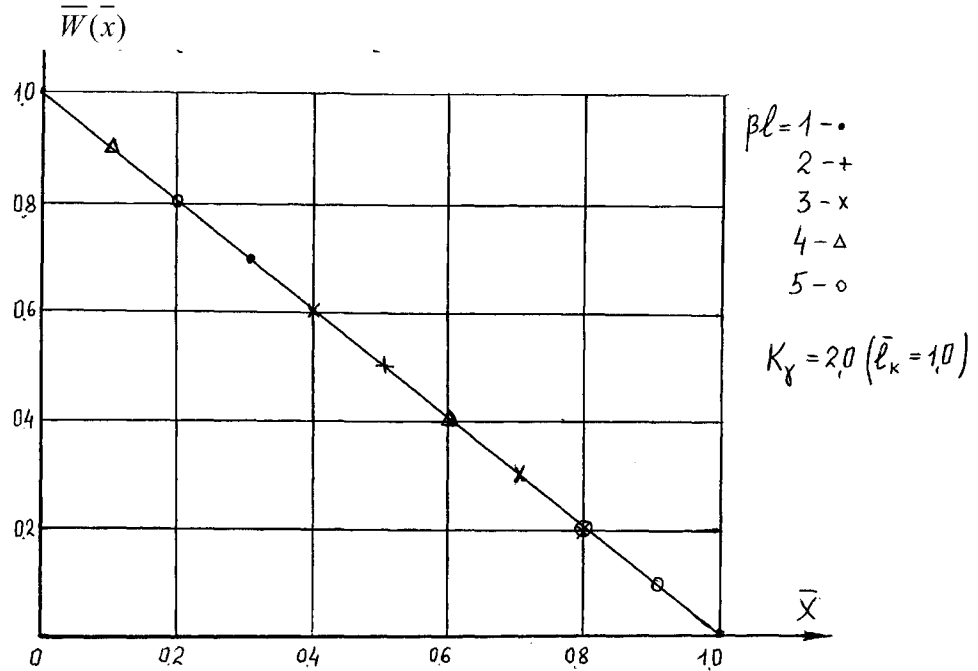


Рис. 5.9 Расчетные относительные величины изгибной деформации балки на упругом основании

где  $W(0)$ ,  $W(\bar{l}_k)$ ,  $W(\bar{x})$  - прогиб  $y(x, l_k)$  балки (деформации зуба- пластины) в крайних и текущей точках зоны нагружения.

Анализ результатов расчетов показал, что функция  $\bar{W}(\bar{x})$  близка к линейной во всем диапазоне изменения параметров  $\beta l$  и  $l_k$ . Незначительная нелинейность несущественно искажает характер изменения изгибной деформации по длине зуба и может не учитываться при расчетах. Таким образом, с высокой точностью (погрешность не более 7 %) можно считать, что для зубьев с прямолинейной образующей, изгибная деформация зуба не изменяет очертания образующей в зоне нагружения — она по-прежнему остается прямолинейной (рис.5.10), но поворачивается к первоначальному положению на угол  $\gamma_{деф}$ , т.е. часть технологического угла перекоса  $\gamma_T$  компенсируется в результате упругой деформацией зуба, и расчетный угол перекоса  $\gamma$  будет определяться соотношением

$$\gamma = \gamma_T - \gamma_{\text{аао}} = \gamma_T \left( 1 - \frac{\gamma_{\text{о}}}{\gamma_{\text{аао}}} \right). \quad (5.14')$$

При определении деформативной составляющей  $\gamma_{def}$  угла перекося зубьев (см. рис.5.10) обратим внимание на два момента. Во-первых, угол  $\gamma_{def}$  выражается через максимальную изгибную деформацию зуба- пластины

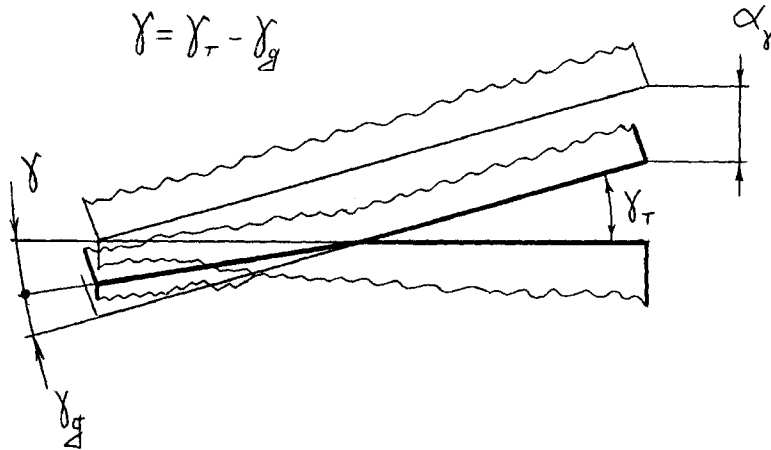


Рис.5.10 Неполное прилегание зубьев при перекосе

(на торце балки на упругом основании)  $W(0)$  следующим образом (рис.11):

$$\gamma_{def} = \frac{W(0) - W(l_k)}{l_k} = K_{\gamma i} \frac{W_0}{l} , \quad (5.14)$$

где  $W_0$  - деформация зуба- пластины при равномерном распределении нагрузки по всей его длине;

$$K_{\gamma i} = [\bar{W}(0) - \bar{W}(l_k)] / \bar{l}_k \quad (5.15)$$

- коэффициент упругого перекося;

$$\bar{W}(0) = \frac{W(0)}{W_0} ; \bar{W}(l) = \frac{W(l)}{W_0}$$

- безразмерные деформации зуба- пластины (балки на упругом основании) в крайних точках зоны нагружения  $l_k$ .

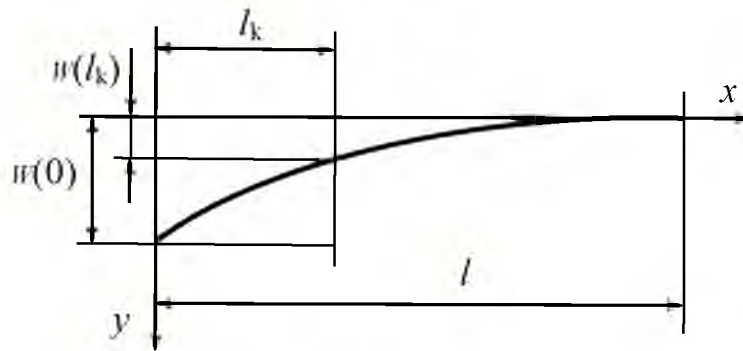


Рис. 5.11

Во-вторых, при распределении контактных давлений в пределах зоны нагружения  $l_k$  по закону треугольника связь между контактным давлением  $q(0)$  на торце зуба и контактным давлением  $q_0$  при равномерном распределении нагрузки по длине зуба имеет вид:

$$\frac{1}{2}q(0)l_k = q_0l = P,$$

или

$$q(0) = 2q_0 / \bar{l}_k = K_\gamma q_0, \quad (5.16)$$

где  $K_\gamma$  — коэффициент концентрации контактных давлений. Поэтому все расчеты проведены для-

$$P = q_0l = \text{const}.$$

Результаты расчета коэффициента упругого перекоса  $K_{\gamma 0}$  в зависимости от  $K_\gamma(l_k)$  по соотношениям (5.14) и (5.15) при варьировании  $\beta l$  приведены на рис.5.12, из которого следует: при  $K_\gamma = 1$  коэффициент  $K_{\gamma 0} = 0$ , т. е. упругий перекося отсутствует, а в диапазоне изменения  $1 < K_\gamma < 2$  коэффициент  $K_{\gamma 0}$  практически не зависит от относительной жесткости

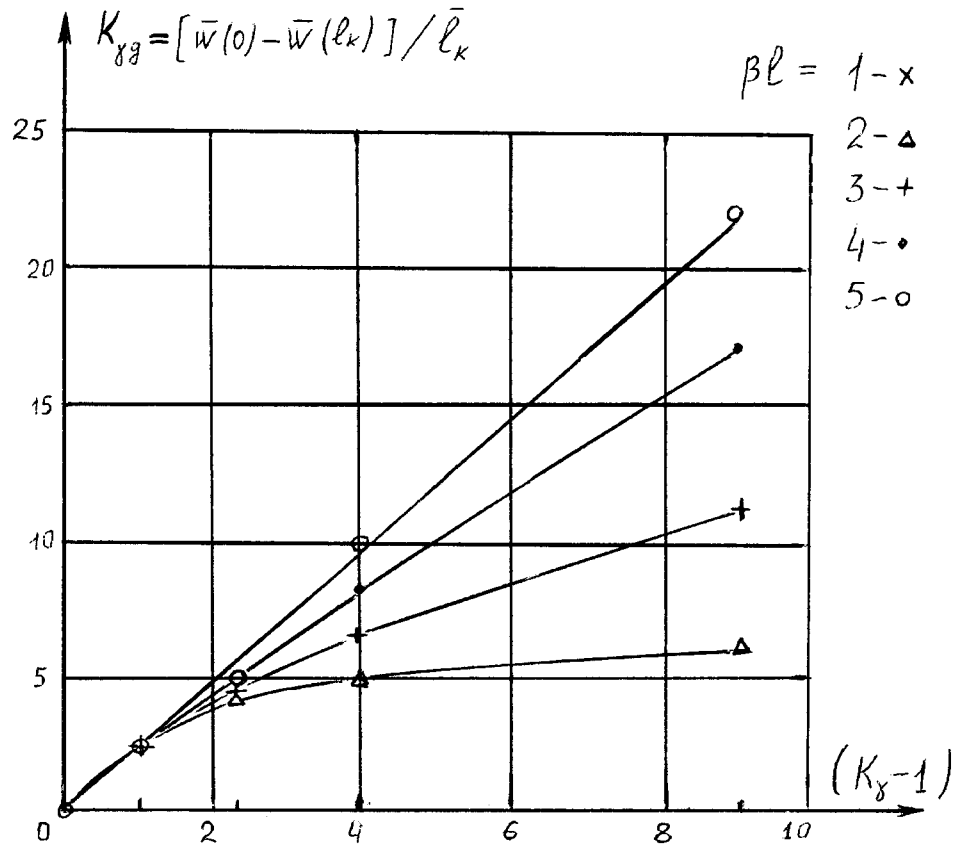


Рис.5.12 Зависимость коэффициента упругого перекоса  $K_{\gamma\delta}$  от  $K_{\gamma}$  балки на упругом основании при варьировании безразмерного параметра длины

зубьев  $\beta l$  и изменяется по линейной зависимости. С ростом коэффициента  $K_{\gamma}$  наблюдается отклонение функции  $K_{\gamma\delta}(K_{\gamma})$  от линейной зависимости, причем большим значениям  $\beta l$  соответствует больший коэффициент  $K_{\gamma\delta}$ . Для дифференцированного учета влияния обоих факторов  $K_{\gamma}$  и  $\beta l$  на коэффициент  $K_{\gamma\delta}$  и установления эмпирической зависимости между ними, результаты расчета коэффициента  $K_{\gamma\delta}$  по соотношению (5.15) подвергнуты дополнительной обработке: во-первых, были выполнены расчеты относительной величины коэффициента

$$\bar{K}_{\gamma\delta} = K_{\gamma\delta}(K_{\gamma}) / K_{\gamma\delta}(10) \tag{5.17}$$

от коэффициента

$$\bar{K}_\gamma = \frac{1}{9}(K_\gamma - 1), \quad (5.18)$$

полученная зависимость показана на рис. 5.13; Во-вторых, были

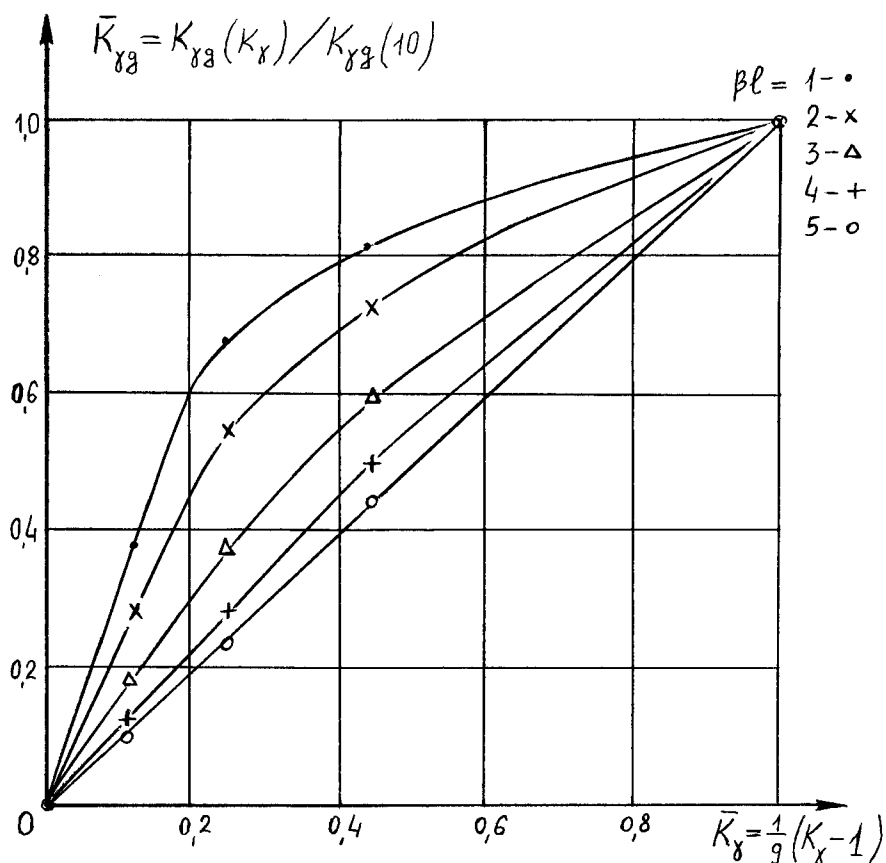


Рис.5.13 Зависимости относительных величин коэффициентов упругого перекося от угла перекося

проанализированы при  $K_\gamma = 10$  значения коэффициентов  $K_{\gamma\vartheta}(10)$  для различных  $\beta l$ . Очевидно, что связь между  $\bar{K}_{\gamma\vartheta}$  и  $\bar{K}_\gamma$  может быть представлена в виде-

$$\bar{K}_{\gamma\vartheta} = \bar{K}_\gamma^{n(\beta l)}. \quad (5.19)$$

На основании расчетов для показателя степени  $n(\beta l)$  получена зависимость:

$$n(\beta l) = 0,41 (\beta l)^{0,56}, \quad (5.20)$$

а для

$$K_{\gamma\vartheta}(10) = 2,82 (\beta l)^{1,3}. \quad (5.21)$$

Следовательно:

$$K_{\gamma\partial} = 2,82 (\beta l)^{1,3} \left[ \frac{1}{9} (K_{\gamma} - 1) \right]^{n(\beta l)} \quad (5.22)$$

причем  $0 < K_{\gamma} < 10$ ; и  $2 < \beta l < 7$ .

Для большинства зубьев, у которых  $\beta l = 3$ , зависимость (5.22) упрощается:

$$K_{\gamma\partial} = 2,222 (K_{\gamma} - 1)^{0,759} . \quad (5.23)$$

Объединяя зависимости (5.14) и (5.22), получим связь между деформативной составляющей угла перекоса между зубьями и коэффициентом концентрации контактных давлений  $K_{\gamma}$  в виде:

$$\gamma_{\text{деф.}} = 2,82 \beta l^{1,3} \left[ \frac{1}{9} (K_{\gamma} - 1) \right]^{n(\beta l)} \frac{W_0(Y_P)}{l}; \quad (5.24)$$

где  $0 < K_{\gamma} < 10$ .

Необходимо отметить, что соотношение (5.24) еще не может быть использовано для определения угла  $\gamma_{\text{деф.}}$ , так как коэффициент  $K_{\gamma}$  зависит от  $\gamma_{\text{деф.}}$ . Используя зависимость между коэффициентом угла перекоса  $K_{\gamma}$  и нагрузочным параметром  $\frac{l\gamma}{\Delta_H}$ , полученной в с учетом формулы (5.14'),

после некоторых преобразований (5.24) получим выражение:

$$\frac{\gamma_{\partial} / \gamma_T}{(1 - \gamma_{\partial} / \gamma_T)^{\frac{2}{3}n(\beta l)}} = 2,82 \beta l^{1,3} \left( \frac{0,65}{9} \right)^{n(\beta l)} \left( \frac{l\gamma_T}{\Delta_H} \right)^{\frac{2}{3}n(\beta l)} \frac{W_0(Y_P)}{l\gamma_T} . \quad (5.26)$$

Анализ левой части этого соотношения показал, что она может быть представлена в следующем виде (рис.5.14):

$$\Gamma \left( \frac{\gamma_{\partial}}{\gamma_T} \right) = \frac{\gamma_{\partial} / \gamma_T}{(1 - \gamma_{\partial} / \gamma_T)^{\frac{2}{3}n(\beta l)}} = K \cdot (\gamma_{\partial} / \gamma_T)^{5/3} . \quad (5.27)$$

Зависимость коэффициента  $K$  от  $\beta l$  на основе расчетных данных можно определить эмпирическим выражением :



$$K=1,48 (\beta l)^{0,42} . \tag{5.28}$$

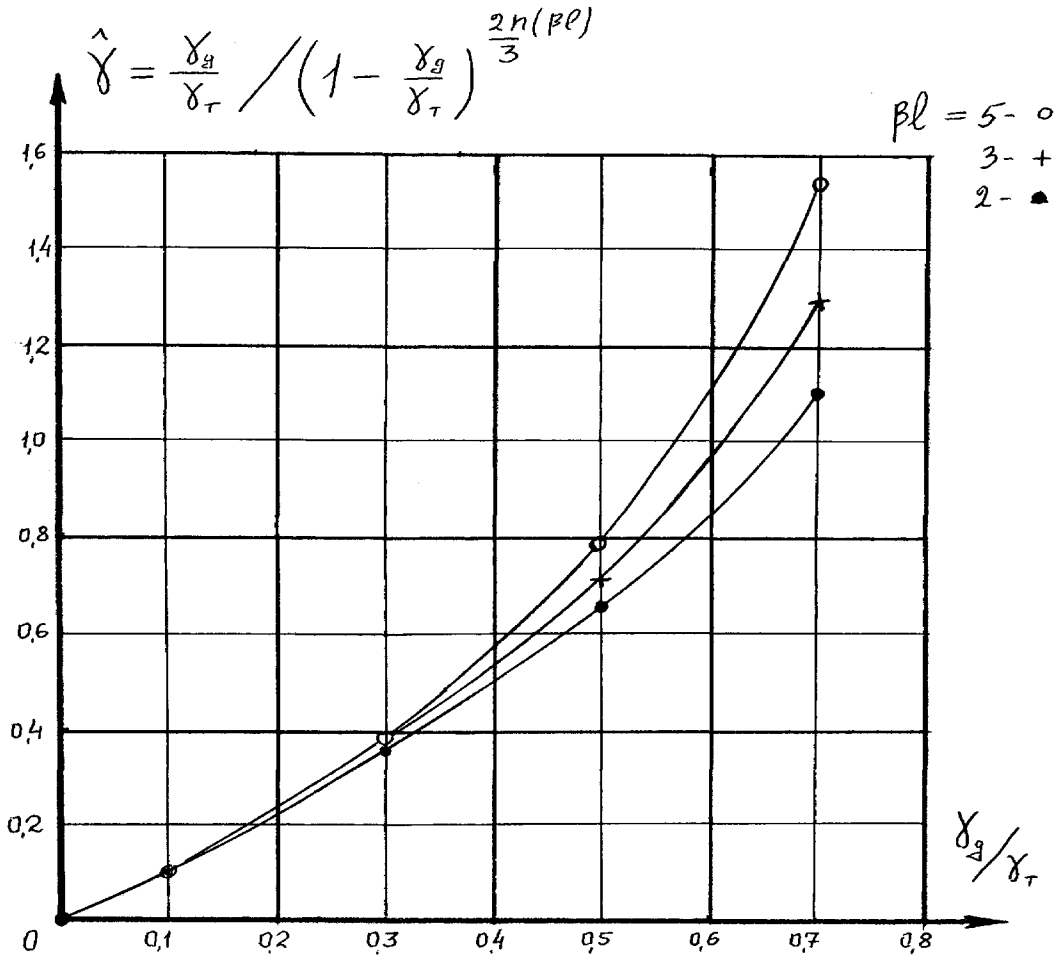


Рис. 5.14

Тогда, после преобразования выражения (5.26) с учетом формул (5.28) и (5.27) окончательно получим соотношение углов перекоса:

$$\gamma_d / \gamma_T = 0,597(\beta l)^{0,11} \left(\frac{\Delta_H}{l\gamma_T}\right)^{0,391(\beta l)^{-0,25}} \left(\frac{W_0(Y_P)}{\Delta_H}\right)^{3/5} . \tag{5.29}$$

Как показано в работе [8], отношение изгибной деформации к контактной  $\frac{W_0(Y_P)}{\Delta_H}$  для точки на делительной окружности ( $Y_P=0,56$ ) можно принять равным 0,76. Тогда уравнение (5.29) преобразуется к виду

$$\gamma_d / \gamma_T = 0,506(\beta l)^{0,11} \left(\frac{\Delta_H}{l\gamma_T}\right)^{m_0} , \tag{5.30}$$

где  $m_0 = 0,296$ .

Для большинства колес при  $\beta l = 3$  с учетом формулы (5.13) из уравнения (5.30) получим:

$$\gamma_{\delta} / \gamma_T = 0,534 L^{0,11} \left( \frac{\Delta_H}{l \gamma_T} \right)^{0,296} = 0,571 \left( \frac{\Delta_H}{l \gamma} \right)^{0,296}. \quad (5.31)$$

Расчетные зависимости (5.30) и (5.31) могут быть использованы для учета компенсирующего влияния изгибной деформации зубьев. Использование этих формул позволяет определить расчетный угол перекоса:

$$\gamma = \gamma_T - \gamma_{\ddot{a}} = \gamma_T \left( 1 - \frac{\gamma_{\ddot{a}}}{\gamma_{\dot{o}}} \right).$$

Таким образом, установлено, что учет изгибной деформации зуба-пластины с прямолинейной образующей в продольном направлении на контактную нагруженность может быть выполнен с использованием коэффициента угла перекоса  $K_{\gamma}$ , полученным в главе 4, где деформативная составляющая угла перекоса  $\gamma_{\delta} / \gamma_T$  определяется из выражения (5.31).

### 5.3. Концентрация изгибных напряжений в основании зубьев зубчатых колес при перекосе

Перейдем теперь к определению коэффициента концентрации изгибных напряжений в основании зубьев зубчатых колес при перекосе. Согласно (5.11) коэффициент концентрации контактных давлений  $K_{\gamma}$  определим как

$$K_{\gamma} = \frac{q(0)}{q_{cp}} = \frac{2}{l_k}. \quad (5.33)$$

Для оценки влияния перекоса на изгибные напряжения в произвольной точке по длине зубьев зубчатых колес, проанализируем полученные выше зависимости изменения прогиба  $\bar{y}(x, l_k)$  по зависимостям (5.12) зуба-балки

по длине  $x$  при варьировании длины  $l_k$  линии нагружения (а значит, согласно (5.33), и коэффициента концентрации контактных давлений  $K_\gamma$ ).

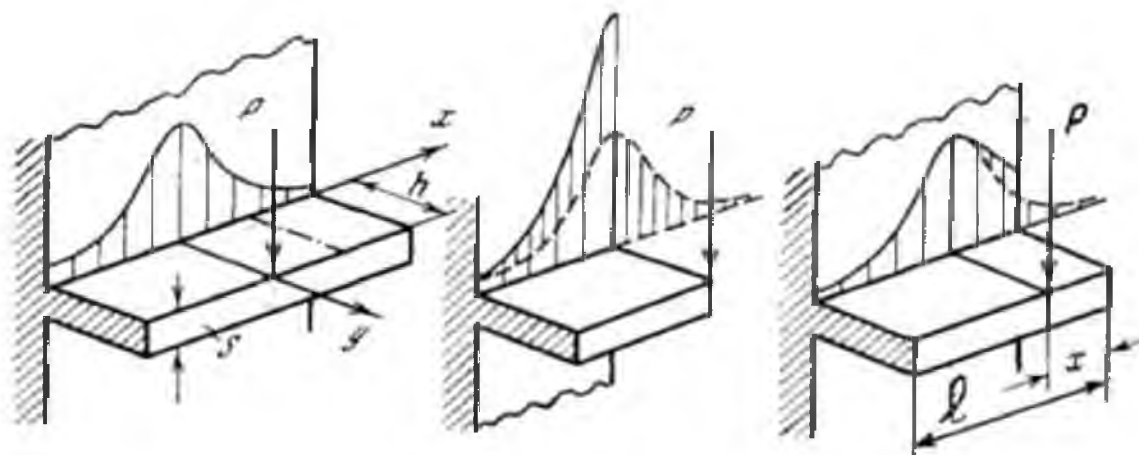


Рис. 5.15.

Так как изгибные напряжения пропорциональны прогиба зуба-балки:  $\sigma(\bar{x}) \sim y(\bar{x})$ , то для коэффициента концентрации изгибных напряжений  $K_\sigma(x)$  при перекосе по длине  $x$  зуба можно записать

$$K_\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(\bar{x})}{\sigma_{cp}} \sim \frac{y(\bar{x})}{y_{cp}},$$

где  $\sigma_{cp}$  - напряжения изгиба в отсутствии перекоса. Или в безразмерном виде:

$$\bar{K}_\sigma(\bar{x}) = \frac{\bar{y}(\bar{x}) - \bar{y}(\bar{l})}{\bar{y}(0) - \bar{y}(\bar{l})} = \frac{K_\sigma(\bar{x}) - K_\sigma(\bar{l})}{K_\sigma(0) - K_\sigma(\bar{l})},$$

где  $K_\sigma(0)$ ;  $K_\sigma(\bar{l})$  - суть коэффициенты концентрации изгибных напряжений на торцах зуба (при  $\bar{x} = \frac{x}{l} = 0$  и  $\bar{x} = \bar{l}$  соответственно). Анализ расчетов при

варьировании в широких пределах параметров  $l_k$  и  $\beta \cdot l$  показал, что величину  $\bar{K}_\sigma(\bar{x})$  можно искать в виде

$$\bar{K}_\sigma(\bar{x}) = \frac{K_\sigma(\bar{x}) - K_\sigma(\bar{l})}{K_\sigma(0) - K_\sigma(\bar{l})} = (1 - \bar{x})^{n(K_\gamma, \beta l)}. \quad (5.34)$$

На рис.5.16 показана зависимость  $\bar{K}_\sigma(\bar{x})$  от  $\bar{x}$  для одного значения  $\bar{l}_k = 0,6$  (или  $K_\gamma = 3,33$ ) при варьировании  $\beta \cdot l$  (линии 1-5, соответственно  $\beta \cdot l = 1, 2, 3, 4$  и  $5$ ). На основе анализа расчетных данных при варьировании

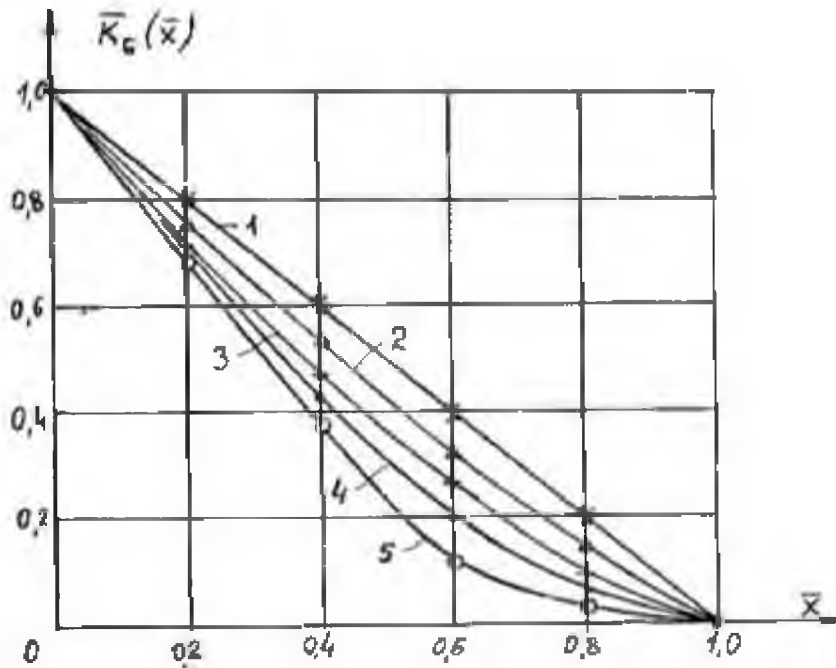


Рис.5.16. Зависимость безразмерного коэффициента концентрации изгибных напряжений по длине зуба от безразмерной его длины

коэффициента концентрации контактных давлений  $K_\gamma$  в широких пределах и безразмерного параметра длины зуба  $\beta \cdot l$  получены зависимости для  $[K_\sigma(0) - 1]$  и  $[K_\sigma(l) - 1]$  от  $(K_\gamma - 1)$ . По результатам расчета на рис.5.17 построена зависимость  $K_1 = [K_\sigma(0) - 1]$  от  $K_2 = (K_\gamma - 1)$  при варьировании  $\beta \cdot l$  от 1 до 5 (линии 1-5, соответственно  $\beta \cdot l = 1, 2, 3, 4$  и  $5$ ). Анализ результатов расчета позволил получить зависимости для определения коэффициентов изгибных напряжений  $K_\sigma(0)$  и  $K_\sigma(l)$  в виде

$$K_\sigma(0) = 1 + 1,43(\beta l)^{0,9} \left[ \frac{K_\gamma - 1}{9} \right]^{n_1},$$

$$K_{\sigma}(l) = 1 - 5,1(\beta l)^{-1,1} \left[ \frac{K_{\gamma} - 1}{9} \right]^{n_2} \quad (5.35)$$

Для показателей степени  $n_i$  получены зависимости

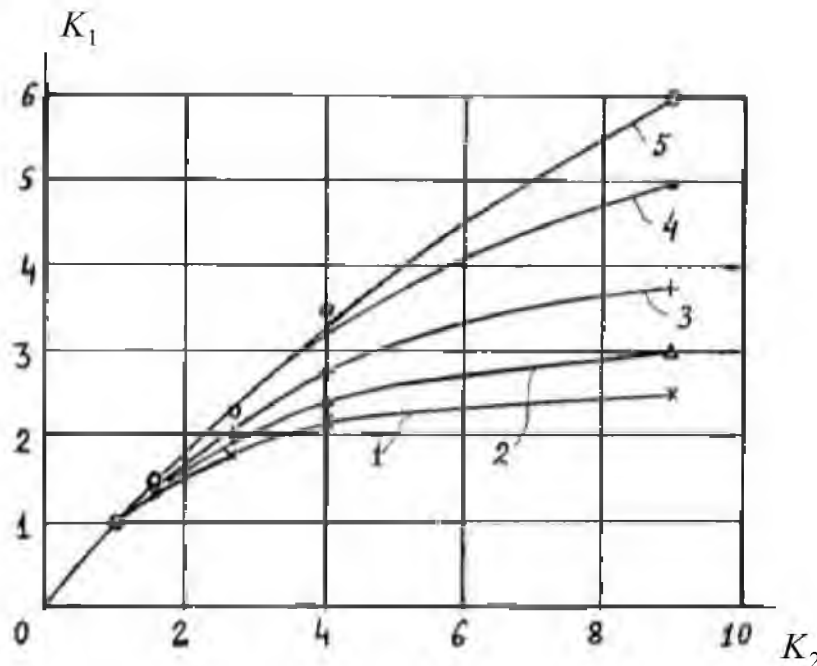


Рис.5.17. Зависимость максимального коэффициента концентрации изгибных напряжений от коэффициента угла перекоса

$$n(K_{\gamma}, \beta l) = 1 + 0,029(K_{\gamma} - 1)^{n_3}, \quad (5.36)$$

где

$$\begin{aligned} n_1 &= 0,34(\beta l)^{0,5}; & n_2 &= 1,22(\beta l)^{-2,3}; \\ n_3 &= 0,84(\beta l)^{0,7}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Полученные зависимости (5.35) можно аппроксимировать для параметра  $\beta l$  в диапазоне от 1 до 5 следующими выражениями:

$$\begin{aligned} K_{\sigma}(0) &= 1 + 0,754(\beta l)^{0,3} (K_{\gamma} - 1)^{0,59}, \\ K_{\sigma}(l) &= 1 - 2,713(\beta l)^{-0,72} (K_{\gamma} - 1)^{0,097}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Здесь коэффициент концентрации контактных давлений  $K_\gamma$  определяется по формулам (4.13) и (4.14), а расчетный угол перекоса  $\gamma$  – по формуле

$$\gamma = \gamma_T - \gamma_{\ddot{a}} = \gamma_T \left( 1 - \frac{\gamma_{\ddot{a}}}{\gamma_{\dot{o}}} \right);$$

где  $\gamma_T$  – технологический угол перекоса,  $\gamma_{\dot{o}}$  – деформативная составляющая угла перекоса (5.30)-

$$\gamma_{\ddot{a}} / \gamma_{\dot{o}} = 0,506(\beta l)^{0,11} \left( \frac{\alpha_H}{l\gamma_T} \right)^{0,296}. \quad (5.39)$$

Полученные предложенным методом коэффициенты концентрации изгибных напряжений отличаются от известных [164, 219] тем, что в них учитывается влияние длины зубьев на уровень концентрации изгибных и контактных напряжений при перекосе. Из полученных зависимостей следует, в частности, что короткие зубья деформируются как консольная балка, а не как консольная пластина, поэтому конечные размеры коротких зубьев проявляются в том, что по длине зуба будет переменной контактная составляющая деформации зубьев, а изгибная составляющая деформации может быть принята одинаковой для всех точек длины зуба. Иными словами, при перекосе для коротких зубьев возникает только концентрация контактных напряжений, а концентрации изгибных напряжений нет. Действительно, при  $\beta l \rightarrow 0$  из (5.39) следует  $\gamma_{\dot{o}} \rightarrow 0$ , а из (5.38) следует  $K_\sigma(0) \rightarrow 1$ .

При  $\beta l = 3$ , что справедливо для большинства типоразмеров зубчатых колес, полученные зависимости (5.36), (5.37) и (5.38) упростятся

$$n(K_\gamma) = 1 + 0,029 (K_\gamma - 1)^{1,81} \quad (5.40)$$

$$K_\sigma(0) = 1 + 1,05(K_\gamma - 1)^{0,59} \quad (5.41)$$

$$K_\sigma(l) = 1 - 1,23(K_\gamma - 1)^{0,097}.$$

Таким образом, полученные зависимости (5.38) для определения коэффициентов концентрации изгибных напряжений на торцах зубьев при перекосе, позволяют определить изгибные напряжения как зубьев зубчатых колес, так и зубчатых соединений, и поэтому являются универсальными. С помощью полученных зависимостей (5.34), появляется также возможность построить эпюру изменений коэффициента концентраций изгибных напряжений по длине зубьев.

#### 5.4. Выводы по пятой главе.

На основе предложенной физико-математической модели разработан аналитический метод определения затухания деформации по длине зубьев зубчатых колес при перекосе с учетом их конечных размеров, что позволило во втором разделе определить коэффициент концентрации изгибных напряжений в основании зубьев зубчатых колес при начальном неприлегании вследствие перекоса боковых поверхностей, знание которого позволяет совершенствовать существующие методы по расчету нагруженности и прочности зубчатых зацеплений при перекосе с учетом их конечных размеров.

Решена задача об изгибе балки конечной длины на упругом основании под действием произвольной нагрузки. Использование этого результата позволило аналитически определить деформативную составляющую угла перекоса. Учет последнего позволило уточнить расчеты по определению контактных и изгибных напряжений в зубьях зубчатых колес и роликовых подшипников. Анализ результатов показал, что до 45 % угла перекоса может компенсироваться изгибной деформацией зуба в продольном направлении.

Показано, что экспериментальные данные изменения величин прогибов по длине консольной пластины находятся в удовлетворительном соответствии с расчетными результатами прогибов балки конечной длины на

упругом основании, что является косвенным доказательством достоверности разработанного метода.

## ГЛАВА 6. ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ НА ИХ КОНТАКТНУЮ ПОДАТЛИВОСТЬ И КОНЦЕНТРАЦИЮ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КРАЕВОЙ ЗОНЕ (КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ)

### 6.1. Расчетная модель контакта круговых цилиндров различных длин с параллельными осями

В ряде инженерных приложениях (роликовые подшипники, зубчатые передачи) при расчете нагруженности необходимо учитывать так называемый краевой эффект:- в результате повышенной податливости у деталей ограниченных размеров со стороны края возрастают деформации в



этих местах, что приводит к резкому возрастанию напряжений. А последние в свою очередь сильно снижают долговечность узла (например роликовых подшипников).

О количественной величине этого явления можно судить по результатам приведенного в работе [161] опыта. На поверхности плоской плиты толщиной 50 мм и диаметром 200 мм на расстоянии 50 мм от ее края был наклеен в радиальном направлении проволоочный тензодатчик с базой 3 мм (Рис. 6.1).

При нагружении плиты сферическим индектором сначала со стороны

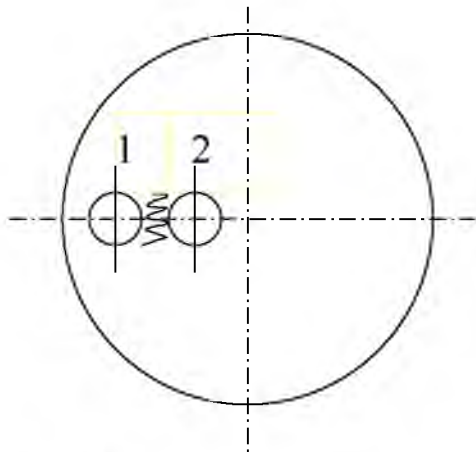


Рис.6.1

ее края на расстоянии 30 мм от датчика (положение 1), потом на том же расстоянии со стороны центра плиты (положение 2), при абсолютной идентичности всех прочих условий, показания в первом случае на 30- 40 % было больше, чем во втором, что является следствием более высокой податливости тела плиты со стороны ее края.

А в связи с тем, что долговечность роликовых опор по признаку усталостного выкрашивания обратно пропорционально  $\sigma^m$ , где  $\sigma$ - уровень контактных напряжений,  $m$ - показатель степени,  $m=6-9$  [120], следовательно, материал роликов и беговых дорожек колец в зонах действия краевого

эффекта в несколько раз более подвержен разрушению по сравнению с материалом остальной части области контакта.

С целью определения влияния конечных размеров тел на их контактную деформацию, в работе [227] приведены результаты экспериментального исследования контактной деформации плиты с параметрами:  $l= 200 \text{ мм}$ ;  $b= 120 \text{ мм}$ ;  $S= 120 \text{ мм}$  при изменении расстояния  $x$  точки приложения силы от свободного края. На рис.6.2 показана эта зависимость в безразмерном виде:

$$\bar{\delta}_k = \delta_k / \delta_{k \max} \text{ от } \bar{x} = x/l, \text{ где } \delta_k = w_k / P \cdot 10^{-3}, \text{ мкм/н,}$$

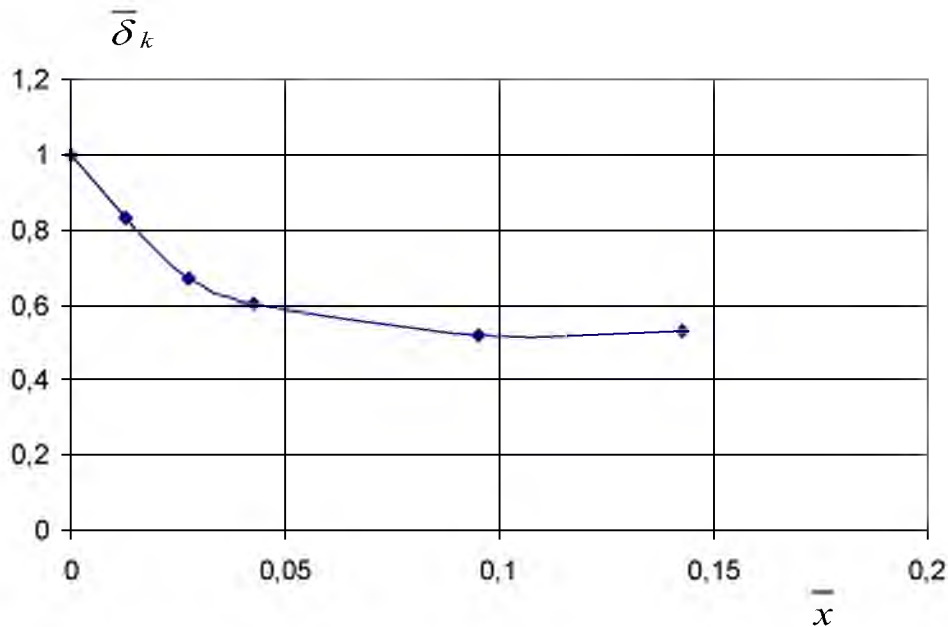


Рис.6.2

из которого видно, в частности, что контактная податливость плиты по мере приближения к свободному краю увеличивается, и на краю примерно в два раза больше, чем в срединной области.

Несмотря на серьезность этого явления, оно мало изучено. В настоящей работе смоделирована деформация от этого эффекта с помощью упругого основания. Простейшее представление непрерывного упругого основания впервые было дано Винклером [248], который предполагал основание состоящим из тесно расположенных линейных пружин, деформирующихся

независимо друг от друга. На рис.6.3 показано распределение деформаций поверхности такого основания для случая

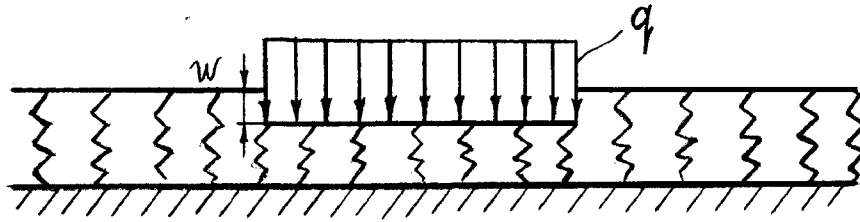


Рис.6.3

равномерной нагрузки. Можно видеть, что для этой модели перемещения в нагруженной области являются одинаковыми независимо от того, действует ли на основание абсолютно жесткий штамп или равномерно распределенная нагрузка. Кроме того, для обоих типов нагружения перемещения вне

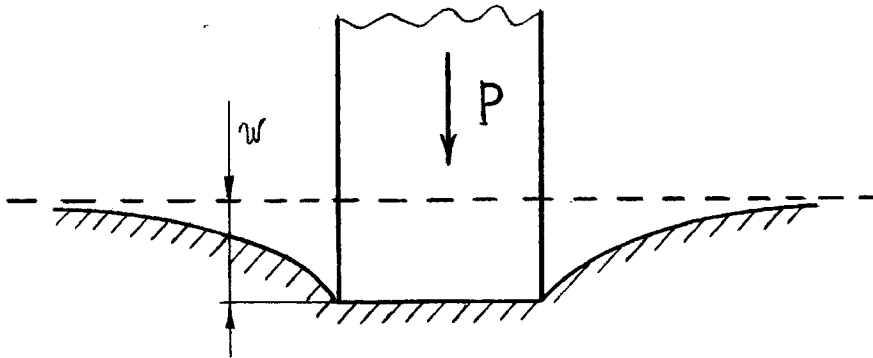


Рис.6.4а

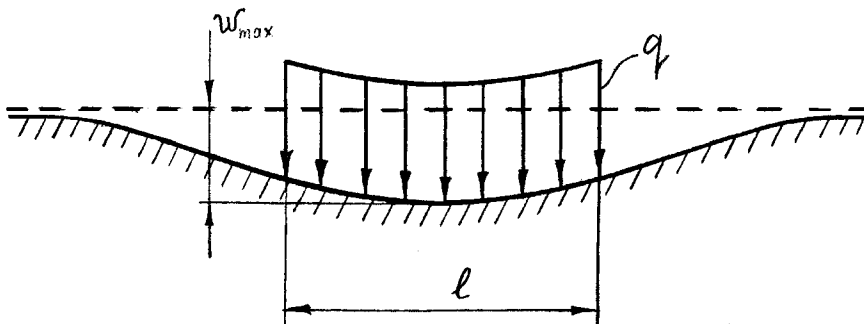


Рис.6.4б

нагруженной области оказываются равными нулю. Однако в реальности для большинства материалов распределение перемещений поверхности основания имеет такой вид, как показано на рис.6.4.

Поэтому в качестве следующего шага, основание рассматривалось как полубесконечная упругая сплошная среда. В математическом отношении эта задача намного сложнее.

Поиски физически близкого и математического простого описания поведения упругих оснований в зоне контакта могут осуществляться в двух направлениях. Один путь заключается в том, чтобы, отправляясь от модели сплошной среды, ввести упрощающие предположения относительно ожидаемых значений перемещений и напряжений. Другой путь заключается в том, чтобы отправляясь от винклеровского основания, ввести некоторые предположения о взаимодействии между пружинными элементами, с тем, чтобы сделать эту модель более близкой к действительности.

Ниже рассматривается модель упругого основания, полученная вторым способом. Для того чтобы максимально приблизить картину деформации данной модели с реальностью необходимо верхние концы пружин соединить балкой, которая будет работать на изгиб. Получим основание в виде балки, работающей на изгиб, аналогично изгибу балки на упругом основании. Для нее прогиб в т.  $x$  (Рис.6.5) от действия сосредоточенной нагрузки  $P$  будет определяться формулой [196]

$$y = \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) , \quad (6.1)$$

где  $\beta x$ - безразмерный параметр длины балки;  $\beta^4 = \frac{k}{4EI_z}$  ;  $EI_z$ - жесткость балки при изгибе;  $E$  - модуль упругости материала балки;  $k$ - коэффициент

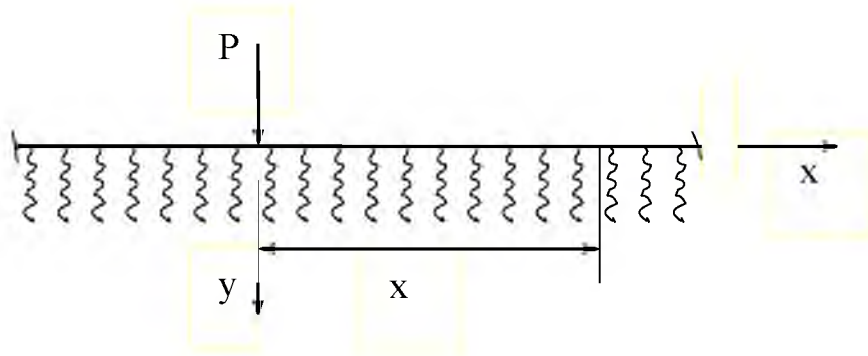


Рис.6.5. Бесконечно длинная балка на упругом основании под действием сосредоточенной силы

постели упругого основания.

С целью моделирования краевого эффекта, рассмотрим контакт двух цилиндров (рис.6.6) одинакового диаметра, один из которых имеет бесконечную длину, а другой- конечную,  $l$ . В качестве расчетной модели

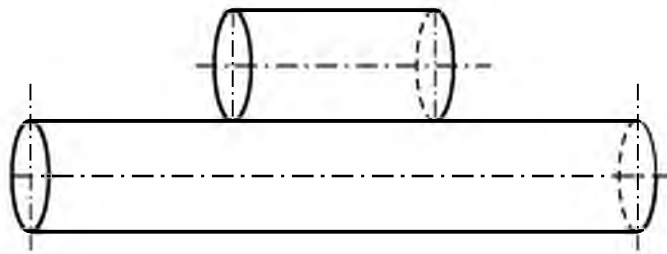


Рис.6.6

возьмем изгиб балки бесконечной длины на упругом основании под действием равномерно распределенной по длине  $l$  нагрузки (рис.6.7а).

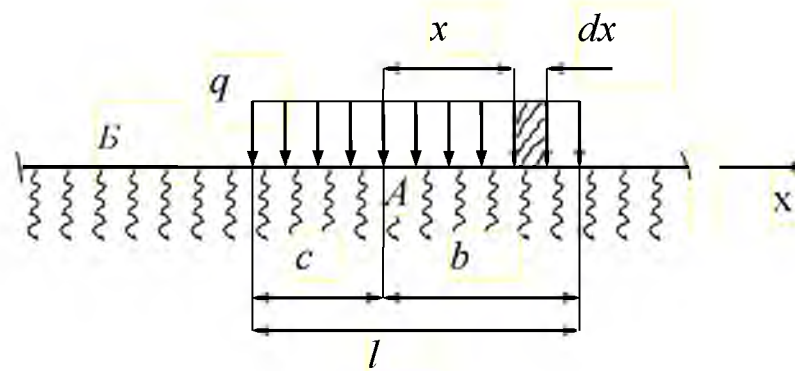


Рис.6.7а. Бесконечно длинная балка на упругом основании под действием равномерно распределенной нагрузки

## 6.2. Концентрация контактных напряжений и деформаций на концах короткого цилиндра

Для определения прогиба этой балки  $y$  в произвольной т.  $A$  внутри нагруженного участка (рис.6.7а), необходимо по формуле (6.1) определить прогиб  $dy$  от элементарной нагрузки  $qdx$

$$dy = \frac{qdx}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x),$$

с дальнейшим интегрированием его по всей длине  $l$ , получим

$$y = \frac{q}{k} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\beta b} \cos \beta b - \frac{1}{2} e^{-\beta c} \cos \beta c \right), \quad (6.2)$$

где  $q$  - равномерно распределенная нагрузка. Из уравнения (6.2) следует, что в точках внутри нагруженного участка, удаленных от концов (при достаточно больших  $c$  и  $b$ ) прогиб будет приближенно равен

$$y_0 = \frac{q}{k}, \quad (6.3)$$

т.е. равномерная нагрузка  $q$  непосредственно передается упругому основанию. На концах нагруженного участка (т.е. при  $c=0, b=l$ , и  $c=l, b=0$ )

имеем  $y \approx \frac{q}{2k}$ , т.е. в этом случае прогиб составляет лишь половину  $y_0$ .

Для прогиба вне нагруженного участка (т.Б), аналогичным образом, как и для области внутри нагруженного участка, легко получить формулу

$$y = \frac{q}{2k} (e^{-\beta c} \cos \beta c - e^{-\beta b} \cos \beta b) ,$$

откуда видно, что когда расстояния  $c$ ,  $b$  велики, прогиб  $y$  стремится к нулю.

Таким образом, для моделирования контакта двух цилиндров, имеющие разные длины, можно воспользоваться непрерывным упругим основанием, аналогичным изгибу балки на упругом основании. В этом случае проблема будет заключаться в правильном определении коэффициента постели упругого основания  $k$ . Его можно определить, исходя из условия, что при одинаковой длине цилиндров их контактная деформация  $w_H$  и прогиб балки на упругом основании  $y_o$  будут совпадать:

$$w_H = y_o . \quad (6.4)$$

Контактная деформация цилиндров одинаковой длины (при решении плоской контактной задачи теории упругости о сжатии цилиндров, предполагается что цилиндры имеют одинаковую длину- они либо бесконечные, либо короткие диски) определяется по формуле, полученной в первой главе, а именно

$$w_H = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,5 \right] , \quad (6.5)$$

где  $\nu$  и  $E$  -коэффициент пуассона и модуль упругости материала цилиндра соответственно;  $R$ - радиус цилиндра;  $b$ - полуширина площадки контакта по Герцу. Тогда можно переписать (6.4) с учетом (6.3) и (6.5), имеем

$$y_o = \frac{q}{k} = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,5 \right] = \bar{\delta}_0 \cdot q ;$$

где  $\bar{\delta}_0 = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,5 \right] = k^{-1}$ . Следовательно, при разной длины цилиндров контактная деформация короткого цилиндра с учетом зависимости (6.2) будет равняться

$$w = \bar{\delta}_0 \cdot q \cdot \left[ 1 - \frac{1}{2} \theta(\beta b) - \frac{1}{2} \theta(\beta c) \right], \quad (6.6)$$

где  $\theta(x) = e^{-x} \cos x$ .

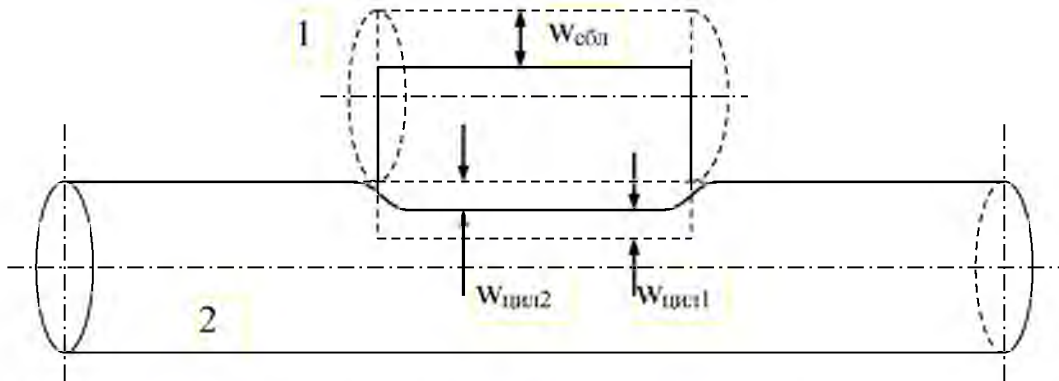


Рис.6.7б. Контактное взаимодействие двух цилиндров различных длин

Прогиб цилиндров, рассчитанный по зависимости (6.6), показан на рис.6.7б. На рис.6.8 показан фрагмент деформации короткого цилиндра в безразмерном виде:  $\bar{w} = \frac{w}{w_{\max}}$  от  $\bar{x} = \frac{x}{l}$ , вычисленной по формуле (6.6), откуда видно, что действительно, как и наблюдалось в эксперименте, податливость у свободного края в два раза больше, чем в срединной области.

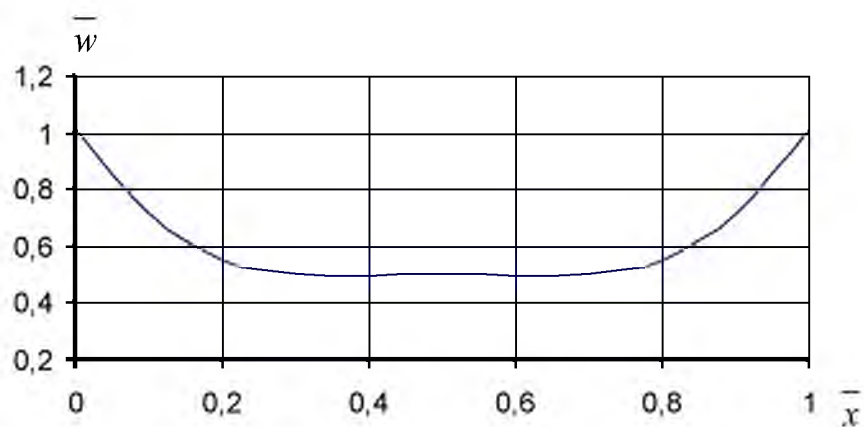


Рис. 6.8



Формула (6.6) справедлива для цилиндров, один из которых имеет бесконечную длину, а второй- конечную длину  $l$ . В случае, когда длины цилиндров соразмерные величины, то решение задачи аналогично изложенному. А именно, в пятой главе получена зависимость для определения прогиба балки конечной длины  $l$  на упругом основании при действии на нее приложенной в произвольной точке сосредоточенной силы  $P$  в виде:

$$y(x, c) = \frac{P/l}{k} \cdot f(\beta l, c, x),$$

где  $f(\beta l, c, x)$ - безразмерная функция,  $c, x$  – координаты приложения силы и точки, где определяем перемещение соответственно. А чтобы получить прогиб такой балки при действии распределенной по длине  $l_1$  нагрузки, необходимо определить прогиб  $dy$  от элементарной силы  $qdx$  с последующим интегрированием полученного выражения по всей длине  $l_1$ .

В случае, если в контакте находятся цилиндры с разными диаметрами, то в этом случае в формуле (6.5)  $R$  будет приведенный радиус кривизны этих цилиндров.

Данная модель позволяет определить также концентрацию контактных напряжений на концах короткого цилиндра, что в связи с особенностью контакта цилиндрических тел конечных размеров не удастся описать в рамках теории Герца, несмотря на то, что контактные напряжения, действующие вдоль большей части длины цилиндра, рассчитываются по теории Герца с хорошей точностью.

Действительно, концентрация контактных деформаций  $K_H$  на концах короткого цилиндра определяется  $K_H = \frac{w}{w_H} = \frac{y}{y_0}$ , отсюда с учетом изложенного выше получим-

$$K_{H_{\text{цил}}}^{\max} = \frac{q/2k + q/k}{q/k} = 1,5.$$

Следовательно, для коэффициента концентрации контактных напряжений на концах короткого цилиндра получим выражение

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_H} = \sqrt{K_H} = 1,22,$$

где  $\sigma_H$  - контактные напряжения по Герцу.

### 6.3. Выводы по шестой главе

С использованием упругого основания смоделирован краевой эффект тел цилиндрической формы конечных размеров при их контактном взаимодействии. Получены расчетные формулы для определения деформаций и напряжений на концах указанных тел.

Получены коэффициенты концентрации контактных деформаций и напряжений на свободном конце упругого тела цилиндрической формы в безразмерном виде, которые в связи с особенностью контакта цилиндрических тел конечных размеров, не удастся описать в рамках теории Герца, несмотря на то, что контактные напряжения, действующие вдоль большей части длины цилиндра, рассчитываются по теории Герца с хорошей точностью.

Из этих формул следует, в частности, что деформация на свободном конце упругого тела в 1,5 раза больше, чем в средней части, что согласуется с экспериментальными данными, имеющимися в литературе (рис.6.2). Из них также следует, что напряжения на краю на 22 % больше, чем в срединной области (по Герцу).

## ПРИМЕНЕНИЕ ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, МЕТОДОВ И ПОДХОДОВ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ МАШИНОВЕДЕНИЯ

## ГЛАВА 7. КОНТАКТНЫЕ И ИЗГИБНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ В ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧАХ

## 7.1. Теоретическое определение контактной податливости зубчатых зацеплений в отсутствии перекоса

При расчете нагруженности и прочности зубьев зубчатых зацеплений обычно пользуются решением контактной задачи теории упругости о сжатии двух цилиндров (рис. 7.1) при касании по образующей. Воспользуемся полученными выше формулами для получения контактной податливости зубьев зубчатых колес, которая определяется [120] как отношение контактной деформации  $\alpha$  к удельной нагрузке  $q$ .

Для нахождения этой величины в работе [120] контактная деформация зубьев определяется как сближение центров кривизны контактирующих

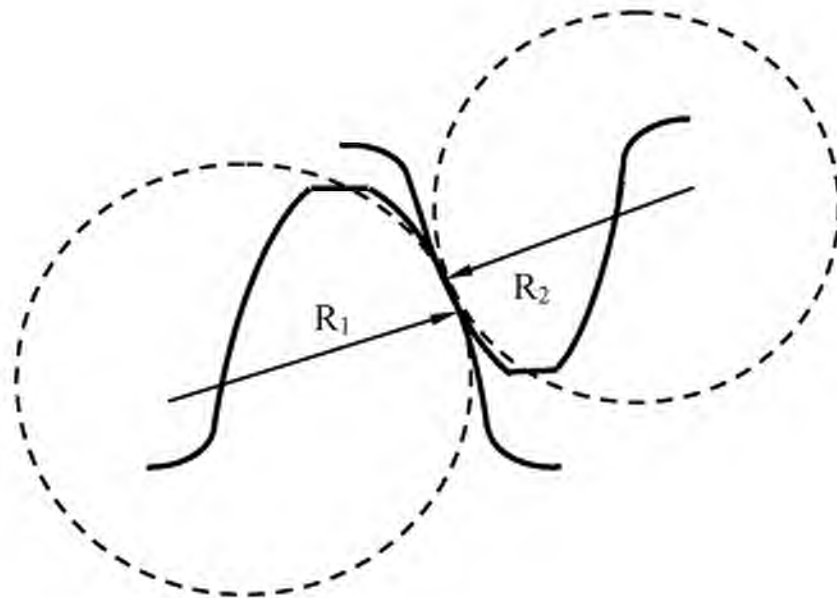


Рис. 7.1

зубьев (рис. 7.1) и для контактной податливости получает величину  $3,2 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^2/\text{Н}$ . Аналогичным образом контактную податливость зубьев определяет и С.П.Тимошенко в [197] и получает практически такой же результат. В работе [4] автор указывает, что определение контактной деформации зубьев как сближение центров кривизны контактирующих зубьев, приведет к завышению контактной податливости, и поэтому контактную деформацию зубьев он определяет с использованием базовой точки, при этом для податливости получает величину равной  $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^2/\text{Н}$ .

Определим контактную податливость зубьев зубчатых колес  $\bar{\alpha}$  с помощью модели: сжатие двух цилиндрических сегментов, рис.3.5, для которой в третьей главе получена формула контактной деформации в виде (3.5). С целью получения аналитической зависимости этого параметра перепишем (3.5) в следующей форме

$$\frac{\alpha}{q} = \bar{\alpha} = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \ln \left[ 2,124 \sqrt{\frac{EC_1C_2(R_1 + R_2)}{qR_1R_2}} \right], \quad (7.1)$$

где  $C_{1,2}$ ;  $R_{1,2}$  - толщина и радиус кривизны первого и второго зубьев в рассматриваемой точке соответственно. Как видно из зависимости (7.1), контактная податливость зубьев не константа, а зависит от внешней нагрузки:  $\bar{\alpha}$  уменьшается с увеличением  $q$ . Этот на первый взгляд неочевидный вывод объясняется малостью площадки контакта в начальный момент нагружения зубьев. График  $\bar{\alpha}$  [мкм/н/мм] -  $q$  [н/мм] для зубьев с начальными параметрами (в полюсе зацепления) из примера расчета [18]: модуль зацепления  $m=5\text{мм}$ ; приведенный радиус кривизны  $R_{np}=19 \text{ мм}$ ; толщина зубьев цилиндрических зубчатых колес  $C_1=C_2=7,85\text{мм}$ ; модуль упругости материала зубьев  $E=2,15 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$  - показан на рис.7.2, откуда видно, что в широком диапазоне изменения  $q$  удельная податливость  $\bar{\alpha}$  меняется от  $2,0 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^2/\text{Н}$  до  $2,5 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^2/\text{Н}$ . В тоже время из рис.7.2 также

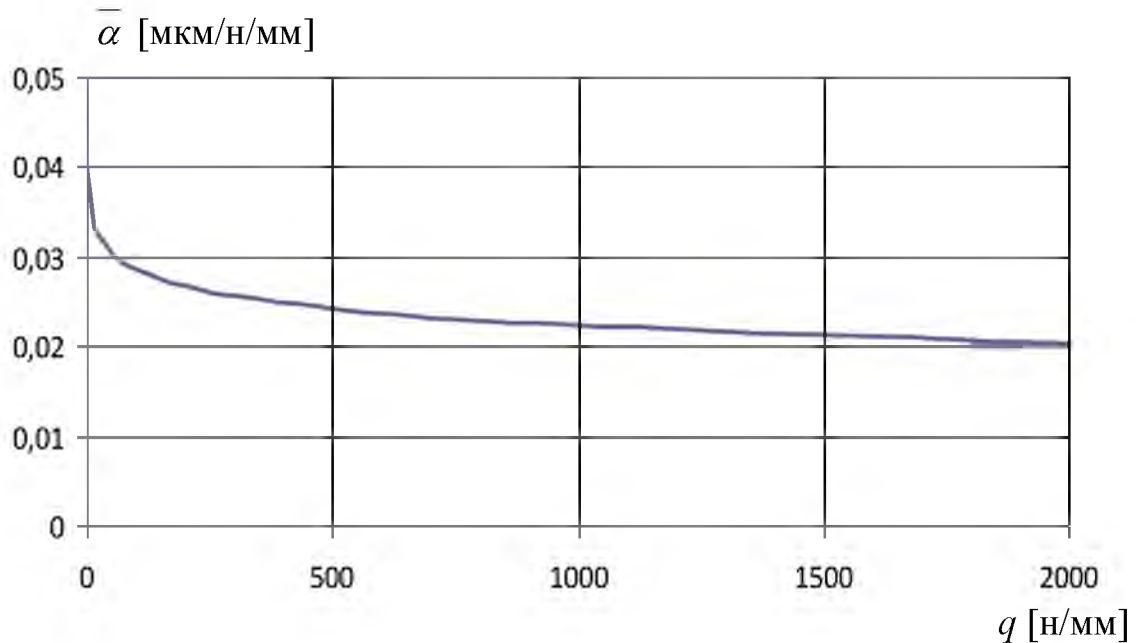


Рис. 7.2 Зависимость контактной податливости зубчатых зацеплений от погонной нагрузки

видно, что зависимость сильнее сказывается при малых значениях  $q$  из-за малости площадки контакта в начальный момент нагружения. Таким образом, полученная аналитическая зависимость (7.1), позволяющая вычислить величину контактной податливости зубьев цилиндрических зубчатых колес, можно рекомендовать для практического использования.

## 7.2. Контактная деформация зубчатых зацеплений при перекосе

Для определения контактной податливости зубчатых зацеплений с учетом перекоса, определим контактную деформацию зубьев согласно решению (4.12; 4.13; 4.14) задачи о контакте двух цилиндров при перекосе:

$$\alpha = K_{\gamma} \alpha_{\text{H}}$$

где коэффициент угла перекоса  $K_{\gamma}$  определяется по формулам (4.13; 4.14), в которой деформативная составляющая угла перекоса  $\gamma_{\text{д}}$  - по зависимости (5.30; 5.31), а контактная деформация зубьев в отсутствии перекоса  $\alpha_{\text{H}}$  с учетом (7.1) - по формуле

$$\alpha_H = \bar{\alpha} \cdot q = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \ln \left[ 2,124 \sqrt{\frac{EC_1C_2(R_1 + R_2)}{qR_1R_2}} \right].$$

### 7.3. Контактные напряжения зубчатых зацеплений при перекосе

Используя полученные зависимости для определения контактных напряжений двух цилиндров при перекосе, можно найти контактные напряжения зубьев зубчатых колес при перекосе.

Контактные напряжения  $\sigma_{H\gamma}$  в полюсе зацепления при перекосе определяются [18]

$$\sigma_{H\gamma} = K_{\sigma H} \cdot \sigma_{H0}$$

где  $\sigma_{H0}$  - контактные напряжения без учета дополнительных нагрузок (от неравномерности распределения нагрузки по ширине зубе и от динамических, т.е. при  $K_{\sigma H} = 1$ );  $K_{\sigma H}$  - коэффициент контактных напряжений [18]:

$$K_{\sigma H} = (K_\gamma \cdot K_H)^{1/2},$$

здесь  $K_H$  коэффициент нагрузки [18]; а коэффициент угла перекоса  $K_\gamma$  определяется по полученным выше формулам (4.13; 4.14) и (5.31).

### 7.4. Расчетные изгибные напряжения в основании зубьев зубчатых колес при перекосе

Напряжения при изгибе зубьев в условиях перекоса в опасном сечении определяются по формуле [18]

$$\sigma_{F\gamma} = \frac{F_t}{b_w m} K_F K_{F\gamma} Y_{Fs} Y_\beta,$$

где  $F_t$  - окружная сила в зацеплении;  $m$  - модуль зацепления;  $b_w$  - рабочая ширина венца зубчатой передачи;  $K_F$  - коэффициент нагрузки;  $Y_{Fs}$  -

коэффициент, учитывающий влияние формы зуба;  $Y_\beta$  - коэффициент, учитывающий влияние наклона зуба - определяются по работе [18],  $K_{F\gamma}$  - коэффициент изгибных напряжений, учитывающий влияние перекоса в зацеплении и упругих деформаций зубьев на уровень изгибных напряжений, определяется по формуле (5.41), в которой  $K_\gamma$  определяется по (4.13; 4.14), а  $\gamma_{def}$  - по (5.31).

### 7.5. Выводы по седьмой главе

На основе предложенной физико-математической модели разработан аналитический метод определения контактной податливости зубчатых зацеплений. Полученная аналитическая зависимость позволила установить, что контактная податливость зависит от внешней нагрузки  $q$  и в широком диапазоне изменения  $q$  она меняется от  $2,0 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^2/\text{Н}$  до  $2,5 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^2/\text{Н}$ .

Таким образом показано, что контактная податливость в известных методиках принимается величина или в  $1,28 \div 1,6$  раза превышающую (В.Н.Кудрявцев; С.П.Тимошенко), или на  $25 \div 40$  % заниженную величину, по сравнению с реальной величиной.

Получены аналитические зависимости для определения: контактных деформаций и напряжений зубчатых зацеплений при перекосе; изгибных напряжений в основании зубьев при перекосе.

## ГЛАВА 8. ПОДАТЛИВОСТЬ СИСТЕМЫ ПЛИТА- РОЛИК (МОСТОВЫЕ ОПОРЫ)

8.1. Податливость ролика, при сжатии его двумя плитами из одинаковых материалов. Теоретическое доказательство независимости сближения плит от радиуса роликов

При расчете нагруженности роликовых подшипников и мостовых опор обычно пользуются решением контактной задачи теории упругости о сжатии круговых цилиндров двумя плоскими плитами.

Для решения этой задачи в литературе на основе данных экспериментальных исследований [161] сжатия ролика плитами и с использованием так называемой базовой точки (это некоторая неподвижная абстрактная точка, относительно которой происходит контактное смещение упругого тела) [2], координаты которой аналитически не определяются, (их или задают, или подбирают), накопилось много формул видов

$$\alpha = K_{\alpha} \frac{q}{E}, \quad (8.1)$$

и

$$\alpha = \bar{\alpha} q$$

- для конкретного материала, где  $K_{\alpha}$  - безразмерный коэффициент;  $\bar{\alpha}$  - размерный параметр контактной податливости.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Из многочисленных экспериментальных исследований следует, (например [204, 161]), что когда ролик сжат между плитами из одинаковых материалов, то сближение плит не зависит от радиуса ролика. Этот экспериментальным путем полученный факт можно доказать теоретически. Действительно, сближение плит происходит в результате суммарной деформации ролика и обеих плит. Воспользуемся полученной в третьей главе формулой (3.7), которая определяет сближение



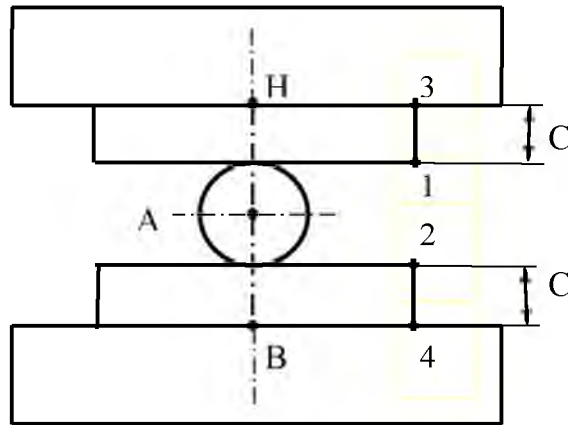


Рис.8.1. Сжатие ролика плитами из одинаковых материала

центра ролика относительно основания плиты в результате их совместной деформации при одинаковых материалах. Отсюда окончательно получаем полное сближение двух сжимающих ролик плит (рис.8.1) с толщинами  $C_1$  и  $C_2$  в аналитическом виде (сближение точек  $H$  и  $B$ )

$$\alpha = 2 \frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln 1,842 \sqrt{\frac{E\sqrt{C_1 C_2}}{q}} \right], \quad (8.2)$$

т.е. сближение плит, между которыми сжат ролик, не зависит от радиуса ролика, а зависит от толщин плит. Этот неожиданный, на первый взгляд, результат подтверждается экспериментальными данными многих авторов, например [204], где приведены результаты экспериментальных исследований сжатия стальных роликов стальными плитами при изменении удельной нагрузки  $q = P/l$  от 9 до 610 кН/м; длины роликов  $l$  от 21,8 до 50,3 мм; диаметра  $2R$ - от 3,15 до 25,4 мм; размеры плит: 51\*76\*19 мм. Эксперименты показали, что действительно, ни длина, ни диаметр роликов не влияют на величину сближения плит (рис.8.2, зависимость сближения от удельной нагрузки по данным [204]).

По поводу толщин плит в формуле (8.2). Авторы работы [204] аналогичную задачу решали с использованием так называемой базовой точки, и в качестве ее координаты взяли толщину плиты,

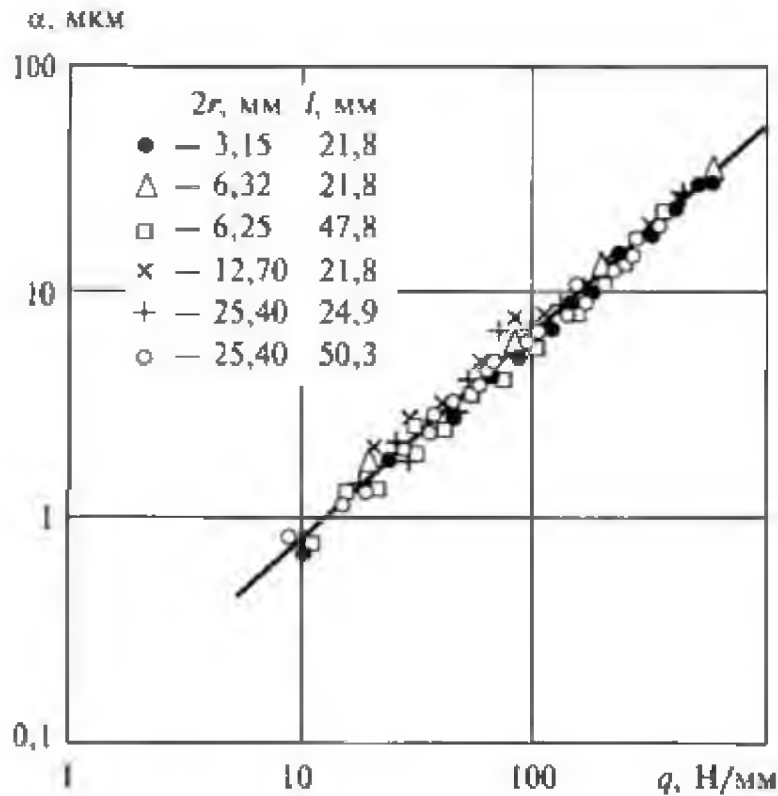


Рис.8.2. Сопоставление экспериментальных (значки) данных и расчетных (линия) величин сближения [204]

хотя сами не смогли обосновать этот выбор, при этом результаты расчета хорошо согласовались с экспериментом (рис.8.2) при варьировании в широких пределах радиусов и длин роликов.

Анализ формулы (8.2) показывает, что из нее для параметра  $K_\alpha$  в (8.1) легко получить аналитическую зависимость в виде (на одном контакте)

$$K_\alpha = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi} \ln \left[ 1,842 \sqrt{\frac{EC}{q}} \right] \quad (8.3)$$

График зависимости  $K_\alpha - q$  по последней формуле для параметров плит  $C$ ,  $E$ ,  $\nu$  из эксперимента работы [204] показан на рис. 8.3, откуда видно, что в широком диапазоне изменения  $q$  величина  $K_\alpha$  меняется от 5,0 до 6,0. В работе [5]  $K_\alpha = 4,86$ ; в [130] 5,27; в [161] 5,5. Однако, при малых значениях  $q$  она стремительно растет, (что легко объяснить- податливость системы

высокая в начальный момент нагружения, когда только формируется площадка контакта), чем и объясняется наблюдаемое в экспериментах увеличение погрешности при малых значениях  $q$  [2; 161]. Таким образом, зависимости вида (8.1) можно считать справедливыми лишь в определенном диапазоне изменения удельной нагрузки  $q$ .

Для проверки достоверности полученной зависимости (8.3) для определения коэффициента  $K_\alpha$ , на рис.8.3 точками показаны экспериментальные значения коэффициента  $K_\alpha$  по работе [161], из которого видно удовлетворительное их соответствие.

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Принимая во внимание то обстоятельство, что в экспериментах по определению контактного сближения плит, между которыми зажат ролик, обычно [204] индикаторы устанавливают между плитами (для повышения точности результатов их устанавливают в диаметрально противоположных углах на каждой плите), таким образом измеряют относительное сближение

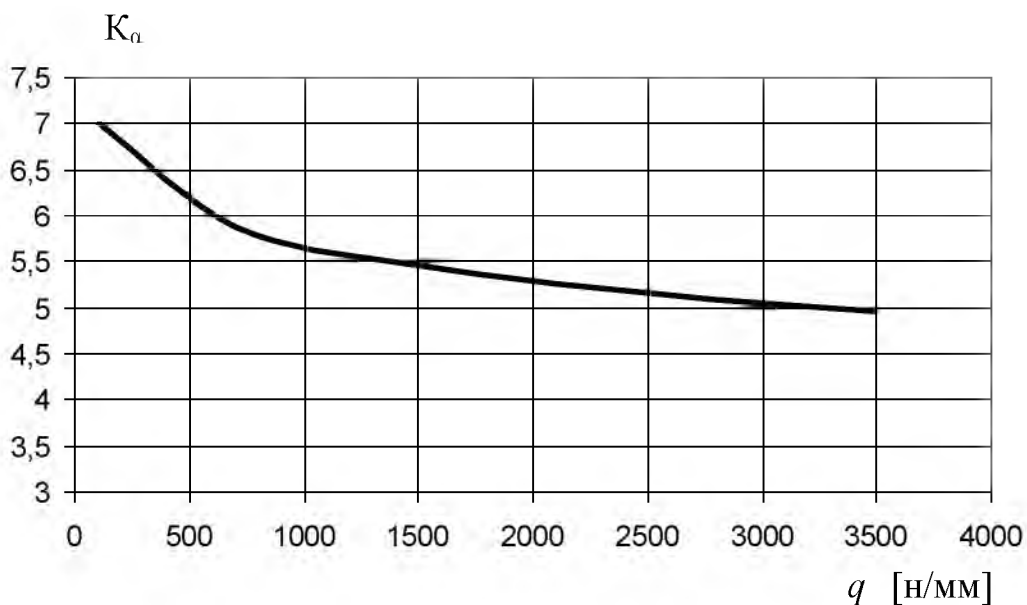


Рис.8.3. Зависимость коэффициента контактной податливости  $K_\alpha$  от погонной нагрузки н/мм Точки –эксперимент [161], линия –расчет

точек 1-2 (рис.8.1). В расчетах же, теоретически определено сближение точек  $H$  и  $B$ . Нетрудно показать, что это одно и то же, (действительно, ведь длины отрезков 3-1 и 2-4 в процессе деформации системы не меняются).

И последнее важное замечание. Если в экспериментах сжатия ролика плитами из одинаковых материалов сближение  $\alpha$  не зависит от радиуса  $R$  ролика, то это не значит, что деформация только ролика также не зависит от  $R$ - формула (2.21), и наоборот, если в формуле (2.21) присутствует  $R$ , то это не означает, что эксперимент сжатия ролика плитами неправильный- где констатируется независимость сближения от  $R$ - формула (8.2).

Ведь эмпирические формулы вида (8.1), где отсутствует  $R$ , которые получаются на основе экспериментальных данных, это результат совместной деформации и ролика, и плит. Причем, особенностью таких зависимостей (8.1) является то, что они справедливы при определенном диапазоне изменения  $q$  [143].

## 8.2. Выводы по восьмой главе

На основе предложенной физико- математической модели контакта упругих тел конечных размеров при начальном касании по линии разработан метод аналитического определения контактной податливости цилиндрического ролика, при сжатии его двумя плоскими плитами конечных размеров из одинаковых материалов.

Теоретически доказан факт, вытекающий из имеющихся в литературе многочисленных экспериментальных данных о независимости величины сближения плит от радиуса ролика, сжатого между ними, и показано, что сближение зависит от толщины плиты.

Установлено, что зависимости вида (8.1) справедливы лишь в определенном диапазоне изменения удельной нагрузки  $q$ . Получено

аналитическое выражение для коэффициента  $K_\alpha$ , благодаря которому удалось показать, что в широком диапазоне изменения удельной нагрузки  $q$  коэффициент  $K_\alpha$  меняется то 5,0 до 6,0.

## ГЛАВА 9. ПОДАТЛИВОСТЬ РОЛИКОВЫХ ПОДШИПНИКОВ

### 9.1. Теоретическое определение контактной податливости роликовых подшипников в отсутствии перекоса

По причине отсутствия аналитических выражений для величины контактной податливости роликовых подшипников в отсутствии перекоса, в литературе на основе экспериментальных данных сжатия стальных роликов плоскими плитами приводится величина (для одного тела)  $26 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2/\text{н}$  (Орлов А.В. [162] );  $33 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2/\text{н}$  (Кудрявцев В.Н. [118] ).

В настоящей работе проблема решена аналитически. В таблице № 3.1 приведены полученные в третьей главе зависимости, которые позволяют определить суммарные сближения различных упругих тел конечных размеров, находящихся в контакте до деформации по линии. В частности, получена зависимость для полного сближения ролика и цилиндрического сегмента, находящиеся в контакте по образующей (рис.9.1). Полное сближение  $w_{A/B}$  точек  $A$  и  $B$  будет определяться как сумма деформаций ролика  $w_1$  (изменение расстояния  $A_0A$ )

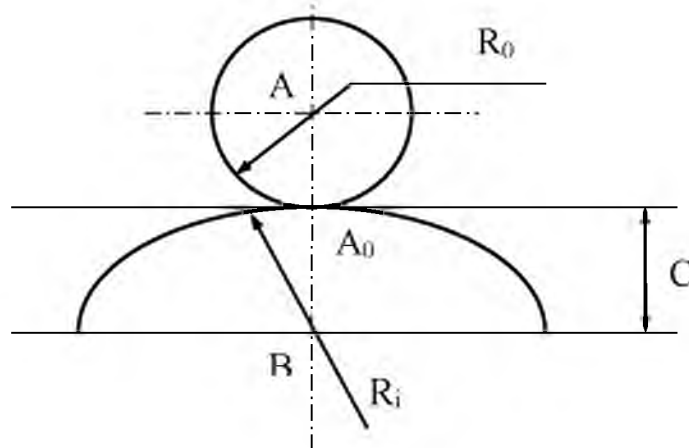


Рис.9.1а Контакт ролика и цилиндрического сегмента по линии

и цилиндрического сегмента  $w_2$  (изменение расстояния  $A_0B$ ) и вычисляется по формуле (3.8):

$$w_{A/B} = \frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \left[ \ln 1,842 \sqrt{\frac{R_0 CE}{qR}} \right], \quad (9.1)$$

где приведенный радиус кривизны  $R$  определяется  $R = \frac{R_0 R_i}{R_i + R_0}$ .

С помощью формулы (9.1) можно определить контактную податливость роликовых подшипников. Для этого параметра

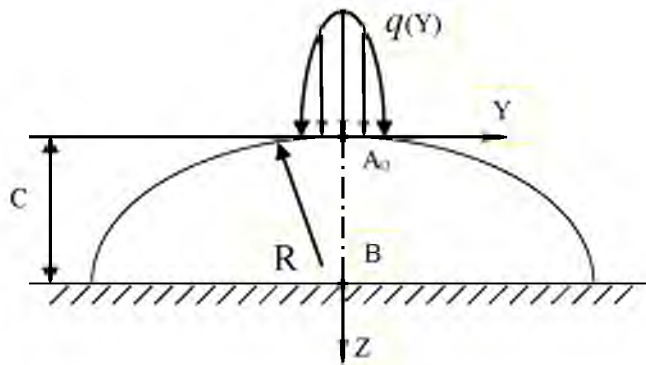


Рис.9.1б Цилиндрический сегмент под действием нагрузки распределенной в виде половины эллиптического цилиндра

в работе [162] на основе экспериментальных данных сжатия стальных роликов плоскими плитами приводится величина  $26 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2/\text{н}$  (для одного тела), а в работе [118] -  $33 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2/\text{н}$ .

Определим этот параметр аналитически с помощью модели силового контакта ролика с цилиндрическим сегментом (рис.9.1а) и формулы для суммарной их контактной деформации (9.1). Для этого рассмотрим силовой контакт цилиндрического ролика с наружным и внутренним кольцами, рис.9.2. Суммарное относительное смещение  $w_{B/F}$  двух точек  $B$  и  $F$  при приложении внешней нагрузки определим как сумму сближений

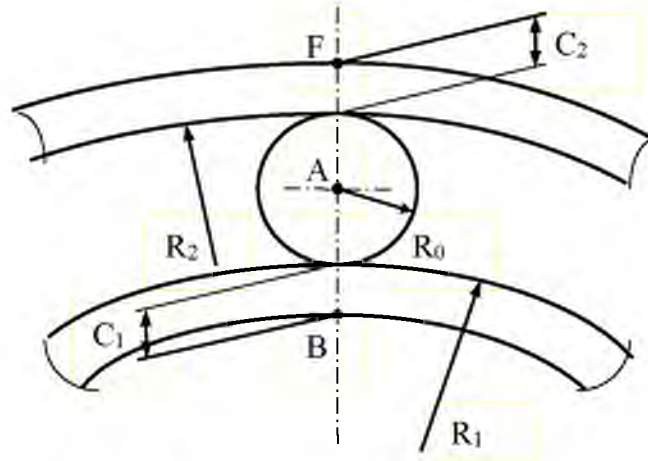


Рис.9.2 Контакт ролика с кольцами в подшипнике

$w_{A/F}$  точек  $F$  и  $A$  с одной стороны (контакт ролик- наружное кольцо), и  $w_{A/B}$  точек  $A$  и  $B$  с другой стороны (контакт ролик- внутреннее кольцо) рис.9.2, т.е.

$$w_{B/F} = w_{A/B} + w_{A/F}, \quad (9.2)$$

где  $w_{A/B}$  и  $w_{A/F}$  определяются по (9.1) с учетом приведенного радиуса кривизны, а именно:

$$w_{A/B} = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \ln \left[ 1,842 \sqrt{\frac{EC_1(R_1 + R_0)}{qR_1}} \right],$$

$$w_{A/F} = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \ln \left[ 1,842 \sqrt{\frac{EC_2(R_2 - R_0)}{qR_2}} \right].$$

С учетом последних зависимостей перепишем (9.2)

$$w_{B/F} = 2 \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \ln \left[ 1,842 \sqrt{\frac{E\sqrt{C_1 C_2}}{q} \sqrt{\frac{(R_1 + R_0)(R_2 - R_0)}{R_1 R_2}}} \right] \approx$$

$$\approx 2 \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \ln \left[ 1,842 \sqrt{\frac{E\sqrt{C_1 C_2}}{q} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{R_0^2}{R_1 R_2} \right)} \right]. \quad (9.3)$$

Структура последней формулы такова, что даже двукратное увеличение  $C$  приводит к увеличению  $w_{B/F}$  всего в среднем на 8% (несмотря на то, что при



$C \rightarrow \infty$  перемещение  $w_{B/F} \rightarrow \infty$ ), поэтому с учетом соотношения величины

$\frac{1}{2} \frac{R_0^2}{R_1 R_2}$  с единицей ее окончательно можно переписать в виде:

$$w_{B/F} = 2 \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \ln \left[ 1,842 \sqrt{\frac{EC}{q}} \right], \quad (9.4)$$

где  $C$  - усредненное значение. Откуда для контактной податливости получим формулу:

$$\frac{w_{B/F}}{q} = \bar{w} = 2 \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \ln \left[ 1,842 \sqrt{\frac{EC}{q}} \right]. \quad (9.5)$$

Как видно из последней зависимости, контактная податливость зависит от внешней нагрузки:  $\bar{w}$  растет с уменьшением  $q$  (этот вывод легко объясняется - податливость системы высокая в начальный момент нагружения, когда только формируется площадка контакта). График зависимости  $\bar{w} \cdot 10^6$  [мм/н/мм] -  $q$  [н/мм] с начальными параметрами для подшипников 2211:  $E = 2,15 \cdot 10^5$  Н/мм<sup>2</sup>;  $\nu = 0,3$ ;  $C = 4,1$  мм - показан на рис.9.3, откуда видно, что влияние нагрузки  $q$  на контактную податливость  $\bar{w}$  сильнее сказывается при малых  $q$ . Из этих графиков видно также, что только при определенном диапазоне изменения нагрузки  $q$  можно

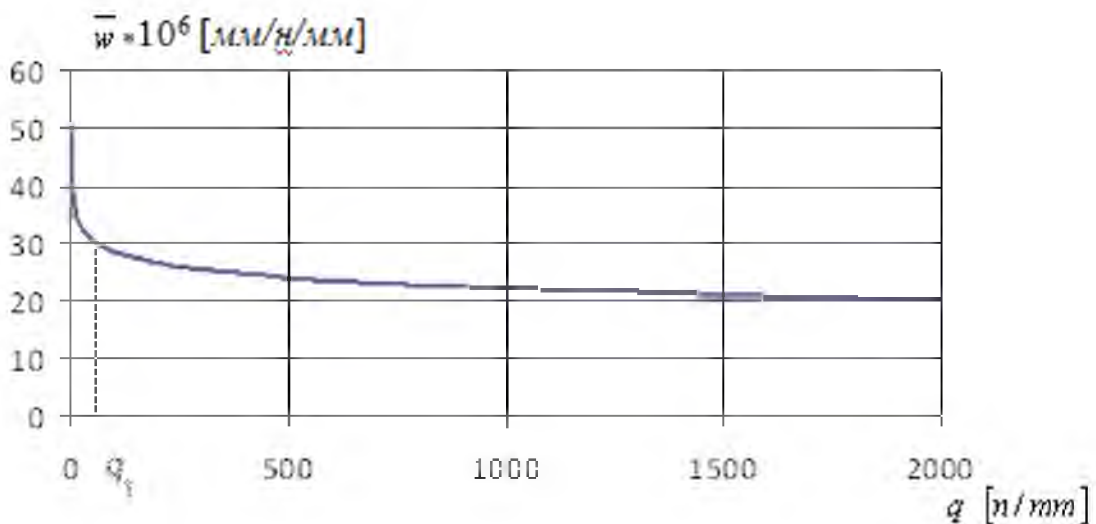
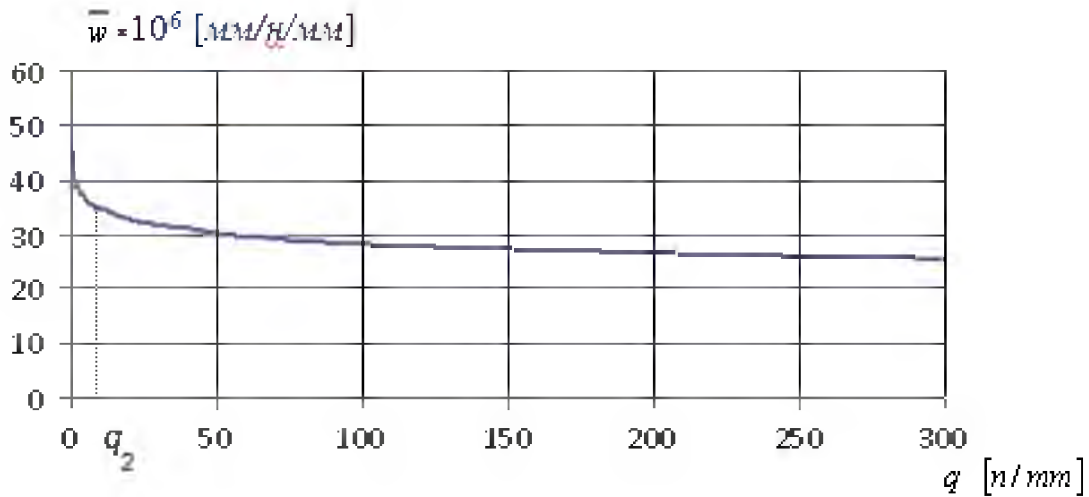
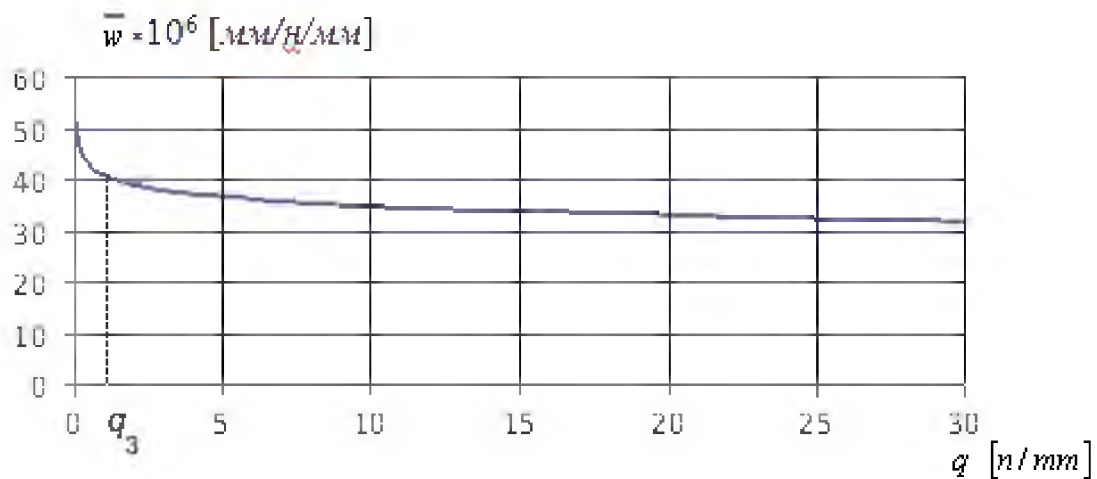


Рис.9.3 а)



б)



в)

контактную податливость  $\bar{w}$  с какой-то точностью считать величиной постоянной, и в широком диапазоне изменения  $q$  она меняется от  $20 \cdot 10^{-6}$  до  $30 \cdot 10^{-6}$  мм<sup>2</sup>/н. .

**И последнее.** Известно [189], что жесткость подшипников может быть в значительной степени повышена их предварительным натягом. Изменение жесткости таким путем на определенных режимах работы можно использовать для снижения уровня вибрации подшипников [24]. Как видно из (9.4), одинаковое приращение нагрузки вызывает большие приращения перемещений в зоне малых нагрузок  $q$ , и малые приращения перемещений в зоне больших нагрузок. В существующих методах преднатяг определяют экспериментально [118].

Используя формулу (9.5) можно определить величину преднатяга в зависимости от диапазона изменения  $q$  (см. рис.9.3). Например, если  $q$  изменяется: от 0 до 2000 (рис.9.3а), то преднатяг необходимо сделать при  $q=q_1$ ; от 0 до 300 (рис.9.3б) -  $q=q_2$ ; от 0 до 30 (рис.9.3в) -  $q=q_3$ , т.е. чтобы "срезать" тот участок графика податливости, где она стремительно растет при  $q \rightarrow 0$ .

Таким образом, полученная аналитическая зависимость (9.5), с использованием которой появляется возможность вычислить величину упругой податливости роликовых подшипников, можно рекомендовать для практического использования.

## 9.2. Контактные деформации и напряжения в роликовых подшипниках при перекосе

Для определения контактной деформации роликовых подшипников с учетом перекоса, воспользуемся результатами решения задачи о контакте двух цилиндров при перекосе, полученными в третьей главе, согласно которых с учетом (3.12; 3.13; 3.14) контактная деформация определяется:

$$\alpha = K_\gamma \alpha_H$$

где коэффициент угла перекоса  $K_\gamma$  определяется по формулам (3.13; 3.14), а контактная деформация в отсутствии перекоса  $\alpha_H$  - по формуле (9.4).

Контактные напряжения с учетом перекоса (относительный перекосяк колец роликового подшипника) определяются с использованием коэффициента концентрации контактных напряжений при перекосе, полученного в четвертой главе (4.13')

$$\sigma = K_\sigma \sigma_H ,$$

где  $K_\sigma$  - коэффициент концентрации контактных напряжений (4.13'')

$$K_\sigma = \sqrt{K_\gamma} ;$$

а  $\sigma_H$  - контактные напряжения в отсутствии перекоса по Герцу.

### 9.3. Выводы по девятой главе

На основе разработанной в третьей главе первого раздела физико-математической модели контакта двух упругих тел конечных размеров при начальном касании по линии, аналитически определена (для одного тела) податливость роликовых подшипников в отсутствии перекоса.

С использованием соотношений, полученных в первом разделе, аналитически определены контактные деформации и напряжения в роликовых подшипниках при перекосе.

Установлено, что контактная податливость роликовых подшипников не константа, а зависит от внешней нагрузки  $q$ , и в широком диапазоне изменения нагрузки  $q$  она меняется от  $20 \cdot 10^{-6}$  до  $30 \cdot 10^{-6}$  мм<sup>2</sup>/н, т.е. полученные аналитические зависимости  $\approx$  от 15 до 30 % уточняют известные данные.

## ГЛАВА 10. ХАРАКТЕРИСТИКИ НАГРУЖЕННОСТИ МНОГОПАРНЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ ЗАЦЕПЛЕНИЕМ И ЗУБЧАТЫХ СОЕДИНЕНИЙ (МУФТ)

### 10.1. Расчетная модель нагружения многопарных зубчатых зацеплений

#### 10.1.1. Метод расчета статической нагруженности многопарных передач зацеплением

Под односторонними связями понимаются такие, которые воспринимают нагрузку лишь одного знака (сжатия). В строительной механике специально рассматривается класс упругих систем с односторонними связями и разрабатываются итерационные методы раскрытия статической неопределенности таких систем [184].

Сложность расчета такого класса упругих систем заключается в том, что в данном случае неизвестно число связей, воспринимающих заданную внешнюю нагрузку, приложенную к системе, что и предопределяет необходимость использования итерационных методов решения задачи. Например, в реализованном численном методе расчета подобных упругих систем применительно к многопарным передачам зацеплением К.И.Заблонский [81] предлагает на первом этапе расчета принимать, что все имеющиеся в системе упругие связи воспринимают заданную внешнюю нагрузку. Получающиеся на первом этапе расчета отрицательные силы на некоторых из упругих связей указывают, в связи с и односторонностью, на то, что в действительности силы на них равны нулю. На втором этапе система укорачивается исключением связей с отрицательными силами и т. д. до тех пор, пока на всех связях силы не станут положительными.

Понятно, что такая процедура расчета, даже реализованная на ЭВМ, неоправданно сложна, так как приходится рассчитывать систему линейных алгебраических уравнений высокого порядка, а в алгоритме решения задачи предусматривать укорочение системы с учетом знака сил на связях, а также

дополнительную реализацию итерационного процесса для учета нелинейных свойств опор качения и т. д.

Причина такого усложнения решения задачи заключается в том, что прямая задача раскрытия статической неопределимости упругих систем с односторонними связями- определение числа дискретных связей, воспринимающих заданную внешнюю нагрузку, - действительно может быть решена лишь методом итераций. Поэтому для упрощения процедуры решения задачи необходим поиск других подходов. Нужно сказать, что такая же проблема возникает при решении и других подобных задач, которые сводятся к статически неопределимым системам с односторонними упругими связями. К таким приложениям, наряду с реальными многопарными передачами зацеплением, элементы которых имеют ограниченную точность и конечную жесткость, относятся многосателлитные планетарные механизмы (их элементы имеют ограниченную точность изготовления *и* монтажа); волновые передачи; опоры качения с шарико- и роликоподшипниками при наличии зазоров- натягов в опоре и перекоса между кольцами подшипника и др.

В работе [33] предложен метод решения указанной задачи, суть которого заключается в том, что вместо прямой несколько раз решается более простая обратная задача для принятого (варьируемого) числа дискретных связей определяется внешняя нагрузка, которую воспринимают эти связи. В этом методе важно то, что полученный указанным образом результат аппроксимируется в безразмерном виде степенной функцией, а затем аналитически решается прямая задача. Ниже дается развитие метода решения задачи, предложенного в работе [22].

Приведенные выше и им подобные примеры статически неопределимых упругих систем с односторонними связями могут быть описаны единой стержневой моделью, в которой между двумя стойками 1 и 2 (в общем случае являющимися упругими системами, а не жесткими телами) с зазорами, установлены упругие стержни (рис.10.1). К верхней (подвижной)

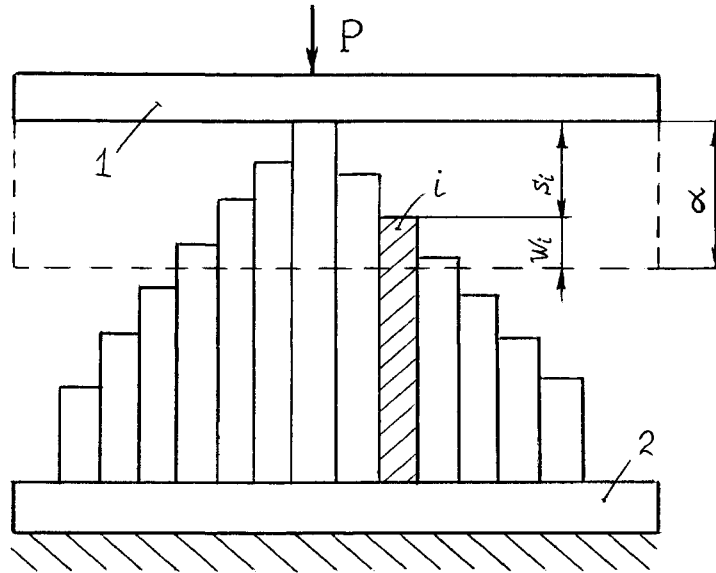


Рис. 10.1 Стержневая модель упругих систем с односторонними связями

стойке 1 приложена внешняя сила  $P$ , под действием которой происходит сближение стоек на величину  $\alpha$ .

Для многопарных передач зацеплением стойками являются зацепляющиеся зубчатые колеса, стержнями- зубья колес, имеющие изгибную и контактную составляющие суммарной деформации;  $s_i$ - зазоры между зубьями в ненагруженном состоянии;  $\alpha$ - мера упругого деформирования зубчатого зацепления - относительное смещение зубчатых колес в плоскости зацепления под действием внешней силы  $P$ , связанное с податливостью зубьев колес. Если учитывать изгибную и крутильную податливость ободьев зацепляющихся зубчатых колес, то стойки нужно рассматривать не как жесткие тела, а как упругие системы.

Для многосателлитных планетарных механизмов стойками являются центральные колеса; стержнями- сателлиты с податливыми зубьями;  $s_i$ - зазоры между зубьями центральных колес и сателлитами в ненагруженном состоянии;  $\alpha$ - мера упругого деформирования планетарного механизма- относительное смещение центральных колес в соответствующих плоскостях зацепления под действием внешней силы  $P$ , связанное с податливостью

зубчатых зацеплений. Если учитывать изгибную и крутильную податливость одного или обоих центральных колес, то стойки нужно рассматривать не как жесткие тела, а как упругие системы.

Для опор качения стойками являются кольца подшипника; стержнями - элементы качения (шарики или ролики);  $s_i$  - зазоры между телами качения и кольцами подшипника в ненагруженном состоянии;  $\alpha$  - мера упругого деформирования опоры качения - относительное смещение колец подшипника под действием внешней силы  $P$ , связанное с контактной жесткостью элементов подшипника. Если учитывать податливость одного или обоих колец подшипника и сопряженных с ними элементов (например, корпуса подшипника или вала, установленного на опору), то стойки нужно рассматривать не как жесткие тела, а как упругие системы.

Таким образом, рассматриваемая стержневая модель охватывает весь класс упругих систем с однородными связями и упомянутые выше инженерные приложения. Для этой стержневой модели требуется найти: число  $N$  стержней, воспринимающих заданную внешнюю силу  $P$ ; характер распределения силы  $P$  между нагруженными стержнями; сближение стоек  $\alpha$ , если заданы исходные зазоры  $s_i$  между стержнями и верхней стойкой в ненагруженном состоянии и упругие свойства стержней.

Уравнения совместности деформаций и перемещений и уравнение равновесия для стержневой модели имеют вид :

$$w_i = \alpha - s_i; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (10.1)$$

$$\sum_{i=1}^N P_i = P$$

где  $w_i$  - упругая деформация  $i$ -го стержня под действием приложенной к нему силы  $P_i$ ;  $s_i$  - зазор между  $i$ -м стержнем и верхней стойкой, для  $i=1$  принято,  $s_i=0$  ( $i=1$  соответствует стержню без нагрузки, вступившему в контакт с верхней стойкой).



В общем случае нелинейная статическая характеристика  $i$ -го стержня

$$w_i = (k_i P_i)^n, \quad (10.2)$$

где  $k_i$  - коэффициент податливости  $i$ -го стержня;  $n$  - показатель степени в статической характеристике стержней. Положим, что  $N$ -й стержень при действии внешней силы лишь вступил в контакт с верхней стойкой, но еще не воспринял нагрузку, т. е. для него...  $w_N = 0$ .

С учетом того, что  $s_1 = 0$ , из уравнений (10.1) и (10.2) получим :

$$w_1 = \alpha = s_N = (k_1 P_1)^n. \quad (10.3)$$

Тогда, исключая сближение стоек  $a$ , сведем систему уравнений (10.1) к виду

$$P_i = \frac{k_1}{k_i} P_1 \left( 1 - \frac{s_i}{s_N} \right)^{1/n} \quad (i=1,2,3,\dots,N);$$

$$\sum_{i=1}^N P_i = P. \quad (10.4)$$

Отсюда максимальная нагрузка, приходящаяся на первый стержень,

$$P_1 = P / \sum_{i=1}^N \left( \frac{k_1}{k_i} \right) \left( 1 - \frac{s_i}{s_N} \right)^{1/n}. \quad (10.5)$$

Из уравнения (10.5) следует, что сила  $P_1$  нелинейно зависит от внешней силы  $P$ , так как зазор  $s_N$  на  $N$ -м стержне, естественно, зависит от силы  $P$  (с увеличением  $P$  число стержней, воспринимающих силу  $P$ , а значит и зазор  $s_N$  на последнем из вступивших в контакт с верхней стойкой стержней зависит от силы  $P$ ).

Из уравнений (10.4) найдем безразмерную эпюру нагрузок на  $i$ -х стержнях:

$$P_i / P_1 = \frac{k_1}{k_i} \left( 1 - \frac{s_i}{s_N} \right)^{1/n}. \quad (10.6)$$

Решая совместно уравнения (10.3) и (10.5), найдем сближение стоек

$$\alpha = \left[ k_1 P / \sum \frac{k_1}{k_i} \left( 1 - \frac{s_i}{s_N} \right)^{1/n} \right]^n. \quad (10.7)$$

Таким образом, все подлежащие определению величины (кроме  $N$ ) найдены. Для определения числа стержней  $N$ , воспринимающих заданную внешнюю силу  $P$ , необходимо в уравнении (10.5) выразить  $P_1$  через  $s_N$  согласно выражению (10.3). Тогда получим выраженную в неявном виде связь между  $N$  и  $P$ :

$$k_1 P = s_N^{1/n} \sum \frac{k_1}{k_i} \left( 1 - \frac{s_i}{s_N} \right)^{1/n}. \quad (10.8)$$

Для любого названного выше технического приложения зазор  $s_i$  на  $i$ -м стержне может быть выражен следующим образом:

$$s_i = s_0 f_i, \quad (10.9)$$

где  $f_i$  - коэффициент зазора на  $i$ -м стержне;  $s_0$  — максимальный зазор в рассматриваемой системе (например, для многопарных передач зацеплением  $s_0$  — зазор на противоположном торце по отношению к торцу, где в контакт вступила первая пара зубьев; для многосателлитных планетарных механизмов  $s_0$  - максимальный зазор в ненагруженном состоянии для сателлита, который последним вступит в контакт после нагружения механизма; для опоры качения  $s_0$  - зазор в точке, диаметрально расположенной по отношению к точке начального касания элементов подшипника, и т. д.).

Важно, что установленная уравнением (10.8) связь получена в безразмерном виде. Такая форма записи решения задачи позволяет распространить полученные результаты на упругие системы с различными параметрами  $k_1$ ,  $s_0$  и  $n$ .

Для установления связи между  $N$  и  $P$  в явном виде необходимо для нескольких значений  $N$  (желательно охватить весь возможный для конкретной системы диапазон изменения  $N$ ) рассчитать правую часть

уравнения (10.8) и аппроксимировать результаты расчета степенной функцией:

$$\sum_{i=1}^N \frac{k_1}{k_i} (f_N - f_i)^{1/n} = F \left( \frac{N}{z} \right)^m, \quad (10.10)$$

где  $F$  и  $m$ - постоянные, зависящие от параметров конкретной системы,  $z$ - максимально возможное число стержней для конкретной системы.

После того как результаты расчета представлены в виде функции (10.10), связь между  $N$  и  $P$  может быть установлена в явном виде:

$$N = z \left( \frac{Pk_1}{Fs_0^{1/n}} \right)^{1/m}.$$

Таким образом полностью решается задача о раскрытии статической неопределимости упругих систем с односторонними связями.

В изложенном решении задачи было принято два допущения, которые привели к потере его общности- предположение, что статическая характеристика стержней имеет вид (10.2) и что стойки могут быть приняты жесткими телами. Распространим полученные результаты на более общий случай упругих систем, когда оба допущения оказываются необоснованными.

В общем виде статическая характеристика стержней в реальных системах имеет линейный и нелинейный член:

$$w_i = a_i P_i + b_i P_i^n. \quad (10.11)$$

Например, в многопарных передачах зацеплением с линейным касанием зубьев линейное слагаемое учитывает изгибную и контактную составляющие деформации зубьев при равномерном распределении контактной нагрузки, а нелинейное слагаемое — влияние перекоса осей колес на контактную деформацию зубьев; в опорах качения с роликоподшипниками линейное слагаемое характеризует контактную деформацию элементов подшипника при равномерном распределении контактной нагрузки по длине полосы

касания, а нелинейное слагаемое учитывает влияние перекоса колец подшипника на контактную деформацию и т. д.

В таких случаях в первую очередь необходимо двучленную статическую характеристику (10.11) аппроксимировать одночленной степенной зависимостью вида (10.2):

$$w_i = a_i P_i + b_i P_i^n = a_i \left( P_i + \frac{b_i}{a_i} P_i^n \right) = a_i P_i^{n_i},$$

где  $n_i$  - показатель степени, зависящий от отношения  $b_i/a_i$ , и лишь после этого использовать соотношения (10.5- 10.10).

Наконец, в общем случае стойки (одна или обе) в стержневой модели (см. рис. 10.1) могут иметь конечную жесткость. В этом более общем случае в полученные выше расчетные зависимости должна быть включена также упругая деформация стоек  $\delta_i$  в сечении, где расположен  $i$ - й стержень. Отличительной особенностью упругого деформирования стоек является то, что они как системы с распределенными параметрами деформируются в сечении расположения  $i$ - го стержня не только от нагрузки, приходящейся на этот стержень, но и от нагрузок, приходящихся на все остальные стержни, воспринимающие внешнюю силу  $P$ . Поэтому формула для определения  $\delta_i$  имеет структурный вид

$$\delta_i = \sum_{k=1}^N a_{ki} P_k, \quad (10.12)$$

где  $a_{ki}$  - коэффициент влияния, устанавливающий связь между нагрузкой, приходящейся на  $k$ - й стержень, и перемещением стойки в сечении расположения  $i$ -го стержня.

Например, в многопарных передачах зацеплением изгибная и крутильная деформации вала шестерни в сечении  $i$ - й пары зубьев зависят от нагрузок, воспринимаемых всеми находящимися в контакте парами зубьев; в многосателлитном планетарном механизме изгибная деформация одного или обоих центральных колес в сечении с  $i$ - м сателлитом зависит от нагрузок,

приходящихся на все находящиеся в зацеплении сателлиты; упругий прогиб одного или обоих колец подшипника (с корпусом или валом) в сечении расположения  $i$ -го элемента качения зависит от нагрузок, приходящихся на все элементы качения, воспринимающие внешнюю силу  $P$ , и т. д.

Включение величин  $\delta_i$  в полученные выше соотношения в виде (10.12) не вызовет принципиальных трудностей, однако потребует реализации итерационного процесса для уточненного определения нагрузок  $P_i$  с учетом податливости стойки. Значительного упрощения решения задачи можно добиться приближенным определением величины  $\delta_i$ , в предположении, что нагрузка равномерно распределяется между  $N$  стержнями либо нагрузка распределяется между стержнями в соответствии с нулевым приближением (10.6) (т. е. пренебречь податливостью стоек). В пользу такого приближенного учета деформации стоек говорят расчетные исследования К.И.Заблонского, показавшего, что учет неравномерного характера распределения нагрузок между зубьями в многопарном зацеплении лишь на 5 % уточняет величину изгибной деформации вала шестерни [81].

Для определения тем или иным способом величины  $\delta_i$  могут быть использованы разработанные подходы в [22], которые основаны на методах сопротивления материалов. На основании этих работ можно получить

$$\delta_i = a_i \frac{P}{N},$$

где  $a_i$  - по существу функция влияния при равномерном распределении нагрузки между стержнями.

В этом, более общем, случае найдем нагрузку на  $i$ -м стержне:

$$P_i = \frac{s_0}{k_i} \left[ (f_N - f_i) - \frac{a_i P}{s_0 N} \right]^{1/n}, \quad (10.13)$$

откуда нагрузка на первом стержне:

$$P_1 = \frac{s_0}{k_1} \left( f_N - \frac{a_1 P}{s_0 N} \right)^{1/n}. \quad (10.14)$$

Безразмерную эпюру нагрузок найдем из уравнений (10.13) и (10.14) в виде отношения:

$$P_i / P = \frac{k_1}{k_i} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{f_i}{f_N} \right) - \frac{a_i P}{s_0 f_N N} \right] / \left( 1 - \frac{a_1 P}{s_0 f_N N} \right) \right\}^{1/n}.$$

Сближение стоек найдем в виде-

$$\alpha = s_N = s_0 f_N.$$

На основе уравнения равновесия найдем связь между  $N$  и  $P$ :

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{k_1}{k_i} \right) [(f_N - f_i) - k_{ai} \bar{P}]^{1/n}, \quad (10.15)$$

где  $\bar{P} = \frac{Pk_1}{s_0^{1/n}}$  — безразмерная величина внешней силы  $P$ ;

$$k_{ai} = \frac{a_i}{Nk_1 s_0^{1-1/n}} = \left( \frac{s_0}{w_{1P}} \right)^{1/n} \left( \frac{\delta_i P}{s_0} \right) \frac{1}{N} \quad (10.16)$$

безразмерный коэффициент упругой деформации стойки.

Уравнение (10.16) существенно отличается от уравнения (10.8) тем, что внешняя сила  $P$  входит в обе его части. Это обстоятельство предопределяет необходимость при точном решении задачи использования итерационного метода.

Уравнение (10.15) решается в следующей последовательности. Полагая в нулевом приближении в правой части  $\bar{P} = 0$ , находим первое приближение  $\bar{P}_{(1)}$ :

$$\bar{P}_{(1)} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{k_1}{k_i} \right) (f_N - f_i)^{1/n}. \quad (10.17)$$

После чего, подставляя в правую часть уравнения (10.15) значение  $\bar{P}_{(1)}$  из уравнения (10.17), находим второе приближение  $\bar{P}_{(2)}$ :

$$\bar{P}_{(2)} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{k_1}{k_i} \right) \cdot [(f_N - f_i) - k_{ai} \bar{P}_{(1)}]^{1/n},$$

и т. д. до тех пор, пока левая и правая части уравнения не совпадут с наперед заданной точностью:

$$\bar{P}(t) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{k_1}{k_i} \right) [(f_N - f_i) - k_{ai} \bar{P}(t-1)]^{1/n} .$$

Найденное таким образом значение  $\bar{P}$  в  $t$ -м приближении считается действительным, и для него находится степенная аппроксимация вида (10.10).

Полученные зависимости универсальны и позволяют единым методом решать целый класс задач о статической нагруженности упругих систем с односторонними связями, отличающихся лишь параметрами  $s_0$ ,  $f_i$ ,  $k_i$  и  $n$ .

В качестве примера оценим статическую нагруженность многопарной зубчатой передачи. Будем считать, что между осями зубчатых колес имеется угол перекоса  $\gamma$ , который приводит к зазору между зубьями (со стороны ненагруженного торца)  $s_0 = P_x \gamma$  ( $P_x$  - осевой шаг зубьев). Поэтому входящий в полученные выше зависимости коэффициент зазора будет равен  $f_i = i - 1$ . Далее, для оценки влияния деформации элементов передачи на статическую нагруженность зацепления примем, что наряду с линейной составляющей зазора между зубьями  $f_i$  имеется также квадратичная составляющая  $(i - 1)^2$ , так что суммарный зазор между зубьями изменяется в соответствии с зависимостью:

$$s_i = s_0 [f_i + \delta f (i - 1)^2] = s_0 [1 - \delta f (i - 1)](i - 1),$$

где  $i$ - номер рассматриваемой пары зубьев (изменялся в расчете от 1 до 10);  $\delta f$  - коэффициент, учитывающий параболическую составляющую зазора (изменялся в расчете от 0 до 1).

В целях обобщения результатов расчета и построения эмпирических зависимостей для определения нагрузочных параметров передачи в программе расчета было предусмотрено определение следующих величин:

$$\alpha = \frac{\bar{\alpha}(N)}{\alpha(10)}; \quad \bar{N} = \frac{N}{10}; \quad P_1 = \frac{\bar{P}_1(N)}{P_1(10)}; \quad P = \frac{\bar{P}(N)}{P(10)}; \quad \alpha = P^{m_2}; \quad N = P^{m_1};$$

$$m_1 = \frac{\lg N}{\lg P}; \quad m_2 = \frac{\lg \alpha}{\lg P}; \quad m_3 = \frac{\lg P_1}{\lg P}; \quad P_1 = P^{m_3}.$$

Как показали расчеты, коэффициенты  $m_i$  зависят как от  $N$ , так и от  $\delta$ , однако это влияние настолько незначительно, что им в расчетах можно пренебречь и принять:

$$\alpha = \bar{P}^{0,181+0,358n}; \quad \bar{P}_1 = \bar{P}^{0,181/n+0,358}; \quad N = \bar{P}^{0,175+0,286n}.$$

Выполненные расчетные исследования позволяют впервые построить аналитические (эмпирические) зависимости для оценки статической нагруженности многопарных передач зацеплением при наличии погрешностей контакта одиночной пары зубьев. Для практического использования этих зависимостей необходимо располагать величинами  $k_1$  и  $n$ , характеризующими статическую характеристику одиночной пары зубьев.

Для контакта цилиндров с непараллельными осями необходимо построить статическую характеристику в виде:

$$\alpha_\gamma = (kP)^n, \quad (10.17)$$

в то время как в второй главе она получена в виде (4.12), из которого для контактной деформации получим

$$\alpha_\gamma = K_\gamma \alpha_H,$$

где коэффициент угла перекоса согласно (4.13) и (4.14) определяется

$$K_\gamma = \sqrt{2} \cdot \zeta^{0,5} \text{ - при } \zeta > 2$$

$$K_\gamma = 1 + 0,5\zeta \text{ . - при } \zeta < 2 \text{ .}$$

Последние две формулы в диапазоне значений для  $\zeta$  в интервале  $0 \leq \zeta \leq 7,0$  можно объединить:

$$K_\gamma = 1 + 0,57\zeta^{0,8},$$

где  $\zeta = \frac{l\gamma}{\alpha_H}$ ; здесь  $l$  - длина цилиндров,  $\alpha_H$  - контактная деформация

цилиндров без перекоса осей.



Естественно, что аппроксимация типа (10.17) может быть построена для определенного диапазона изменения величины  $\alpha_\gamma$ , например  $0 \leq \alpha_\gamma \leq \alpha_{\max}$  или

$$0 \leq \frac{\alpha_\gamma}{\alpha_{\max}} = \bar{\Delta}_\gamma \leq 1.$$

Варьирование  $\zeta = \frac{l\gamma}{\alpha_H}$  в диапазоне от 2 до 5 (что соответствует  $\frac{l\gamma}{l} \leq 1$ )

позволило построить следующую эмпирическую зависимость для  $\bar{\alpha}_\gamma$ :

$$\bar{\alpha}_\gamma = K_{\gamma m} \cdot \bar{\alpha}_H^n,$$

и

$$\alpha_\gamma = K_{\gamma m} \cdot [\alpha_{\max}^{\frac{1-n}{n}} \cdot \alpha_H]^n.$$

Таким образом, для контакта зубьев с прямолинейной образующей с начальным перекосом-

$$K = \frac{K_\alpha}{lE\alpha_{\max}} \alpha_{\max}^{1/n} \cdot \left[ 1 + 0,57 \left( \frac{l\gamma}{\alpha_{\max}} \right)^{0,8} \right]^{1/n};$$

$$\text{где } n = 1 - 0,4 \left( \frac{l\gamma}{\alpha_{\max}} \right)^{0,076}; \quad \bar{\alpha}_\gamma = \frac{\alpha_\gamma}{\alpha_{\max}}; \quad \bar{\alpha}_H = \frac{\alpha_H}{\alpha_{\max}}.$$

Эти формулы являются общими для произвольного угла перекоса  $\gamma$ , в том числе  $\gamma=0$ , в них можно принять  $K_\alpha = 5,5$ ;  $\Delta_{\max} = 10$  мкм.

Для зубчатых передач с начальным точечным касанием зубьев параметры статической характеристики контакта одиночной пары зубьев можно определить по соотношениям, полученным во второй главе. Полученные соотношения для  $\alpha$  и  $N$  могут быть использованы для определения статической нагруженности многопарной передачи зацеплением, если будут известны величины  $P$ ,  $\alpha$  и  $\bar{P}$  для  $N=10$ .

Из постановки задачи известно, что

$$\bar{\alpha} = \alpha / s_0 = (N - 1); \quad \alpha = s_0(N - 1);$$

$$\bar{P}_1 = \bar{\alpha}^{1/n} = \frac{P_1 k_1}{s_0^{1/n}}; \quad P_1 = [s_0 (N-1)]^{1/n},$$

поэтому

$$\bar{\alpha}(10) = 9; \quad \alpha = (N-1)/9; \quad \bar{P}_1(10) = 9^{1/n}; \quad P_1 = [(N-1)/9]^{1/n}.$$

Расчет  $\bar{P}(10) = P(10)k_1 / s^{1/n}$  при варьировании  $n$  от 0,5 до 1,0 позволило получить следующие эмпирические зависимости:

$$\bar{P}(10) = 45/n^{2,25}; \quad P(10) = \frac{45s_0^{1/n}}{k_1 n} 2,25 \quad (10.18)$$

дающей погрешность 6 % при варьировании  $\bar{P}(10)$  в реальном диапазоне от 0,6 до 1,0.

Располагая найденной величиной  $\bar{P}(10)$ , можно решить задачу определения параметров нагружения многопарной передачи зацеплением:

$$N = 10 \left( \frac{k_1 P}{45 s_0^{1/n}} n^{2,25} \right)^{0,175+0,286n}; \quad \alpha = 9 s_0 \left( \frac{k_1 P}{45 s_0^{1/n}} n^{2,25} \right)^{0,181+0,358n};$$

$$P_1 = \frac{(9 s_0)^{1/n}}{k_1} \left( \frac{k_1 P}{45 s_0^{1/n}} n^{2,25} \right)^{0,181/n+0,358}. \quad (10.19)$$

Полученные соотношения справедливы для случая, когда учитывается лишь угол перекоса  $\gamma$  между зубьями, которому соответствует зазор  $s_0 = \gamma \cdot P_x$ . В этих уравнениях  $k_1$  коэффициент податливости отдельно взятой пары зубьев в статической характеристике  $\alpha = bP^n = k^n P^n$ . По аналогии можно записать статическую характеристику многопарной передачи зацеплением при наличии перекосов между зубьями в следующем виде:

$$\alpha = \bar{b} P^{\bar{n}};$$

где

$$\bar{b} = 9 s_0 \left( \frac{k_1}{45 s_0^{1/n}} n^{2,25} \right)^{\bar{n}}; \quad \bar{n} = 0,181 + 0,358 n.$$

(10.20)

Последняя формула в системе (10.19), определяющая максимальную силу на зацепляющихся парах зубьев, может быть использована в прочностных расчетах.

Если наряду с перекосом учесть также и квадратичную составляющую зазоров между зубьями, то нагрузочные параметры многопарной передачи зацепление изменятся. Так, безразмерная деформация зацепления  $\bar{\alpha}$  в зависимости от погрешности  $\delta f$  будет изменяться в соответствии с соотношением

$$\bar{\alpha} = 9(1 + \delta f).$$

Расчеты показали, что независимо от показателя  $n$  в статической характеристике отдельной пары зубьев связь между  $\bar{P}_1(\delta f)$  и  $\bar{P}(1)$  подчиняется следующей зависимости:

$$\frac{\bar{P}_1(\delta f)}{\bar{P}_1(1)} = \left[ \frac{\bar{P}(\delta f)}{\bar{P}(1)} \right]^{0,861},$$

причем связь между  $\bar{P}_1(1)$  и  $P(1)$  независимо от  $n$  имеет вид:

$$\bar{P}_1(1) = 0,119 [\bar{P}(1)]^{1,092}.$$

В этом, более общем, случае связь между  $\bar{P}(10)$ ,  $n$  и  $\delta f$  получена в виде:

$$\bar{P}(10) = \frac{45 + 58,37 \delta f}{n^{2,25 + 0,92 \delta f}};$$

которая, очевидно, обращается в уравнение (10.8) при  $\delta f = 0$ . Соответственно изменятся зависимости (10.19) и (10.20), если в них вместо постоянной 45 принять  $45 + 58,37 \delta f$  и вместо показателя степени 2,25 принять  $2,25 + 0,92 \delta f$ .

Таким образом, выполненное расчетное исследование статической нагруженности многопарных передач зацеплением дает необходимую информацию для динамического и прочностного расчетов различных типов зубчатых передач (характеризуемых показателем степени  $n$  в статической характеристике одиночной пары зубьев).

## 10.2. Нагруженность зубчатых соединений (муфта).

## 10.2.1. Распределение нагрузки на зубьях муфт.

Несмотря на значительное число работ, в которых разрабатывались различные подходы к решению задачи о распределении нагрузки между зубьями муфт, по-прежнему остается актуальным вопрос совершенствования этих методов расчета. В работе [11] задача решена с учетом: нелинейности жесткостной характеристики зубьев муфты, переменной жесткости зубьев муфты по углу  $\theta$ , податливости обода обоймы; деформативной составляющей угла перекоса между боковыми поверхностями зубьев; износа контактирующих поверхностей зубьев.

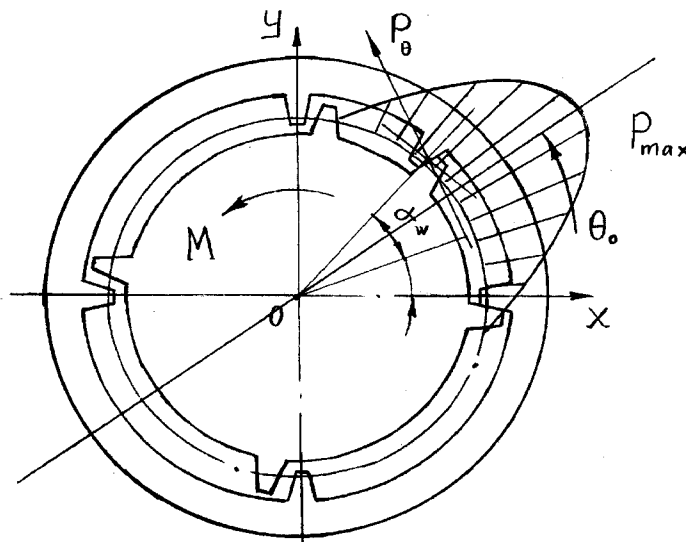


Рис.10.2. Схема зубчатой муфты

Безразмерную максимальную силу  $\bar{P}_1$  и зону нагруженных зубьев  $\theta_0$  можно определить по зависимостям [20]:

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= f_1(\bar{g})(54 \cdot \bar{P}_0)^{\alpha_1} & \text{при } \theta_0 \leq \pi/2 \\ \bar{P}_1 &= (\bar{P}_0 - \bar{P}_0^*) + \bar{P}_1^* & \text{при } \theta_0 \geq \pi/2 \\ \theta_0 &= f_2(\bar{g}) \cdot (54 \bar{P}_0)^{\beta_2}, \end{aligned} \quad (10.21)$$

где  $\bar{P}_1^*$  - безразмерная предельная нагрузка на зубе (при  $\theta = \pi/2$ );  $\bar{P}_0^*$  - безразмерная предельная нагрузка на зубьях;  $\bar{P}_0$  - безразмерная средняя нагрузка на зубе;

$$\bar{P}_0 = \frac{P_0 \cdot \delta_3}{j};$$

здесь  $P_0 = \frac{2T_1}{mz^2 \cos\alpha}$  - средняя нагрузка на зубе,  $T_1$  - вращающий момент,  $z$  - число зубьев,  $m$  - модуль,  $\delta_3$  - податливость зуба, которая определяется [20]:

$$\delta_3 = n_{20} \frac{50 \cos\alpha}{EbK_h}, \quad (10.22.)$$

где коэффициент  $n_{20}$  в зависимости от геометрии контактирующих поверхностей равняется [20]:

$n_{20} = 1,0$  - для зубьев без продольной модификации;

$n_{20} = 0,162b/m$  - для зубьев с продольной модификацией;

$K_h$  - коэффициент высоты зуба,  $K_h = h/m$ ,  $j$  - максимальный зазор между зубьями, вызванный перекосом осей полумуфта,

$j = b\gamma_T/2$  - для зубьев с прямолинейной образующей;

$j = R_b\gamma_T^2/2$  - для зубьев с продольной модификацией;

$$f_1(\bar{g}) = 0,05 - 0,04\bar{g} \quad (0 \leq g \leq 0,25) \quad (10.23)$$

$$f_1(\bar{g}) = 0,045 - 0,020\bar{g} \quad (0,25 \leq g \leq 1,0) \quad (10.24)$$

$$f_2(\bar{g}) = 56,3^0 + 20,9\bar{g} \quad (0 \leq g \leq 0,25) \quad (10.25)$$

$$f_2(\bar{g}) = 58,5^0 + 12,5\bar{g} \quad (0,25 \leq g \leq 1,0) \quad (10.26)$$

- для зубьев с прямолинейной образующей;

$$f_1(\bar{g}) = 0,126 - 0,088\bar{g} \quad (0 \leq g \leq 0,25) \quad (10.27)$$

$$f_1(\bar{g}) = 0,116 - 0,048\bar{g} \quad (0,25 \leq g \leq 1,0) \quad (10.28)$$

$$f_2(\bar{g}) = 20,8^0 + 12,08\bar{g} \quad (0 \leq g \leq 1,0) \quad (10.29)$$

- для зубьев с продольной модификацией; здесь

$$\bar{g} = \bar{P}_1 \frac{\delta_{ob}}{\delta_3} \quad (10.30)$$

- безразмерная деформация обода, где  $\delta_{ob}$  - податливость обода обоймы, которая согласно [20] определяется:

$$\delta_{ob} = 6,812 \frac{\sin^2 \alpha}{\pi E H} \left( \frac{\rho_n}{H} \right)^{3/2} \left( 1 + 0,098 \left[ \frac{H}{\rho} \left( \frac{L_A}{\rho} \right)^2 \right]^{1,5} \right), \quad (10.31)$$

где  $H$  - толщина обода обоймы,  $\rho_n$  - радиус нейтральной окружности обода обоймы,  $L_d$  - длина оболочки.

Приведенные зависимости, однако, для инженерных расчетов неудобны, т.к., в частности, соотношения (10.21) – (10.22) не являются формулами, а представляют уравнения относительно неизвестных нагрузки и зоны нагружения. Поэтому необходимо получить формулы для этих величин.

Расчеты показали, что зависимости (10.24), (10.24), (10.25), (10.26), (10.27), (10.28) можно объединить (с достаточно хорошей точностью)-

$$f_1(\bar{g}) = \alpha_2 (1 - \alpha_3 \cdot \bar{g}^{\alpha_4}) \quad (10.32)$$

$$f_2(\bar{g}) = \alpha_5 (1 + \alpha_6 \cdot \bar{g}^{\alpha_7}). \quad (10.33)$$

Очевидно, что из (7.21), (7.22), можно (исходя из определения) получить

$$\frac{\pi}{2} = f_2(\bar{g}^*) \cdot (54 \bar{P}_0^*)^{\beta_2} \quad (10.34)$$

$$\bar{P}_1^* = f_1(\bar{g}^*) \cdot (54 \bar{P}_0^*), \quad (10.35)$$

где

$$\bar{g}^* = \bar{P}_1^* \cdot \frac{\delta_d}{\delta_3}. \quad (10.36)$$

Из (10.21) с учетом (10.32) получим

$$\frac{\delta_{\dot{a}}}{\delta_{\dot{\varphi}}} \cdot \bar{P}_1 = \alpha_2 \cdot (1 - \alpha_3 \cdot \bar{g}^{\alpha_4}) \cdot (54 \bar{P}_0)^{\alpha_1} \cdot \frac{\delta_{\dot{a}}}{\delta_{\dot{\varphi}}}$$

или с учетом (10.30) получим

или

$$\bar{g} = \alpha_2 \left(1 - \alpha_3 \cdot \bar{g}^{\alpha_4}\right)^{\alpha_1} \cdot \frac{\delta_{\text{д}}}{\delta_3}, \quad (10.37)$$

$$\frac{\bar{g}}{1 - \alpha_3 \cdot \bar{g}^{\alpha_4}} = \alpha_2 \cdot (54\bar{P}_0)^{\alpha_1} \cdot \frac{\delta_{\text{д}}}{\delta_3}.$$

Стоящее слева выражение в (10.37) можно привести к виду (в данном интервале изменения  $\bar{g}$ )

$$\frac{\bar{g}}{1 - \alpha_3 \cdot \bar{g}^{\alpha_4}} = A_1 \cdot \bar{g}^{A_2}, \quad (10.38)$$

тогда, с учетом последнего, перепишем (10.37)

$$\alpha_2 \cdot (54\bar{P}_0)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\delta_{\text{ä}}}{\delta_{\text{ç}}}\right) = A_1 \cdot \left(\frac{\delta_{\text{ä}}}{\delta_{\text{ç}}}\right)^{A_2} \cdot \bar{P}_1^{A_2}, \quad (10.39)$$

откуда получим

$$\bar{P}_1 = (54\bar{P}_0)^{\alpha_1/A_2} \cdot \left(\frac{\delta_{\text{ä}}}{\delta_{\text{ç}}}\right)^{\frac{1-A_2}{A_2}} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{A_1}\right)^{1/A_2}$$

или

$$\bar{P}_1 = \alpha_8 \cdot (54\bar{P}_0)^{\alpha_9} \cdot \left(\frac{\delta_{\text{ä}}}{\delta_{\text{ç}}} \cdot K(t)\right)^{\alpha_{10}}. \quad (10.40)$$

Значения коэффициентов  $\alpha_i$  приведены в таблице 10.1.

Таблица 10.1

$\alpha_i$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$
ВИД							
прямой	0,70	0,20	0,050	0,50	0,661	56,3	0,261
бочка	0,50	0,50	0,126	0,46	0,700	20,8	0,581

$\alpha_i$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$	$\alpha_{10}$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$
ВИД							
прямой	0,80	0,051	0,683	-0,024	57,65	0,214	0,020
бочка	1,00	0,135	0,372	-0,255	22,42	0,530	0,060

$\alpha_i$	$\alpha_{14}$	$A_{15}$	$\alpha_{16}$	$\alpha_{17}$	$\alpha_{18}$	$\alpha_{19}$	$\alpha_{20}$
ВИД							
прямой	0,148	-0,093	0,211	-0,086	0,985	1,257	0,0226
бочка	0,254	-0,113	0,358	-0,297	0,372	-0,255	0,347

**Определяем**  $\theta_0$  – зона нагруженных зубьев. Из (10.22) с учетом (10.30) и (10.40) получим

$$\begin{aligned}
 \theta_0 &= \alpha_5 \cdot (1 + \alpha_6 \cdot \bar{g}^{\alpha_7}) \cdot (54\bar{P}_0)^{\beta_2} = \\
 &= \alpha_5 \cdot \left[ 1 + \alpha_6 \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\varphi}} \cdot k(t) \right)^{\alpha_7} \cdot \bar{P}_1^{\alpha_7} \right] \cdot (54\bar{P}_0)^{\beta_2} = \\
 &= \alpha_5 \cdot \left[ 1 + \alpha_6 \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\varphi}} \cdot k(t) \right)^{\alpha_7} \cdot \left\{ \alpha_8 (54\bar{P}_0)^{\alpha_9} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\varphi}} \cdot k(t) \right)^{\alpha_{10}} \right\}^{\alpha_7} \right] \cdot (54\bar{P}_0)^{\beta_2} = \\
 &= \alpha_5 \cdot \left[ 1 + \alpha_6 \cdot \left\{ \alpha_8 \cdot \left[ (54\bar{P}_0)^{\alpha_9} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\varphi}} \cdot k \right)^{\frac{1+\alpha_{10}}{\alpha_9}} \right]^{\alpha_7} \right\} \right] *
 \end{aligned}$$



$$* \left[ (54\bar{P}_0) \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \cdot k \right)^{\frac{1+\alpha_{10}}{\alpha_9}} \right]^{\beta_2} / \left[ \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \cdot k \right)^{\frac{1+\alpha_{10}}{\alpha_9}} \right]^{\beta_2} . \quad (10.41)$$

Обозначим через

$$\left[ (54\bar{P}_0) \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \cdot k \right)^{\frac{1+\alpha_{10}}{\alpha_9}} \right] = K,$$

тогда из (10.41) получим

$$\theta_0 = \alpha_5 \cdot \left[ 1 + \alpha_6 \cdot \left\{ \alpha_8 \cdot K^{\alpha_9} \right\}^{\alpha_7} \right] \cdot K^{\beta_2} / \left[ \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \cdot k \right)^{\frac{1+\alpha_{10}}{\alpha_9}} \right]^{\beta_2},$$

или

$$\theta_0 \cdot \left[ \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \cdot k \right)^{\frac{1+\alpha_{10}}{\alpha_9}} \right]^{\beta_2} = \alpha_5 \cdot \left[ 1 + \alpha_6 \cdot \left\{ \alpha_8 \cdot K^{\alpha_9} \right\}^{\alpha_7} \right] \cdot K^{\beta_2}. \quad (10.42)$$

С удовлетворительной точностью для инженерных расчетов правую часть последнего уравнения можно заменить:

$$\alpha_5 \cdot \left[ 1 + \alpha_6 \cdot \left\{ \alpha_8 \cdot K^{\alpha_9} \right\}^{\alpha_7} \right] \cdot K^{\beta_2} = \alpha_{11} \cdot K^{\alpha_{12}},$$

где постоянные  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$  определяются в зависимости от геометрии боковых поверхностей.

Следовательно, окончательно из (10.42) с учетом (10.34) можно получить

$$\theta_0 = \alpha_{11} \cdot \left[ (54\bar{P}_0)^{\alpha_{12}} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \cdot k(t) \right)^{\alpha_{13}} \right]. \quad (10.43)$$

Для определения  $\bar{P}_0^*$  обратимся к формуле (10.43), откуда получим

$$90^0 = \alpha_{11} \cdot \left[ (54\bar{P}_0)^{\alpha_{12}} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \cdot k \right)^{\alpha_{13}} \right],$$

откуда

$$\bar{P}_0^* = \frac{1}{54} \cdot \left( \frac{90}{\alpha_{11}} \right)^{1/\alpha_{12}} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \cdot k \right)^{-\alpha_{13}/\alpha_{12}},$$

или

$$\bar{P}_0^* = \alpha_{14} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \cdot k \right)^{\alpha_{15}}. \quad (10.44)$$

Наконец из (10.40) можно определить  $\bar{P}_1^*$ , а именно

$$\bar{P}_1^* = \alpha_8 \cdot (54\bar{P}_0^*)^{\alpha_9} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \cdot k \right)^{\alpha_{10}},$$

с учетом (10.44) перепишем последнее

$$\bar{P}_1^* = \alpha_{16} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \cdot k \right)^{\alpha_{17}}. \quad (10.45)$$

Чтобы определить максимальную нагрузку на зубе [21], пользуемся формулой (10.40)

$$\bar{P}_1 = \alpha_8 \cdot \frac{(54\bar{P}_0^*)^{\alpha_9}}{\delta_{\zeta}/j} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \cdot k(t) \right)^{\alpha_{10}},$$

при  $\theta_0 < 90^\circ$ ,

а при  $\theta_0 \geq 90^\circ$  обратимся к (10.45)

$$\bar{P}_1 = \left[ (\bar{P}_0 - \bar{P}_{0*}) + \bar{P}_1^* \right] / \frac{\delta_S}{j}.$$

### 10.2.2. Контактные и изгибные напряжения на зубьях муфт.

Полученные результаты позволяют определить параметры контакта зубьев при произвольном очертании профилей зубьев в продольном направлении. Это оказалось возможным сделать, учтя деформативную составляющую кривизны зубьев и угла перекося между образующими зубьев в продольном направлении, связанными с деформацией как собственно зубьев муфты, так и обода обоймы.

При исследовании влияния изгибной деформации зубьев муфт на уровень контактных напряжений, необходимо учитывать следующие обстоятельства. Как указано в пятой главе, в качестве расчетной модели зуба взята дискретно- континуальную модель, согласно которой зуб в продольном направлении деформируется подобно балке конечной длины на упругом основании. Тогда согласно зависимостям (4.13; 4.14), полученным в четвертой главе, определяется коэффициент концентрации контактных давлений (коэффициент угла перекося)  $K_\gamma$  с учетом деформативной составляющей угла перекося  $\gamma_d$  (5.31) с целью определения расчетных контактных напряжений.

Контактные напряжения в средней точке высоты зуба при перекося будут определяться [20]

$$\sigma_{H\gamma} = K_{H\gamma} \cdot \sigma_{H_0}, \quad (10.46)$$

где  $\sigma_{H_0}$  - контактные напряжения без учета концентрации контактных давлений вследствие перекося между осями полу муфт, определяется [14]

$$\sigma_{H_0} = K_p \cdot P_1 / bmK_h \quad (10.47)$$

- для зубьев без продольной модификации;

$$\sigma_{H_0} = 0,418 \cdot (K_p \cdot P_1 \cdot E / b \cdot R_s)^{0,5} \quad (10.48)$$

- для зубьев с продольной модификацией. Здесь  $P_1$  – максимальная нормальная сила, действующая на пару зубьев, определяется по формуле (10.40),  $m$  – модуль зубьев,  $K_h$  – коэффициент высоты зуба,  $K_p$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки между зубьями в связи с шаговыми погрешностями зубчатых венцов полу муфт, согласно [20] он определяется:

$$K_p = 1 + F_p / P_1 \cdot \delta_s, \quad (10.49)$$

где  $F_p$  – допуск на накопленную погрешность венцов полу муфт.

Изгибные напряжения в опасном сечении можно определять [14]

$$\sigma_{F\gamma} = K_{F\gamma} \cdot \sigma_{F_0} \quad (10.50)$$

где  $\sigma_{F_0}$  - изгибные напряжения без учета концентрации контактных давлений вследствие перекоса между осями полумуфт, вычисляются [14]

$$\sigma_{F_0} = \frac{K_p \cdot P_1 \cdot Y_{Fs}}{bm},$$

а коэффициент  $K_{F\gamma}$ , учитывающий неравномерное распределение напряжений по длине зуба, будет определяться [20]:

- для зубьев без продольной модификации

$$K_{F\gamma} = 1 + 0,225 \cdot \left( \frac{b \cdot \gamma_T}{\Delta_H} \right)^{0,4} \cdot \left( 1 - \frac{\gamma_{\ddot{a}}}{\gamma_T} \right)^{0,4};$$

- для зубьев с продольной модификацией

$$K_{F\gamma} = 1 + \left( \frac{2R_\delta \cdot \gamma_T}{b} \right)^2, \quad \text{ïðå} \quad \frac{2R_\delta \cdot \gamma_T}{b} \leq 1,0,$$

$$K_{F\gamma} = 2,00 \quad \text{ïðå} \quad \frac{2R_\delta \cdot \gamma_T}{b} > 1,0.$$

### 10.2.3. Изгибные напряжения в ободьях муфт

Для учета конструктивного исполнения обода в работе [9] получен коэффициент

$$C_n = \frac{a_2}{n^2 \cdot (n^2 - 1)^2 \cdot (n^2 + a_1) + a_2}, \quad (10.51)$$

где коэффициенты  $a_i$  – определяются

$$a_1 = 12E\rho^3 / GL_0^3, \quad a_2 = 12EH_0\rho^6 / EIL_0^3, \quad (10.52)$$

где  $L_0$ ,  $H_0$  – длина и толщина оболочки,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  - модуль упругости

второго рода,  $\rho$  – радиус нейтральной окружности обода обоймы, а напряжения определяются [20]

$$\sigma_{\text{ïá}} = \frac{(1 - C_n)}{f} \cdot \sigma_0, \quad (10.53)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{2\theta_0}{\pi} \cdot \left( \frac{Z}{2\pi} \right) \cdot \frac{P_1 \cdot \rho}{w} \cdot \frac{\cos \alpha}{2} \cdot \frac{\cos \theta_0}{\left( 1 - \left( \frac{2\theta_0}{\pi} \right) \right)^2}, \quad (10.54)$$

здесь  $w$  – момент сопротивления сечения обода изгибу. Как видно из (10.54)

при  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  для выражения  $\sigma_0$  получим неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ , однако не

трудно показать, что этот предел существует и равен  $\frac{\pi}{4}$ . С учетом этого

величину  $\frac{2\theta_0}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta_0}{\left( 1 - \left( \frac{2\theta_0}{\pi} \right) \right)^2}$  можно аппроксимировать простой функцией

типа  $u \cdot \left( \frac{2\theta_0}{\pi} \right)^b$  на участке  $\theta_0 \in [0, \pi/2]$ . Итак, для напряжений  $\sigma_0$  получим

выражение

$$\sigma_0 = \left( \frac{P_1 \cdot \rho}{w} \right) \cdot \frac{z}{2\pi} \cdot \frac{\cos \alpha}{2} \cdot 0,785 \cdot \left( \frac{2\theta_0}{\pi} \right)^{0,82}, \quad (10.55)$$

тогда, учитывая [20],  $f = \frac{0,576}{1 + 0,75 \frac{h_3}{\rho}}$ , напряжения в обode (10.53) будут

определяться

$$\sigma_{\text{ia}} = (1 - C_n) \cdot \left( \frac{2\theta_0}{\pi} \right)^{0,82} \cdot \left[ 1 + 0,75 \frac{h_{\text{c}}}{\rho} \right] \cdot 0,661 \frac{P_1 \cdot \rho \cdot z \cdot \cos \alpha}{b \cdot H^2}. \quad (10.56)$$

Что же касается коэффициента  $(1 - C_n)$ , то как показали расчеты, удовлетворительная точность для  $C_n$  получается уже при  $n = 2$ , следовательно из (10.51), (10.52) легко получить, что

$$[1 - C_n] = \left\{ 1 + \frac{h_0}{b} \cdot \left( \frac{\rho}{H} \right)^3 / \left[ \left( \frac{L_0}{\rho} \right)^3 + 7,8 \right] \right\}^{-1}. \quad (11.57)$$

Достоинством формулы (10.56) является то, что она универсальная – работает как для прямолинейных, так и для бочкообразных зубьев (угол  $\theta_0$  в этих формулах – рад).

**Рассмотрим 2 случая:**

**A)  $\theta_0 < \pi/2$ .** Определяем  $\theta_0$  из (10.43)

$$\theta_0 = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha_{11} \cdot (54 \cdot \bar{P}_0)^{\alpha_{12}} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \right)^{\alpha_{13}}, \quad \delta \ddot{a} \ddot{a}, \quad (10.58)$$

подставляя это значение угла  $\theta_0$  в (10.56), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\ddot{a} \ddot{a}} &= 0,661 \cdot (1 - C_n) \cdot \left( 1 + 0,75 \frac{h}{\rho} \right) \cdot \frac{P_1 \cdot \rho \cdot z \cdot \cos \alpha}{b \cdot H^2} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha_{11} \cdot (54 \cdot \bar{P}_0)^{\alpha_{12}} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \right)^{\alpha_{13}} \right]^{0,82} = \\ &= S_{\sigma} \cdot \left( \frac{\alpha_{11}}{90} \right)^{0,82} \cdot (54 \cdot \bar{P}_0)^{0,82 \alpha_{12}} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \right)^{0,82 \alpha_{13}}, \end{aligned} \quad (10.59)$$

где через  $S_{\sigma}$  обозначено

$$S_{\sigma} = 0,6661 \cdot (1 - C_n) \cdot \left( 1 + 0,75 \frac{h}{\rho} \right) \cdot \frac{P_1 \cdot \rho z \cdot \cos \alpha}{b \cdot H^2};$$

из (10.40) определяем  $(54 \bar{P}_0)$ :

$$(54 \bar{P}_0) = \left[ \frac{\bar{P}_1}{\alpha_8} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \right)^{-\alpha_{10}} \right]^{1/\alpha_9} = \left( \frac{\bar{P}_1}{\alpha_8} \right)^{1/\alpha_9} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \right)^{-\alpha_{10}/\alpha_9}. \quad (10.60)$$

Подставляя последнее в (10.59), имеем

$$\sigma_{\ddot{a} \ddot{a}} = S_{\sigma} \cdot \left( \frac{\alpha_{11}}{90} \right)^{0,82} \cdot \left[ \left( \frac{\bar{P}_1}{\alpha_8} \right)^{1/\alpha_9} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \right)^{-\alpha_{10}/\alpha_9} \right]^{0,82 \alpha_{12}} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \right)^{0,82 \alpha_{13}}. \quad (10.61)$$

Следовательно, для зубьев с прямой образующей боковых поверхностей получим

$$\sigma_{\ddot{a} \ddot{a}} = (1 - C_n) \cdot \left( 1 + 0,75 \cdot \frac{h}{\rho} \right) \cdot \frac{0,985 \bar{P}_1^{1,275} \cdot \rho z \cdot \cos \alpha}{\delta_s / j \cdot b H^2} \cdot \left( \frac{\delta_{\ddot{a}}}{\delta_{\zeta}} \right)^{0,0226}, \quad (10.62)$$

а для зубьев с продольной модификацией из (10.61) получим

$$\sigma_{\dot{a}\dot{a}} = (1 - C_n) \cdot \left(1 + 0,75 \frac{h}{\rho}\right) \cdot \frac{2,194 \bar{P}_1^{2,168} \cdot \rho z \cdot \cos \alpha}{\delta_s / j \cdot b H^2} \cdot \left(\frac{\delta_{\dot{a}}}{\delta_{\dot{c}}}\right)^{0,347} \quad (10.63)$$

или, объединяя (10.62) и (10.63) имеем:

$$\sigma_{\dot{a}\dot{a}} = \alpha_{18} \cdot (1 - C_n) \cdot \left(1 + 0,75 \cdot \frac{h}{\rho}\right) \cdot \bar{P}_1^{\alpha_{19}} \cdot \left(\frac{\delta_{\dot{a}}}{\delta_{\dot{c}}}\right)^{\alpha_{20}} \cdot \frac{\rho z \cdot \cos \alpha}{\delta_s / j \cdot b H^2}.$$

**Б)  $\theta_0 \geq \pi/2$ .** В этом случае в (10.56) величину  $\left(\frac{2\theta_0}{\pi}\right)$  надо принимать

равной 1. Следовательно, в этом случае имеем:

$$\sigma_{\dot{a}\dot{a}} = (1 - C_n) \cdot \left(1 + 0,75 \cdot \frac{h}{\rho}\right) \cdot \frac{D_1 \rho z \cdot \cos \alpha}{b H^2}.$$

### 10.3. Выводы по десятой главе

Оценено влияние перекоса, вызываемого погрешностями изготовления и монтажа, на напряженно- деформированное состояние зубьев зубчатых соединений (муфт).

Уточнено влияние податливости обода на зону нагруженных зубьев муфты. Получены расчетные зависимости для расчета зубчатых муфт на прочность при различной форме боковых поверхностей зубьев с учетом перекоса и конечных их размеров.

## РАЗДЕЛ III

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И СОПОСТАВЛЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

## ГЛАВА 11 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНТАКТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГИХ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ПРИ ИХ ЛИНЕЙНОМ И КРОМОЧНОМ КОНТАКТЕ

11.1. Экспериментальные исследования контактных деформаций цилиндрических, конических и бочкообразных роликов, имитирующих контакт зубьев зубчатых колес и муфт и роликовых подшипников

## 11.1.1. Цели и задачи исследования

Выполненные в предыдущих главах диссертации теоретические исследования построены на ряде допущений и гипотез, что потребовало постановки ряд экспериментов, **целью** которых была проверка принятых допущений и расчетных моделей (винклеровское упругое основание; изгиб балки на упругом основании; дискретно- континуальная модель зуба), которые не совсем очевидны.

Одним из основных вопросов, нуждающихся в экспериментальной проверке, является напряженно- деформированное состояние собственно зубьев зубчатых колес, поскольку принятые при их анализе допущения являются достаточно сильными и на первый взгляд неочевидными.

Действительно, контактная деформация зубьев при произвольном взаимном положении боковых поверхностей зубьев может быть определена лишь численными методами теории упругости, поэтому полученные в работе параметры контакта зубьев необходимо было проверить экспериментальным путем. В первую очередь это относилось к контактной деформации зубьев при наличии перекоса, поскольку расчетная модель упругого основания типа винклеровского, на основе которой получены параметры контакта при перекосе, также не совсем очевидна. Это относится также и сжатию ролика



двумя плоскими плитами, когда определяется контактная податливость роликовых подшипников, аналитическое определение которой основано на использовании физико-математической модели контактного взаимодействия упругих тел конечных размеров при начальном касании по линии, разработанной в настоящей работе.

Необходимо иметь в виду, что в литературе опубликовано достаточное количество тонких экспериментальных исследований контактной и изгибной деформации зубьев, выполненных в модельных условиях, поэтому **задача** заключалась не в получении дополнительной информации, а в обобщении имеющихся экспериментальных данных и корректировке на их основе, если потребуется, полученных с помощью принятых моделей, расчетных зависимостей.

#### 11.1.2. Методы и средства исследования

Экспериментальные исследования контактных деформаций роликов с параллельными осями, с начальным неприлеганием, а также с продольной модификацией, моделирующих контакт зубьев зубчатых передач, проводились **методом** голографической интерферометрии. В основу метода взят принцип лазерной спекл-интерферометрии. Сущность метода заключается в том, что оптически шероховатая поверхность объекта исследования регистрируется в виде спеклограмм начального и смещенного погашений этого объекта под воздействием моделируемых внешних сил. Затем производится обработка голограмм с последующей расшифровкой картин интерференционных полос. В зависимости от условий регистрации и наблюдения интерференционной картины можно получить первую или вторую производные от смещений по координатам.

На рис. 11.1 приведена схема теоретической реализации метода. В плоскости  $X_2X_3$  расположена оптически шероховатая поверхность  $D$ . По нормали к ней  $X_1$  расположен оптический объектив 1, имеющий фокусное

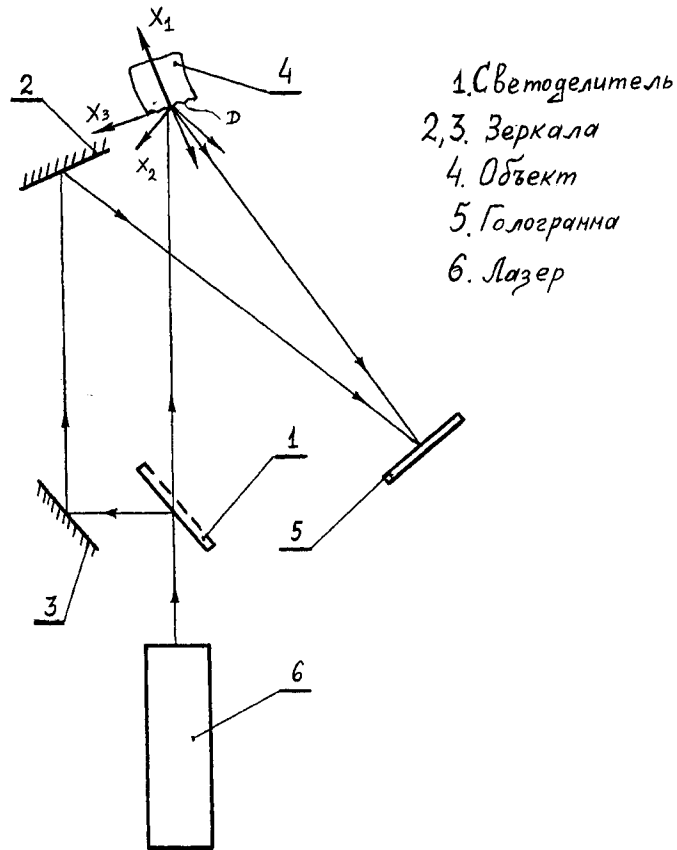


Рис. 11.1. Регистрация голограмм сфокусированных изображений с использованием протяжного опорного источника в отраженном излучении.

расстояние  $f$  и диаметр  $a$ . Исследуемая поверхность освещается расходящимся пучком света  $U$ . Регистрация спекл-структуры осуществляется в плоскости изображения  $I$ .

Известно, [92, 187], что первая экспозиция фотопластинки после проявления дает так называемое дифракционное тело, распределение интенсивности в котором определяется апертурой объектива и расстоянием от него до плоскости регистрации. Это распределение интенсивности в спекл-структуре можно заменить набором синусоидальных решеток.

При регистрации второй экспозиции на фотопластинку после приложения нагрузки и смещения ролика на расстояние  $d_2$  в направлении

оси  $X_2$  – на ней регистрируется две идентичные спекл- структуры. Их относительное смещение также происходит параллельно оси  $X_2$  и равно

$$Q_2 = \beta d_2 , \quad (11.1)$$

где  $\beta$  – увеличение оптической системы.

Рассмотрим в первой спекл- структуре слагаемое, соответствующее решетке с пространственной частотой  $\gamma_{x_2}$ , т.е. с периодом  $Q = 1/\gamma_{x_2}$ . Слагаемое, противоположное ему по фазе образуется при условии

$$Q_2 = \left( n + \frac{1}{2} \right) S , \quad n=0,2. \quad (11.2)$$

При погашении таких решеток интенсивность дифрагированного света равна нулю.

При однократной экспозиции распределение интенсивности в спекл- структуре может быть записано в виде:

$$I_{\text{нач}}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x'_2) \delta(x_2 - x'_2) dx'_2 , \quad (11.3)$$

где  $\delta(x_2 - x'_2)$  – дельта функция Дирака, которая определяется выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx' = 1 , \quad \delta(x - x') = 0 , \quad x \neq x' .$$

Интенсивность волны в точке  $P(x_2)$  при ее смещении на  $d_2$  определяется

$$I_{\text{смещ}}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x'_2) \delta(x_2 + Q_2 - x'_2) dx'_2 , \quad (11.4)$$

$$Q_2 = \beta d_2 . \quad (11.5)$$

Интенсивность спекл- структуры в этой же точке при двойной экспозиции:

$$I_{\text{дв}}(x_2) = I_{\text{нач}}(x_2) + I_{\text{смещ}}(x_2) . \quad (11.6)$$

Подставляя (11.3) и (11.4) в (11.6) получим:

$$I_{\text{дв}}(x_2) = I(x'_2) \cdot [\delta(x_2 - x'_2) + \delta(x_2 + Q_2 - x'_2)] \cdot dx'_2 . \quad (11.7)$$

Процесс пропускания через такую голограмму луча лазера, описывается выражением для амплитуды  $U_{\text{дв}}(\sin \alpha)$  дифрагировавшей на угол  $\alpha$  ,

$$U_{\partial\alpha}(\sin \alpha) = U_0 F[I_{\partial\alpha}(x_2)] . \quad (11.8)$$

Выражение (11.7) представляет собой свертку функций:  $I(x_2)$  и  $[\delta(x_2) + \delta(x_2 + Q_2)]$ .

Поэтому, пользуясь теоремой о свертке

$$F[g(x) \otimes h(x)] = I(f)H(f) ,$$

где символ  $\otimes$  обозначает оператор свертки, определяемый как

$$g(x) \otimes h(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(x')h(x-x')dx' ,$$

получим следующую формулу:

$$U_{\partial\alpha}(\sin \alpha) = U_0 F[(x_2)]F[\delta(x_2) + \delta(x_2 + Q_2)] . \quad (11.9)$$

Из литературы [54] известно, что:

$$F[\delta(x_2) + \delta(x_2 + Q_2)] = \cos(\pi Q_2 \sin \alpha / \lambda) \exp(-i\pi Q_2 \sin \alpha / \lambda) . \quad (11.10)$$

Амплитуда интенсивности света, дифрагировавшей под углом  $\alpha$  определяется

$$U_{\partial\alpha}(\sin \alpha) = I_{\partial\alpha}(\sin \alpha) \cos(\pi Q_2 \sin \alpha / \lambda) , \quad (11.11)$$

а значение распределения интенсивности в Фурье- плоскости будет:

$$I_{\partial\alpha}(\sin \alpha) = I_{\partial\alpha}(\sin \alpha) \cos^2(\pi Q_2 \sin \alpha / \lambda) . \quad (11.12)$$

Из последнего выражения видно, что дифференциальное гало будет иметь полосы Юнга, причем интенсивность в этих полосах будет находиться из условия

$$\sin \alpha = (2n + 1) \frac{\lambda}{2Q_2} , \quad (11.13)$$

где  $n=0,1,2,\dots$  как при дифракции на двух щелях. Из (11.13) при малых смещениях угловое расстояние между полосами Юнга:

$$\alpha = \frac{\lambda}{Q_2} . \quad (11.14)$$

Расстояние  $U$  между полосами на дифракционном гало равно  $L\alpha$ , где  $L$  – расстояние между фото- пластинкой и Фурье- плоскостью. Если  $Q_2$  меньше половины периода решетки с наименьшим периодом, то полос на гало не

наблюдается. Величина минимального периода  $d_{2\min}$  решетки соответствует диаметру диона Эйри в плоскости регистрации спекл-структуры и примерно равна

$$d_{2\min} = 1,22\lambda \frac{f}{d}, \quad (11.15)$$

где  $f$  – фокусное расстояние линзового объектива,  $d$  – его диаметр.

Таким образом, наблюдая дифракцию света на различных участках спеклограмм, можно определить смещение  $d_2$  соответствующих им точек объекта исследования. Для этого нужно знать направление полос Юнгана гало и измерить расстояние  $U$  между ними. Тогда из соотношения (11.5) и (11.14) получим

$$\frac{U}{L} = \frac{\lambda}{Q},$$

или

$$\frac{U}{L} = \frac{\lambda}{\beta d_2}. \quad (11.16)$$

Из последней формулы следует, что величина искомого смещения  $d_2$  равна:

$$d_2 = \frac{\lambda \cdot L}{\beta \cdot U}. \quad (11.17)$$

При известном направлении деформирующей силы и наклона полос Юнга  $\theta$  по отношению к этому направлению, величина смещения  $d_2^F$  вдоль действующей силы  $F$  принимает вид:

$$d_2^F = \frac{\lambda \cdot L}{\beta \cdot U} \cos \theta. \quad (11.18)$$

Величину деформации на некоторой базе  $b_x$  с учетом формулы (11.18) можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_{d_2^F} = \frac{d_2^{F_2} - d_2^{F_1}}{b_x},$$

или

$$\varepsilon_{d_2^F} = \frac{\lambda \cdot L}{\beta \cdot b_x} \cdot \frac{U_2 \cos \theta_1 - U_1 \cos \theta_2}{U_1 \cdot U_2}, \quad (11.19)$$

где  $\varepsilon_{d_2^F}$  – деформация под действием силы  $(F_2 - F_1)$ .

На рис 11.2 приведена схема, по которой осуществлена практическая реализация метода для регистрации спекл-интерферограмм от двух лазеров.

От источников когерентного излучения лазеров 1 и 2 поворотными зеркалами 9 и 10 свет направляется на объект исследования 3. Проходя через линзы 6 и 7 луч расширяется до требуемых размеров так, чтобы светом была равномерно освещена вся исследуемая поверхность. В нашем случае объект 3 имел размеры диаметра ролика от 10 до 40 мм. Поверхность объекта диффузно рассеивала лазерное излучение, часть которого попадала в апертуру линзового объектива 5.

В связи с тем, что при проведении экспериментальных

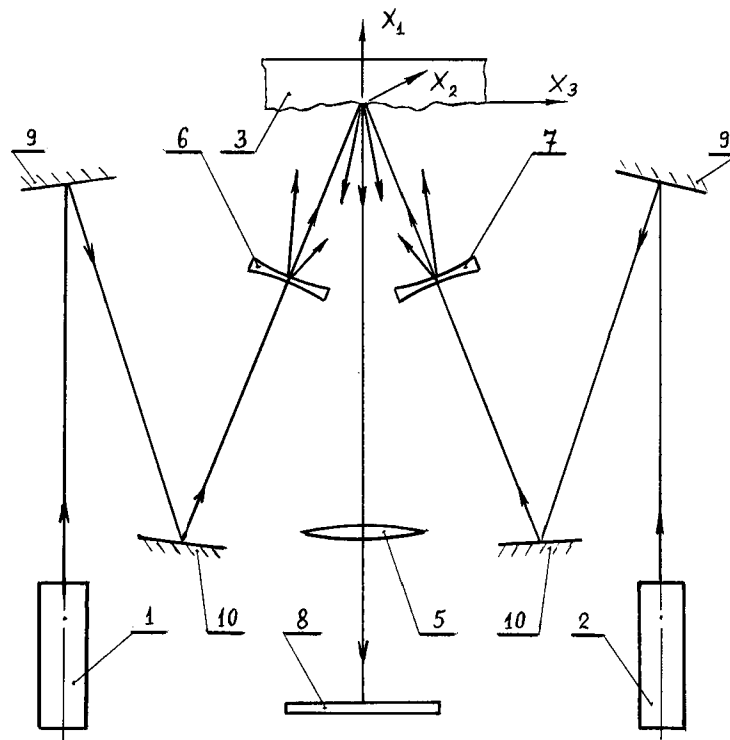


Рис. 11.2. Оптическая схема. 1,2- источников когерентного излучения лазеров; 3- объект исследования; 4,5- выпуклая линза; 6,7- рассеивающие линзы; 8- голограмма; 9,10- поворотные зеркала.

исследований на статическую нагруженность большое влияние на точность результатов оказывает жесткость элементов самого нагружающего устройства, исследования проводились как на стальных роликах, так и на роликах из оргстекла.

Специально разработанное устройство нагружения позволило создавать нагрузки до  $20000\text{ Н}$  при сохранении позиционирования исследуемого объекта как единого целого не хуже единиц мкм, наложение которых на полезную информацию учитывалось по уточненной формуле (11.18). На рис. 11.3 представлена схема этого устройства. Цилиндр 1 свободно может

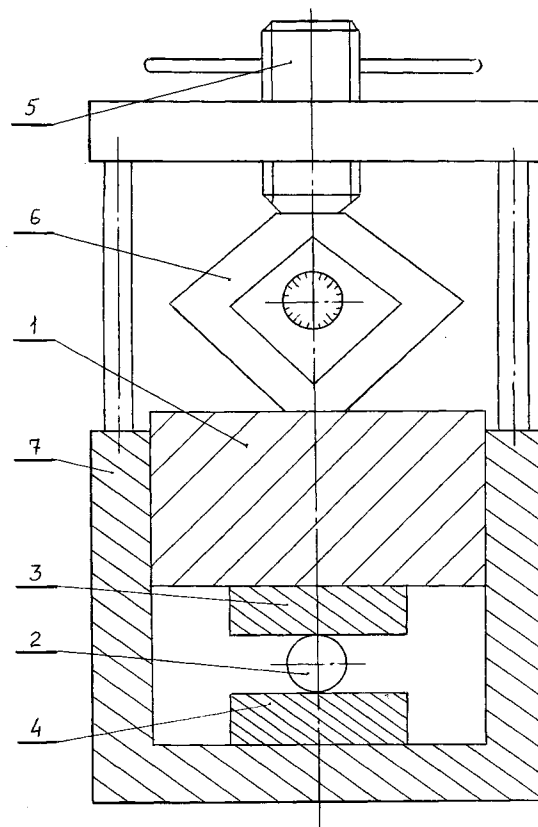


Рис. 11.3. Устройство нагружения

передвигаться в корпусе 7. Усилие в устройстве создается винтовым механизмом и через динамометр 6 передается цилиндру 1. Образец 2 (ролик) устанавливается между плитами 3 и 4.

## 11.2. Результаты экспериментального исследования

По изложенной методике проведено экспериментальное исследование контактных деформаций роликов с параллельными осями, с начальным неприлеганием и с продольной модификацией, моделирующих контакт зубьев зубчатых передач.

Результаты исследования цилиндрических стальных роликов приведены в табл. 11.1. Диаметры роликов варьировались от 7,0 мм до 30,0 мм, длины – от 7,5 мм до 30 мм, диапазон изменения

Таблица. № 11.1

Контактная деформация стальных роликов  $\gamma = 0$

$l=20$	$\delta$ , мкм	2,50	4,50	5,98	7,50	10,0	12,0	15,01
$2r=7$	$P, H$	1300	2400	3000	3800	5800	6600	8200
$l=7,5$	$\delta$ , мкм	5,00	8,80	12,50	17,89	25,00	30,97	37,20
$2r=7,5$	$P, H$	1050	1875	2475	3300	4875	6000	7350
$l=30$	$\delta$ , мкм	-	-	-	3,95	8,00	9,01	11,7
$2r=30$	$P, H$	-	-	-	3240	6150	6900	8700

удельной нагрузки составлял от 100 Н/мм до 1000 Н/мм.

В табл. 11.2 приведены результаты исследований контактной деформации цилиндрических роликов из оргстекла, при варьировании

Таблица. № 11.2

Контактная деформация цилиндрических роликов из оргстекла  $\gamma = 0$

$l=40$	$\delta$ , мкм	5,50	13,00	20,02	22,40	26,00
$2r=10$	$P, H$	100	260	400	500	600
$l=40$	$\delta$ , мкм	-	6,70	11,3	16,7	24,0
$2r=30$	$P, H$	-	168	220	380	548



удельной нагрузки от 2,5 Н/мм до 25,0 Н/мм. Параметры роликов: длина  $l = 40$  мм; диаметр  $2r = 10$  мм; 30 мм, модуль упругости материала -  $E = 2,7 \cdot 10^3$  Н/мм<sup>2</sup>.

Начальное неприлегание контактирующих цилиндров в эксперименте имитировано специальными стальными роликами (см. рис. 11.4), при этом

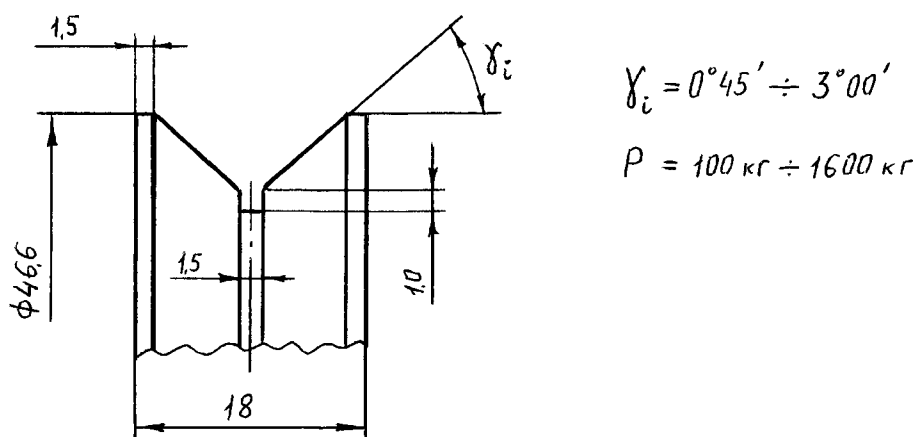


Рис.11.4. Стальной ролик

угол перекоса варьировался от 0° до 3°, нагрузка - от 1000 Н до 16000 Н. В табл. 11.3 приведены результаты этих

Таблица. № 11.3

Контактные деформации стальных роликов при наличии угла перекоса  $\gamma \neq 0$

$\gamma = 5,24^*$	$\delta$ , мкм	-	-	10,5	21,5	26,6	32,0	35,0	46,2	62,5	72,0
	$P$ , кН	-	-	1,55	3,50	4,40	5,60	6,30	8,50	12,5	15,0
$\gamma = 3,93^*$	$\delta$ , мкм	-	-	-	16,0	32,5	37,5	43,0	48,0	52,5	-
	$P$ , кН	-	-	-	2,75	6,40	7,50	8,80	10,4	11,3	-
$\gamma = 2,62^*$	$\delta$ , мкм	-	8,5	11,0	13,0	18,5	23,5	27,0	32,0	40,5	-
	$P$ , кН	-	1,25	1,75	2,40	3,30	4,50	5,70	6,80	8,45	-
$\gamma = 0$	$\delta$ , мкм	3,7	5,2	6,9	7,5	9,0	10,4	12,5	14,0	15,8	17,5
	$P$ , кН	1,33	2,00	2,67	3,33	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	8,90

исследований клнтактных деформаций.

В работе также исследовались контактные деформации стальных бочкообразных роликов (рис. 11.5), имитирующие контакт зубьев с продольной модификацией, которая является эффективным методом

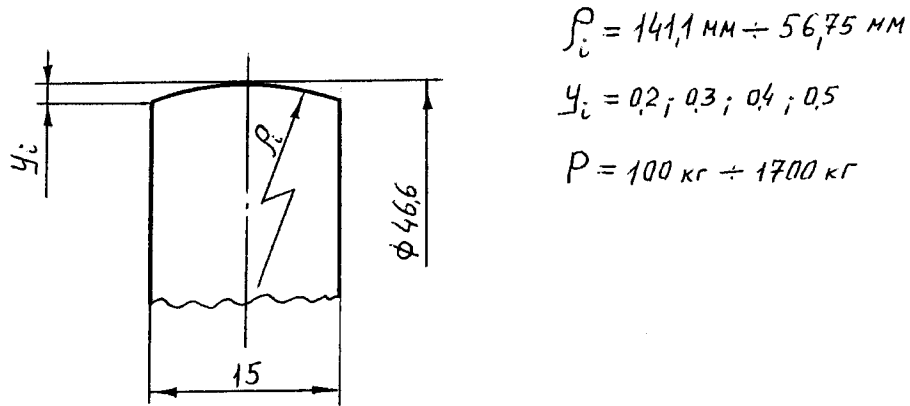


Рис.11.5. Стальной бочкообразный ролик

снижения концентрации контактных напряжений в результате начального неприлегания зубьев цилиндрических зубчатых передач. Исследования проводились при варьировании радиуса бочки от 56,75 мм до 281 ,75 мм,

Таблица. № 11.4

Контактные деформации стальных роликов бочкообразных роликов

$\rho_1 =$	$\delta$ , мкм	11,0	14,6	16,9	21,0	23,3	32,4	39,8	42,5	45,7
141,1	$P$ , кН	1,53	2,55	3,23	4,505	5,95	10,03	13,6	15,47	17,0
$\rho_2 =$	$\delta$ , мкм	12,3	16,6	-	-	24,6	28,9	38,3	43,1	47,4
94,25	$P$ , кН	1,44	2,72	-	-	6,08	8,16	12,96	14,56	16,0
$\rho_3 =$	$\delta$ , мкм	-	-	-	20,4	-	27,0	43,4	45,9	49,9
70,81	$P$ , кН	-	-	-	3,52	-	8,96	12,16	14,08	16,0
$\rho_4 =$	$\delta$ , мкм	10,2	13,9	-	21,9	-	28,8	42,2	-	49,6
56,75	$P$ , кН	1,50	2,175	-	3,795	-	6,30	12,0	-	15,0

нагрузка варьировалась от 1000 Н до 17000 Н. В табл. 11.4 приведены результаты этих экспериментальных исследований. Эти же результаты в безразмерном виде (в долях максимальных значений) приведены в табл. 11.5.

Таблица. № 11.5

Контактные деформации стальных бочкообразных роликов в безразмерном виде

$\rho_1 =$	$\bar{\delta}$	1,0	0,93	0,87	0,71	0,51	0,46	0,37	0,32	0,24
141,1	$\bar{P}$	1,0	0,91	0,80	0,59	0,35	0,27	0,19	0,15	0,09
$\rho_2 =$	$\bar{\delta}$	1,0	0,91	0,81	0,61	0,52	-	-	0,35	0,26
94,25	$\bar{P}$	1,0	0,91	0,81	0,51	0,38	-	-	0,17	0,09
$\rho_3 =$	$\bar{\delta}$	1,0	0,92	0,87	0,54	-	0,41	-	-	-
70,81	$\bar{P}$	1,0	0,88	0,76	0,56	-	0,22	-	-	-
$\rho_4 =$	$\bar{\delta}$	1,0	-	0,85	0,58	-	0,44	-	0,28	0,21
56,75	$\bar{P}$	1,0	-	0,80	0,42	-	0,25	-	0,15	0,10

## ГЛАВА 12. СОПОСТАВЛЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Анализ исследования показал, что предложенная в первой главе физико-математическая модель контактной деформации круговых цилиндров бесконечной длины с начальным прилеганием по линии, и полученные на ее основе формулы контактной деформации круговых цилиндров бесконечной длины и цилиндрических тел конечных размеров находятся в удовлетворительном соответствии как с результатами выполненным в работе экспериментом, так и имеющимися в литературе экспериментальными и расчетными по МКЭ данными.

Для проверки достоверности полученных в работе формул для определения величины контактной деформации круговых цилиндров, в работе экспериментальным путем определены сближение стальных плит, при сжатии ими роликов из оргстекла. На рис.12.1 показаны эти результаты

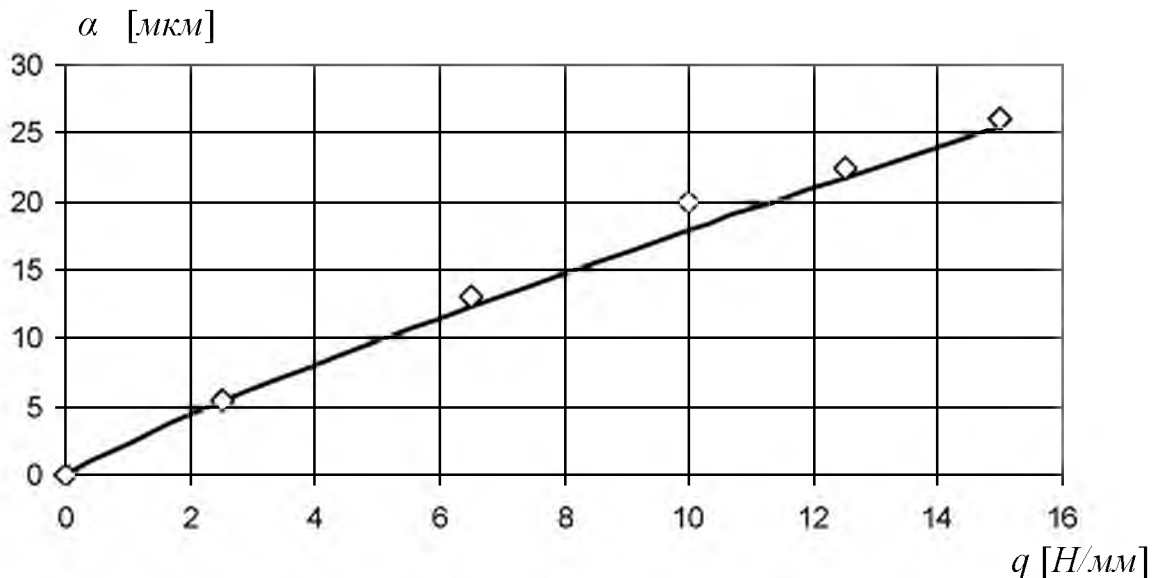
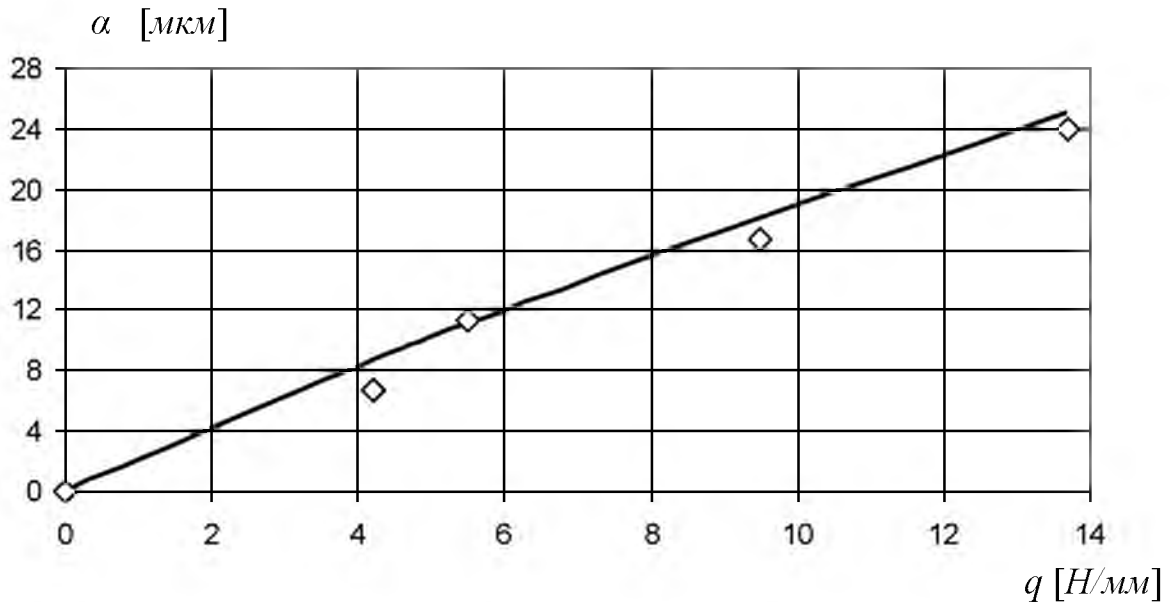


Рис. 12.1. Сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных (точки) исследований контактной деформации роликов из оргстекла. Параметры роликов:

а) длина  $l = 40$  мм ; диаметр  $2r = 10$  мм.



б) длина ролика  $l = 40$  мм ; диаметр ролика  $2r = 30$  мм

исследования. Там же приведены результаты расчетного определения контактной деформации. Из данного сопоставления видно, что они согласуются удовлетворительно. Отсюда следует, что предложенная в первой главе физико-математическая модель, и разработанный на ее основе метод определения контактной деформации круговых цилиндров можно использовать для решения практических задач.

Предложенная в третьей главе физико-математическая модель силового контакта упругих тел цилиндрической формы позволила определить суммарную деформацию упругих тел конечных размеров, находящихся до деформации в контакте по линии. С помощью указанной модели разработан метод, с использованием которого стало возможным аналитическое определение **сближения сжимающих роликов плит из одинаковых материалов.**

В третьей главе теоретически доказан полученный многими авторами, например [161, 204], факт о независимости сближения плит от радиуса ролика из одинаковых материалов. Для проверки полученных зависимостей (3.7; 8.2), на рис. 12.2 приведено сопоставление расчетных и экспериментальных данных. Точками показаны результаты экспериментальных исследований сжатия стальных роликов стальными

плитами, а результаты расчетных величин показаны линиями, из которых видно, что они согласуются удовлетворительно.

Как уже было отмечено, результаты теоретических исследований находятся в удовлетворительном соответствии также с экспериментальными и расчетными данными МКЭ, имеющимися в литературе.

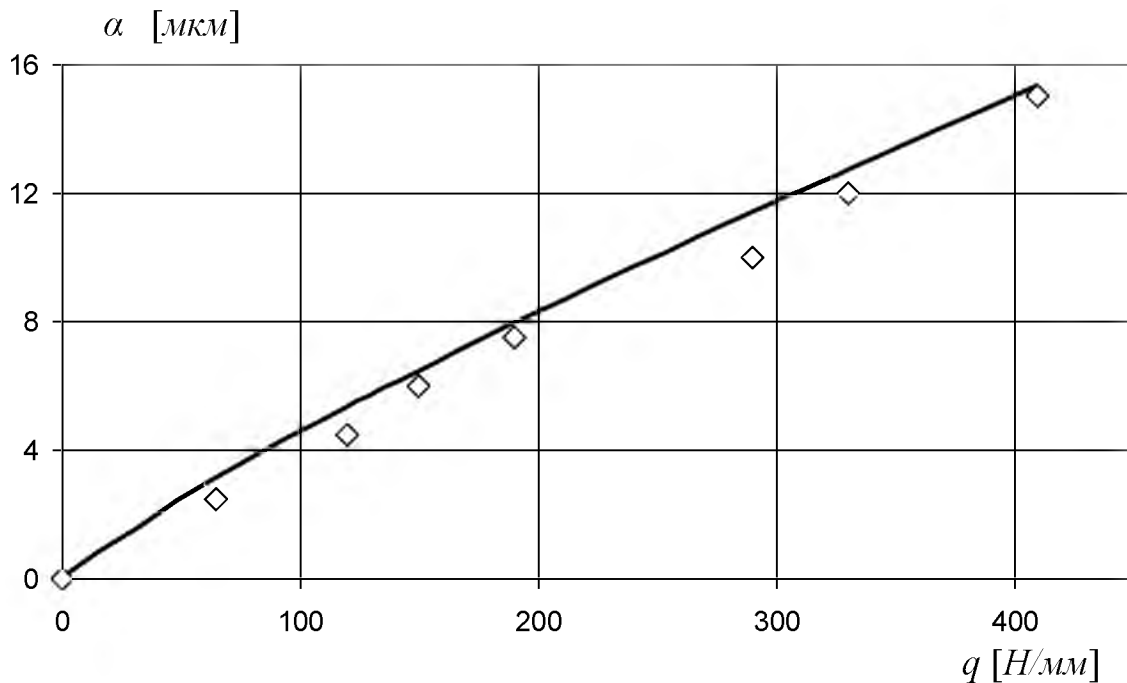
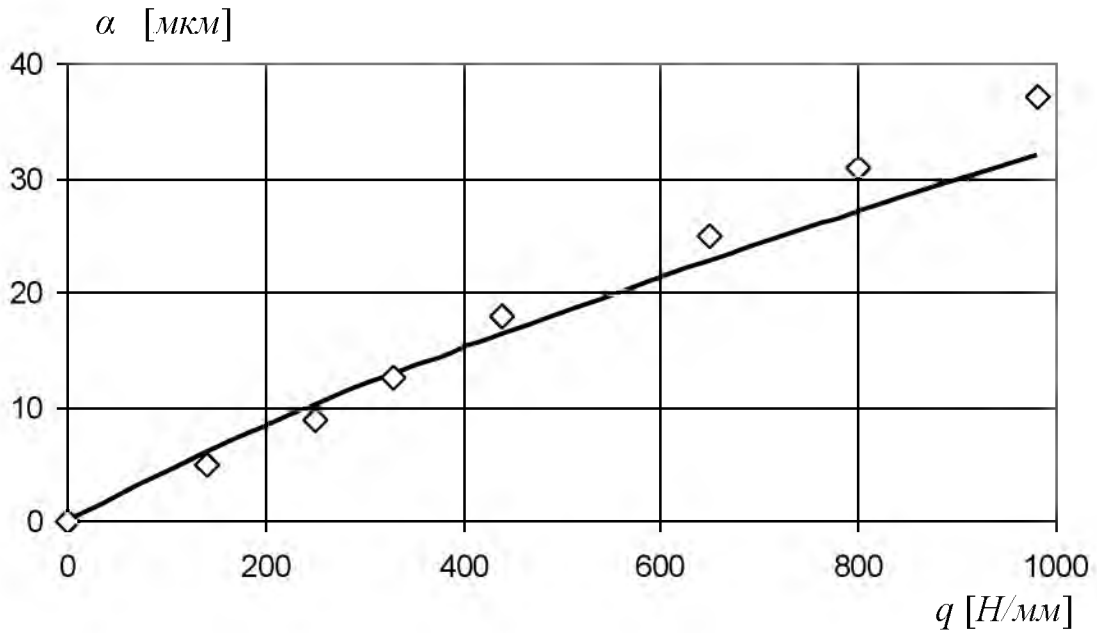
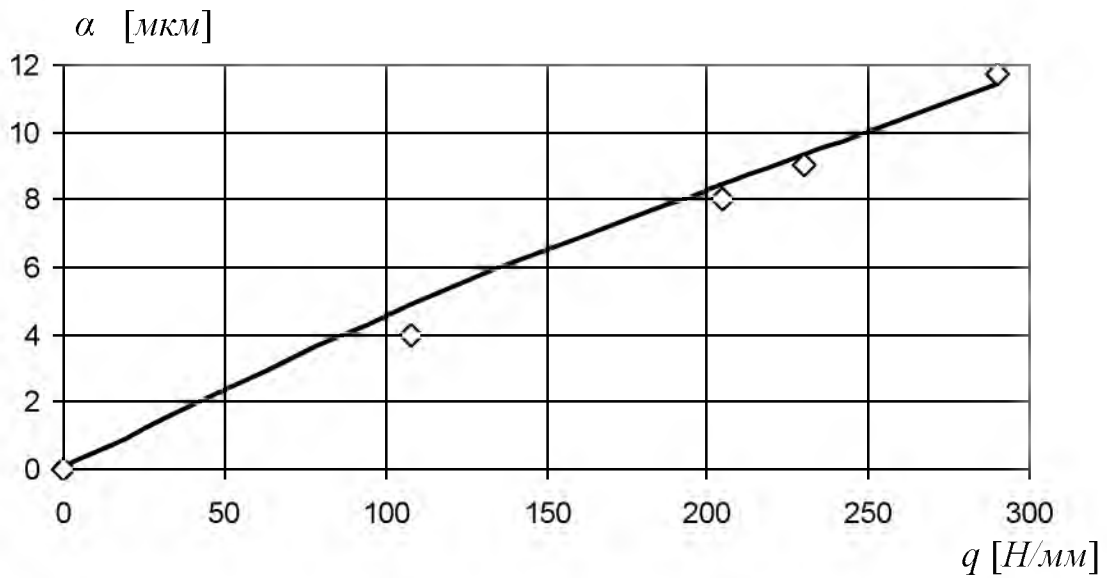


Рис. 12.2. Сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных (точки) данных сжатия стального ролика стальными плитами. Сближение плит от погонной нагрузки. Параметры роликов:

а) длина  $l=20$  мм; диаметр  $2r=7,0$  мм



б) длина ролика  $l = 7,5$  мм; диаметр  $2r = 7,5$  мм



в). длина ролика  $l = 30$  мм; диаметр  $2r = 30$  мм

На рис.12.3 показано сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных (точки) данных (по работе [161]) сближения стальных плит от нагрузки, при сжатии ими стальных роликов. Видно, что они также хорошо согласуются.

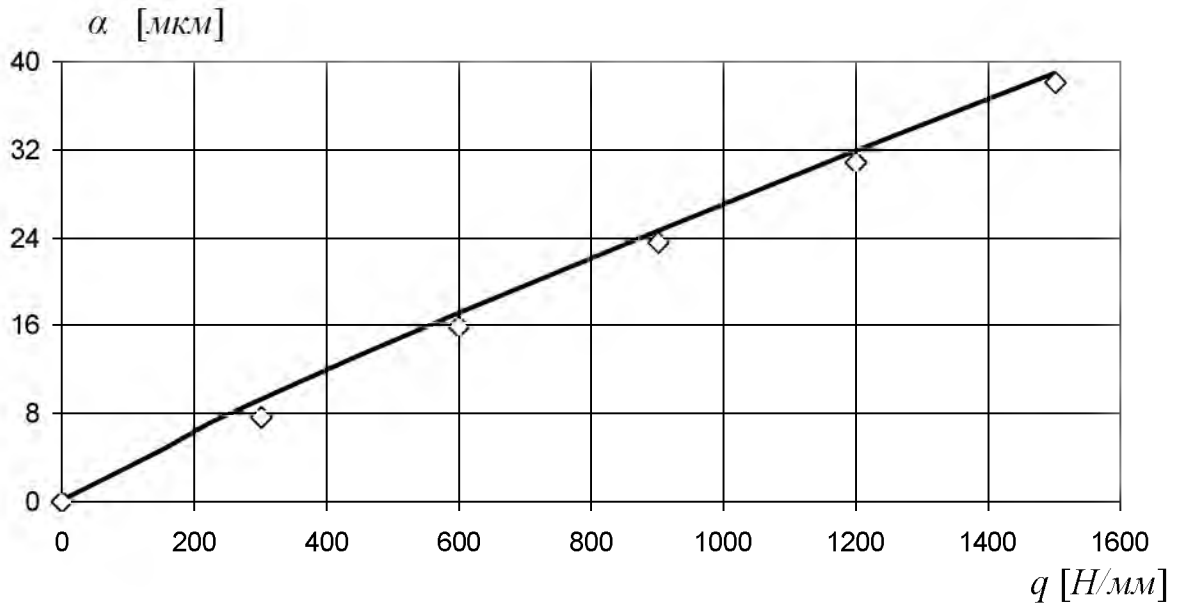
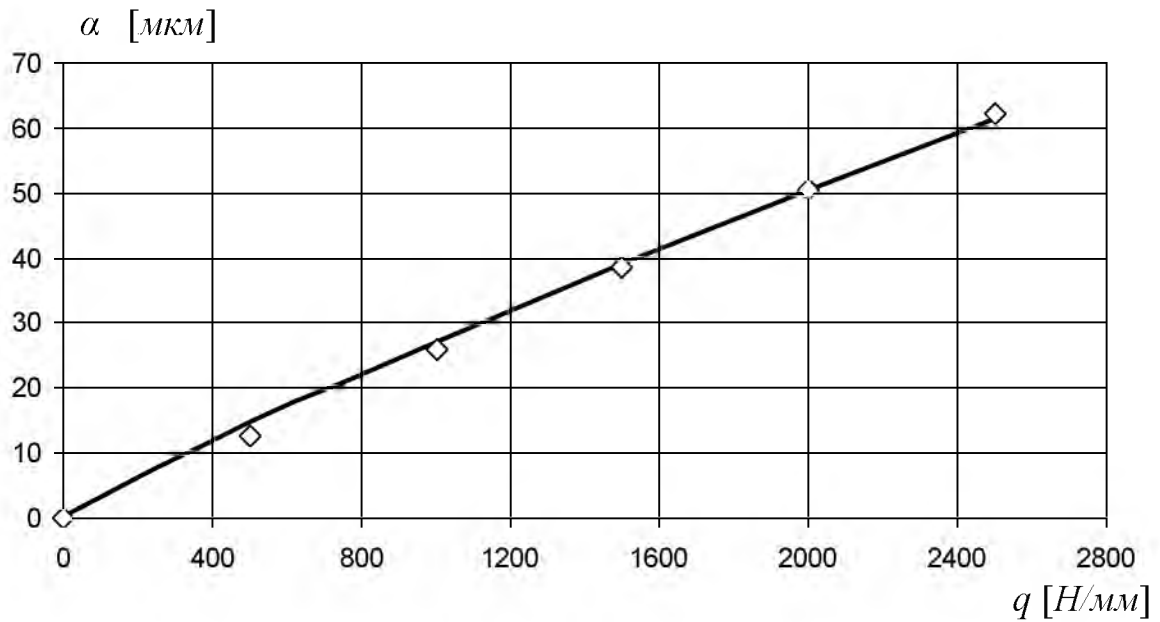


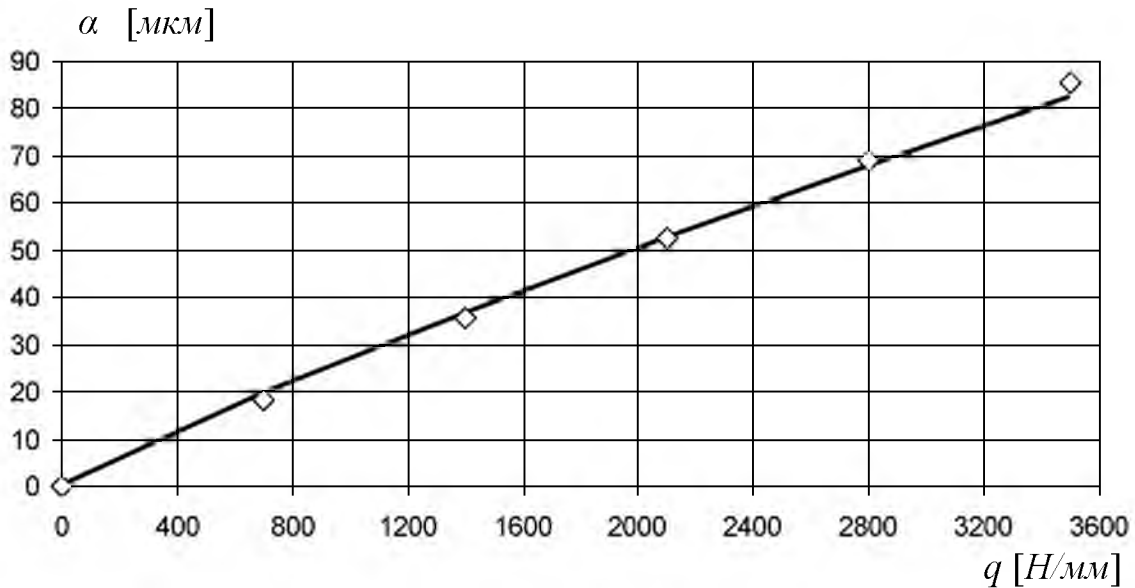
Рис.12.3 Сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных (точки) данных сжатия стального ролика стальными плитами. Сближение плит от погонной нагрузки. Параметры роликов:

а) длина  $l = 50$  мм; диаметр  $2r = 12$  мм



б) длина ролика  $l = 50$  мм; диаметр  $2r = 20$  мм





.в) длина ролика  $l = 50 \text{ мм}$ ; диаметр  $2r = 30 \text{ мм}$

Таким образом, сделанный анализ говорит о том, что предложенная в третьей главе работы физика-математическая модель силового контакта упругих тел цилиндрической формы и полученные на ее основе формулы для определения суммарной контактной деформации двух упругих тел конечных размеров при начальном касании по линии пригодны для практического применения, в частности, на их основе в седьмой и девятой главах впервые получены аналитические выражения контактной податливости роликовых подшипников и зубчатых зацеплений при номинальном контакте.

В четвертой главе, для аналитического определения параметров контакта двух цилиндров (контактная деформация; контактные напряжения; размеры площадки контакта) при перекосе предложена физика-математическая модель, на основе которой впервые получены аналитические выражения для определения всех параметров контакта в условиях перекоса, а с использованием этих результатов в работе аналитически определены параметры контакта зубчатых зацеплений и роликовых подшипников при перекосе. Для проверки полученных формул, на рис. 12.4 приведено сопоставление результатов расчетных и экспериментальных исследований контактных деформаций цилиндрических образцов при моделировании угла

перекоса между сжимаемыми телами, из которого видно, что с хорошей точностью они совпадают.

Как сказано выше, для проверки достоверности полученных в работе зависимостей, в диссертации использованы также экспериментальные и данные МКЭ, имеющиеся в литературе.

Для проверки полученных на основе предложенной в четвертой главе физико-математической модели силового контакта двух цилиндров в условиях перекоса аналитических зависимостей параметров контакта, на

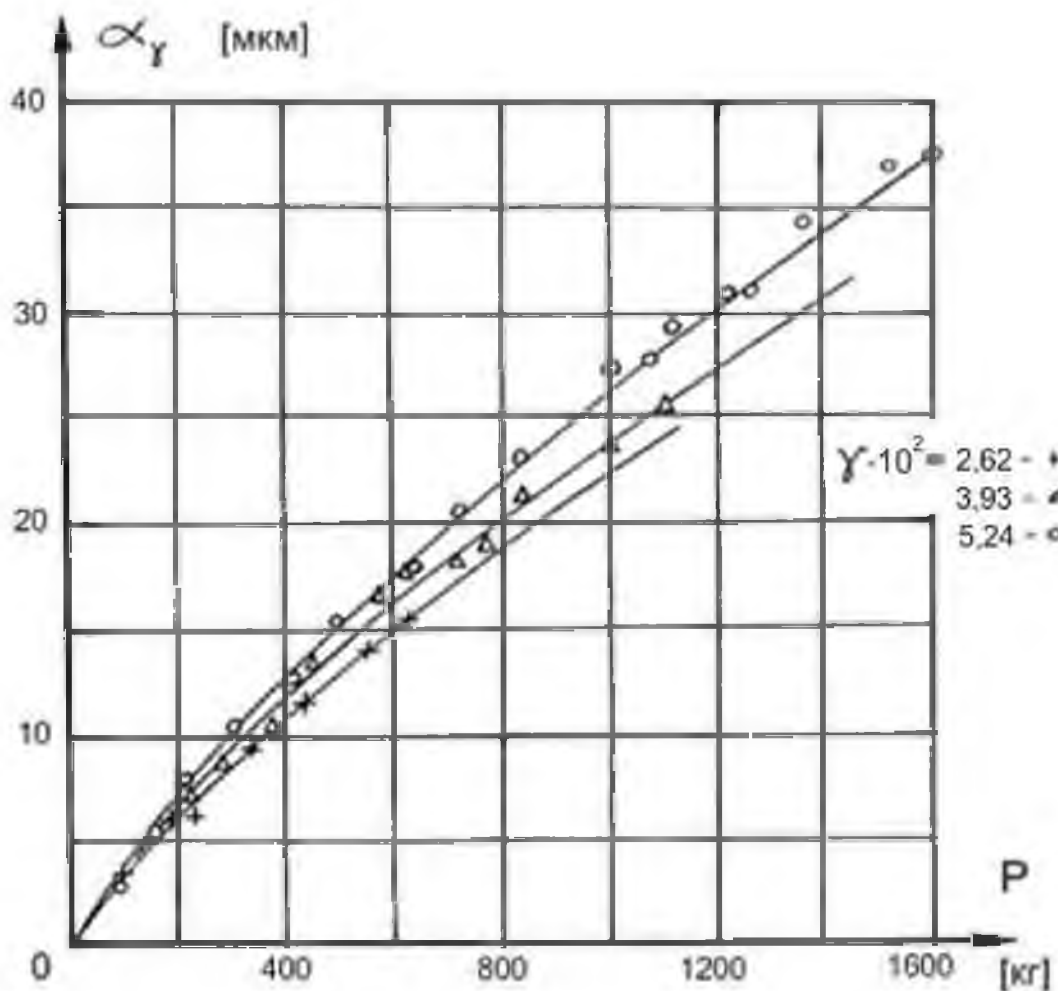


Рис.12.4. Сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных (точки) исследований контактных деформаций цилиндрических роликов при моделировании угла перекоса между сжимаемыми телами.

рис.12.5 приведено сопоставление расчетных (линии), вычисленных по формулам, и имеющимися в литературе [161] данных МКЭ контактных деформаций цилиндров при перекосе. Из этих графиков видно, что эти данные согласуются удовлетворительно. Это говорит о правильности полученных формул.

Таким образом, на основе проделанного анализа можно утверждать, что предложенная в четвертой главе физика- математическая модель и разработанная на ее основе метод определения контактных напряжений и деформаций цилиндров конечных размеров при перекосе, а так же размеры площадки контакта можно использовать для практического применения.

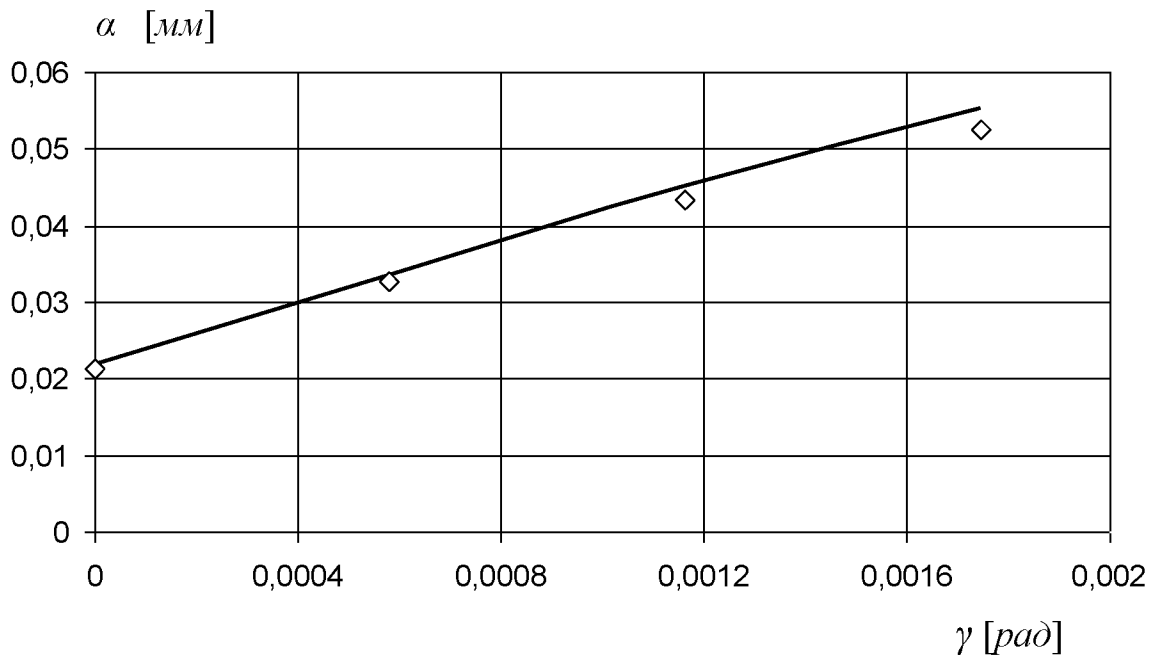
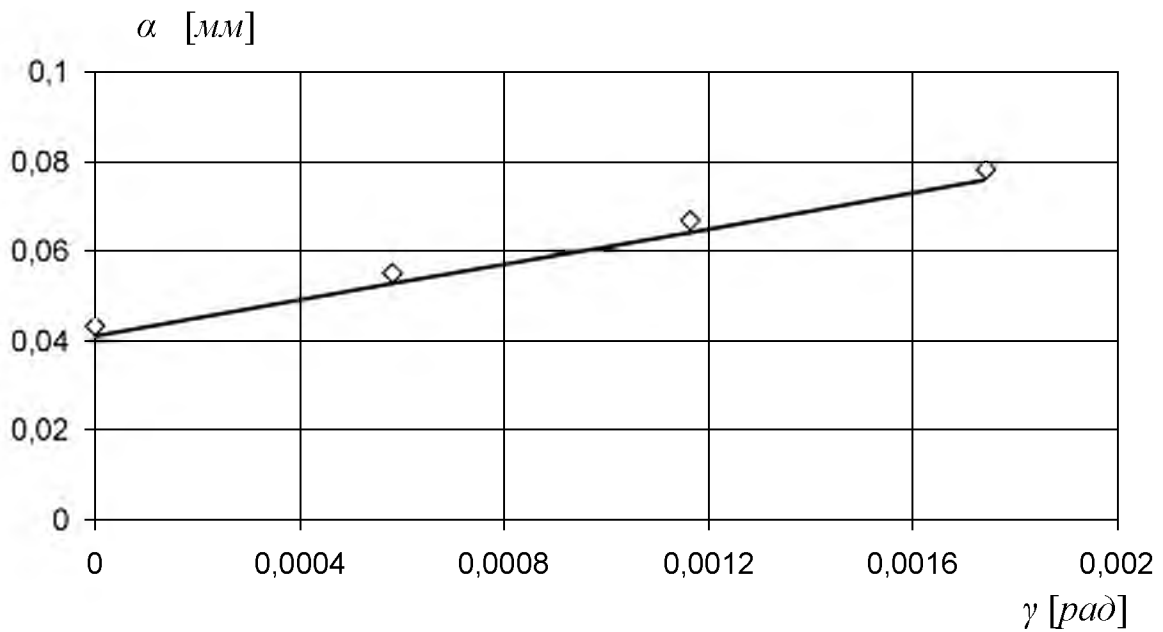
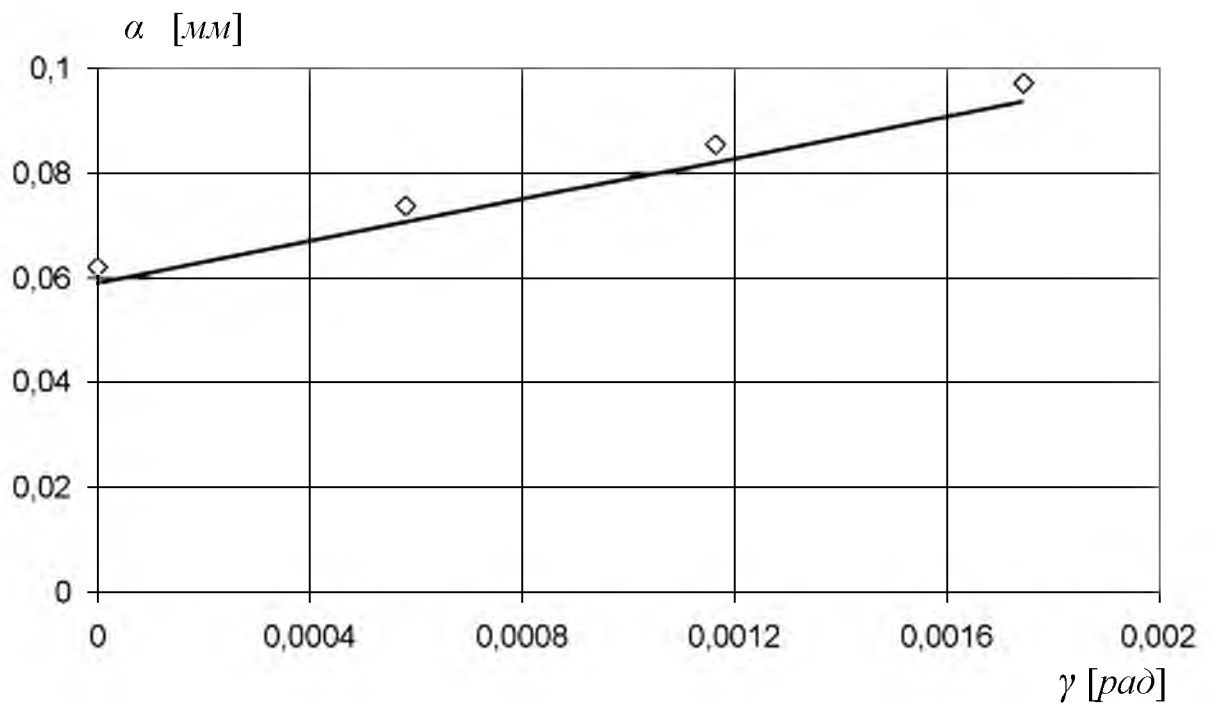


Рис.12.5. Сопоставление расчетных (линии) и данных МКЭ (точки). Зависимость контактной деформации (при силовом взаимодействии стального цилиндра с плитой при наличии перекоса) от угла перекоса (длина ролика  $l = 40 \text{ mm}$ ; диаметр ролика  $2r = 40 \text{ mm}$ ; сжимающая сила:

а)  $Q = 30,0 \text{ кН}$

б)  $Q = 60,0$  кНв)  $Q = 90,0$  кН

В пятой главе с использованием дискретно- континуальной модели зуба, для определения изгибных деформаций и напряжений зубьев зубчатых колес с учетом их конечных размеров при перекосе предложена физико-математическая модель зубьев, что позволило аналитически определить коэффициентов концентрации изгибных напряжений и деформаций по длине

зубьев. Полученные на основе этой модели зависимости для коэффициента концентрации изгибных напряжений на торце зуба и по его длине при наличии угла перекоса между боковыми поверхностями зубьев также находятся в удовлетворительном соответствии с имеющимися в литературе экспериментальными данными. Так, на рис.12.6 приведено сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных (точки) [11] исследований изгибных напряжений по длине зуба. Модели зуба с прямолинейной образующей имели параметры: модуль  $m=6$  мм; число зубьев  $z=20$ ; ширина зуба  $b=20$  мм, нагружались усилием  $P=120$  Н, при углах взаимного контактирования зубьев втулки и обоймы:  $\gamma=1,0^\circ; 0,5^\circ; 0,25^\circ$ ; материал оргстекло  $E=2,7 \cdot 10^3$  Н/мм<sup>2</sup>. Расчетные кривые (коэффициенты концентрации изгибных напряжений по длине зуба) вычислены по формулам (5.13), (5.34), (4.36-37), (4.38-39).

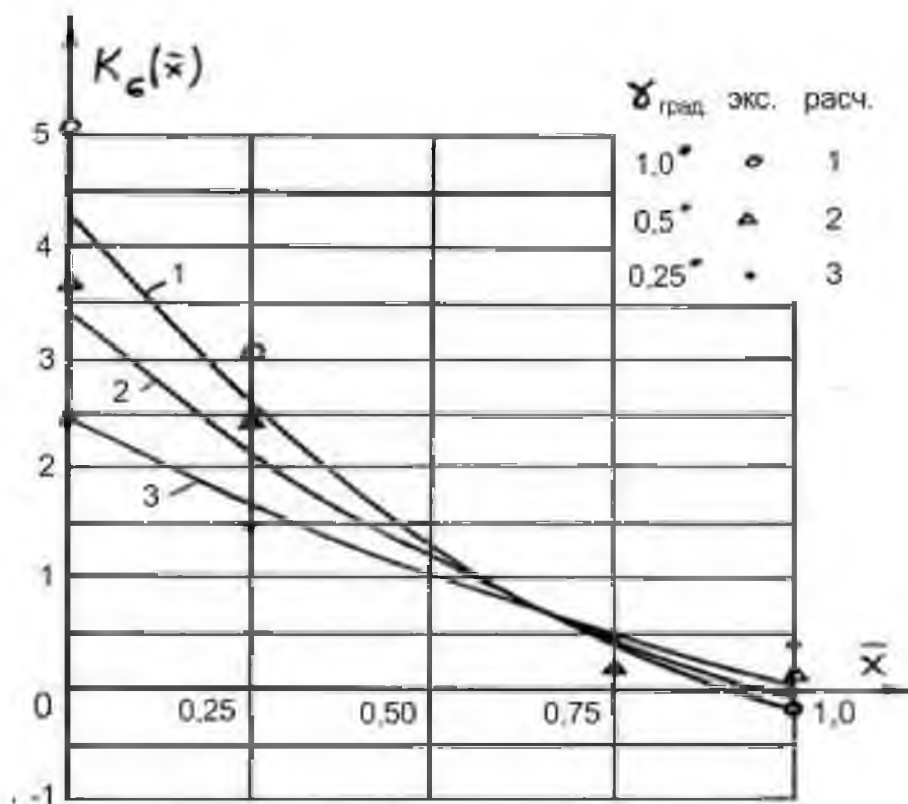


Рис. 12.6. Сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных (точки) данных.

С целью проверки достоверности полученных зависимостей (5.30), (5.31) для определения деформативной составляющей угла  $\gamma_{\bar{a}}$  перекоса и коэффициента угла перекоса  $K_{\gamma}$  (4.13; 4.14), обратимся к работе [54], в которой представлены результаты экспериментального исследования изгибной деформации зубьев при наличии перекоса с параметрами: ширина зуба  $b=27\text{мм}$ ; модуль  $m=5\text{мм}$ ; угол зацепления  $\alpha=20^\circ$ ; удельная нагрузка  $q=324\text{ Н/мм}$ ; модуль упругости материала  $E=2,1 \cdot 10^5\text{ Н/мм}^2$ ; угол перекоса варьировался  $\gamma_T=0 \div 0,005\text{ рад}$ . На рис. 12.7 показано сопоставление

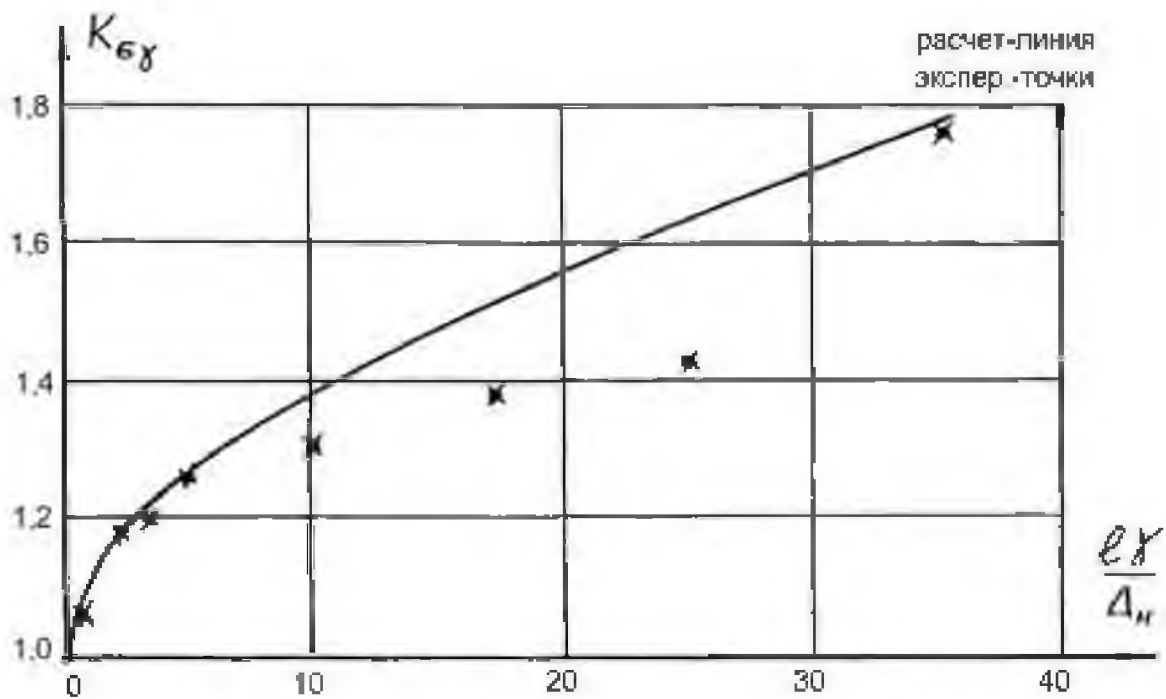


Рис. 12.7. Сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных данных (точки) величины коэффициента концентрации изгибных напряжений от нагрузочного параметра

расчетных (линии) и экспериментальных (точки) данных [54] зависимости коэффициента концентрации изгибных напряжений от нагрузочного параметра  $(l \cdot \gamma / \Delta_H)$ , из которого видно, что соответствие удовлетворительное, что говорит о правильности полученных в работе формул для определения изгибных деформаций и напряжений, а это в свою

очередь- о правильности разработанного на основе предложенной в работе физико- математической модели метода.

С целью проверки того предположения, что дискретно- континуальная модель зуба является хорошим приближением и что зуб в продольном направлении деформируется подобно балке конечной длины на упругом основании, (что следует из принятой дискретно- континуальной модели зуба), обратимся к экспериментальным данным, приведенным в работе [10]. В табл. № 12.1 приведены пересчитанные относительные величины изгиба

Таблица. № 12.1

Относительные величины изгиба зуба при смещении нагрузки относительно оси датчика

$\Delta S$	-1,67	-1,11	-0,56	0,0	0,56	1,11	1,67	2,22	2,76
$\bar{P}$									
0,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,25	0,182	0,273	0,820	1,0	0,64	0,36	0,10	0,0	0
0,50	0,230	0,360	0,820	1,0	0,64	0,32	0,14	0,0	0
0,75	0,240	0,390	0,790	1,0	0,64	0,33	0,12	0,045	0
1,0	0,250	0,410	0,750	1,0	0,64	0,34	0,14	0,060	0
0,75	0,240	0,410	0,780	1,0	0,63	0,34	0,12	0,045	0
0,50	0,190	0,450	0,680	1,0	0,71	0,35	0,16	0,044	0
0,25	0,210	0,420	0,930	1,0	0,71	0,36	0,14	0,030	0
0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0

по длине зуба зубчатого колеса при смещении нагрузки  $P$  относительно оси датчика на величину  $\Delta S$ , т.е. затухание изгибных деформаций по длине зуба при варьировании нагрузки.

Сопоставление расчетных и экспериментальных данных приведено на рис. 12.8, из которого видно их удовлетворительное соответствие, что говорит о правильности указанного предположения.

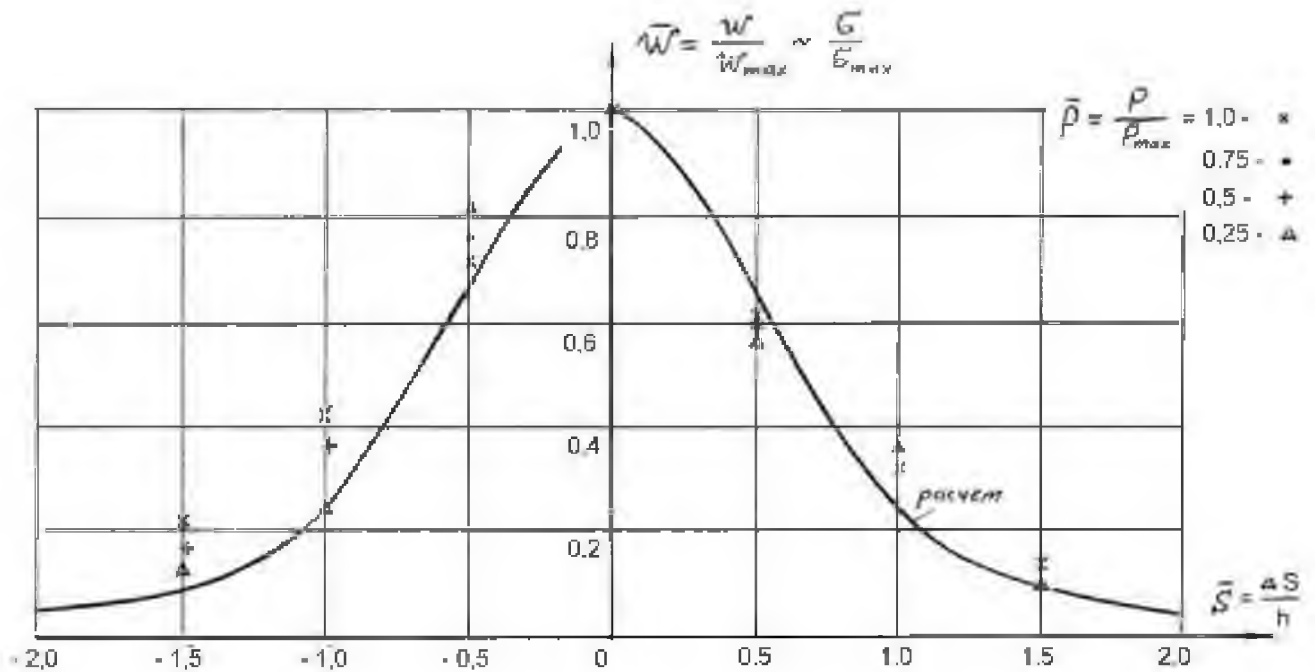


Рис. 12.8 Сопоставление расчетных (линия) и экспериментальных (точки) данных затухания изгибных деформаций по длине зуба при смещении нагрузки относительно оси датчика

Для оценки соответствия дискретно-континуальной модели зуба-пластины с балкой конечной длины на упругом основании, на рис.12.9 показаны полученные по формулам шестой главы расчетные (линии 1,2 и 3) величины затухания прогиба балки конечной длины на упругом основании под действием сосредоточенной нагрузки  $P$  по длине  $\bar{x} = x/l$  при варьировании координаты  $\bar{c} = c/l$  точки приложения (1- $\bar{c}=0,10$ ; 2- $0,23$ ; 3- $0,50$ ). На этом же графике показаны экспериментальные значения затухания прогиба, обозначенные значками (○- $\bar{c} = 0,10$ ; Δ- $0,23$ ; ×- $0,50$ ), консольной пластины [10]. Из этого



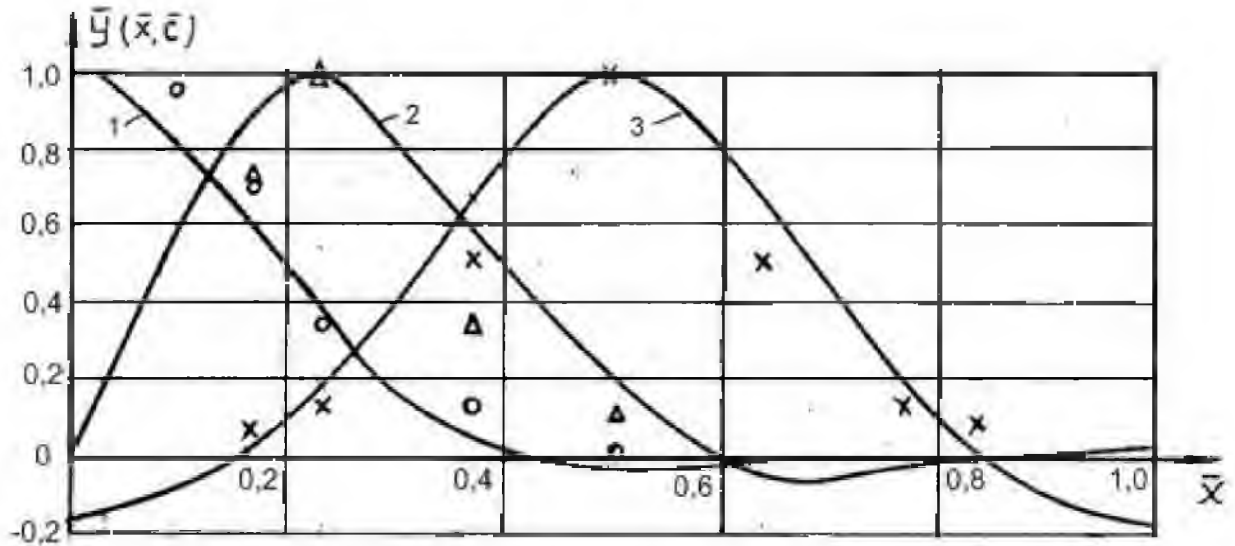


Рис.12.9. Сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных (точки) величин затухания прогиба балки конечной длины на упругом основании под действием сосредоточенной нагрузки  $P$  по длине  $\bar{x} = x/l$  при варьировании координаты  $\bar{c} = c/l$  точки приложения (1- $\bar{c}=0,10$ ; 2- $0,23$ ; 3- $0,50$ ).

сопоставления расчетных и экспериментальных данных следует, что зуб действительно в продольном направлении деформируется подобно балке конечной длины на упругом основании. Это говорит о правильности предложенного метода и полученных формул для определения коэффициента концентрации изгибных напряжений, которые можно рекомендовать для практического применения.

### 11.3. Выводы по одиннадцатой главе

На основе сопоставления результатов теоретических исследований с данными специально поставленных в диссертации экспериментов, а также с имеющимися в литературе экспериментальными и расчетными МКЭ данными установлено, что они находятся в удовлетворительном соответствии. Это говорит о правильности разработанных в диссертации физико-математических моделей и на их основе разработанных методов

расчетов контактных и изгибных деформаций и напряжений в зубчатых зацеплениях и роликовых опорах при линейном и кромочном контактах с учетом их конечных размеров.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

1. Разработан метод решения задачи об определении контактной деформации круговых цилиндров бесконечной длины. Впервые показано, что с использованием модели упругого полупространства на основе теории Герца можно получить решение данной задачи. С использованием этой модели уточнено известное решение Б.С.Ковальского в части определения контактной деформации круговых цилиндров.

Установлено, что погрешность решения Б.С.Ковальского зависит от радиуса цилиндров, упругих свойств материала и от величины внешней нагрузки. Показано, в частности, что при варьировании этих параметров в широком диапазоне, погрешность расчетов колеблется в пределах от 5 до 30 % .

Дано также теоретическое объяснение ошибки известного решения Н.М.Беляева для определения контактной деформации круговых цилиндров и приведено достоверное решение.

2. Аналитически решена задача о контакте цилиндра с плоскостью (или двух цилиндров) при наличии перекоса  $\gamma$  между ними и определены следующие параметры контакта: контактная деформация  $\alpha$  ; максимальные контактные напряжения  $\sigma_{\max}$  ; максимальная полуширина  $b_\gamma$  и длина  $l_k$  площадки контакта. Сопоставление результатов расчета на основе аналитических зависимостей с экспериментальными и имеющимися в литературе расчетными данными МКЭ, показало удовлетворительное соответствие.

3. Разработан метод и впервые аналитически определена суммарная контактная деформация двух упругих тел, находящихся в силовом контакте по линии, с учетом их конечных размеров.

Сопоставление предложенного решения по определению контактной деформации прямоугольной плиты (при варьировании в широком диапазоне ее толщины) с имеющимся в литературе приближенным решением показало,

что погрешность последнего колеблется от 8 до 12 % . При уменьшении толщины погрешность увеличивается до 18 % .

4. Предложена физико- математическая модель изгибной деформации по длине зубьев конечной длины. На основе этой модели изложен аналитический метод определения коэффициента концентрации изгибных напряжений в зубьях муфт и зубчатых колес в условиях перекоса с учетом их конечных размеров. С его использованием стало возможным построение эпюры изменения напряжений в основании зубьев при перекосе по его длине. Установлена также связь между изгибной деформацией по длине зубьев и концентрацией контактных напряжений.

К наиболее важным результатам диссертации можно отнести положение о том, что при торцевом приложении нагрузки (вследствие перекоса) изгибная деформация зуба способствует снижению концентрации контактных напряжений и изгибные деформации по длине зуба частично компенсируют перекося (за счет так называемого деформативного угла перекоса) в зацеплении зубьев.

Решена задача об изгибе балки конечной длины на упругом основании под действием произвольной нагрузки. Использование этой методики позволило аналитически определить деформативную составляющую угла перекоса. Учет последнего позволил уточнить расчеты по определению контактных и изгибных напряжений в зубьях колес. Анализ результатов показал, что до 45 % угла перекоса может компенсироваться изгибной деформацией зуба в продольном направлении. Сопоставление результатов расчетного исследования с имеющимися в литературе экспериментальными данными показало их удовлетворительное соответствие.

5. Построена модель краевого эффекта у тел цилиндрической формы конечных размеров при их контактном взаимодействии. Получены расчетные формулы для определения деформаций и напряжений на концах короткого цилиндра.

Определены в безразмерном виде коэффициенты концентрации контактных деформаций и напряжений на свободном конце упругого тела цилиндрической формы, которые в связи с особенностью контакта цилиндрических тел конечных размеров, не удастся описать в рамках теории Герца.

Установлено, в частности, что податливость на свободном конце упругого тела в 1,5 раза больше, чем в средней части. Этот результат согласуется с экспериментальными данными, имеющимися в литературе. Показано, что напряжения на краю на 22 % больше, чем в срединной области (по Герцу).

6. На основе разработанной физико-математической модели контактного взаимодействия зубьев колес, получены аналитические выражения их контактной податливости в отсутствии перекоса, которые позволили установить, что контактная податливость зависит от внешней нагрузки и в широком диапазоне ее изменения она меняется в пределах от  $2,0 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^2/\text{Н}$  до  $2,5 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^2/\text{Н}$ .

Таким образом показано, что за контактную податливость в известных методиках принимается величина или в  $1,28 \div 1,6$  раза превышающую ( $3,2 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^2/\text{Н}$  - В.Н.Кудрявцев; С.П.Тимошенко), или на  $25 \div 40$  % заниженную ( $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^2/\text{Н}$ ) величину, по сравнению с реальной величиной. Сопоставление результатов расчетного исследования с имеющимися в литературе экспериментальными данными показало их удовлетворительное соответствие.

7. С помощью разработанного метода аналитически определена контактная податливость роликовых подшипников в отсутствии перекоса. Установлено, что контактная податливость роликовых подшипников не является постоянной величиной, а зависит от внешней нагрузки, и в широком диапазоне изменения нагрузки она принимает значения от  $20 \cdot 10^{-6}$  до  $30 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2/\text{Н}$ , в результате чего полученные аналитические зависимости на 15-30 % уточняют известные данные других авторов ( $26 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2/\text{Н}$ ;  $33 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2/\text{Н}$ ).

Полученные расчетные результаты подтверждаются сопоставлением их с имеющимися в литературе экспериментальными данными.

8. Приведено аналитическое определение контактных напряжений зубьев зубчатых колес и роликовых подшипников при перекосе.

9. Оценено влияние перекоса, вызываемого погрешностями изготовления и монтажа, на напряженно- деформированное состояние зубчатых соединений (муфт). Уточнено влияние податливости обода на зону нагруженных зубьев муфты. Получены расчетные зависимости для расчета зубчатых муфт на прочность при различной форме боковых поверхностей зубьев с учетом перекоса.

10. Обобщены теоретические и экспериментальные методы определения контактной деформации зубьев с учетом влияния перекоса. Проведены методом голографической интерферометрии экспериментальные исследования контактных деформаций цилиндрических, конических и бочкообразных роликов, моделирующих контакт зубьев зубчатых колес при перекосе. Полученные результаты измерений удовлетворительно согласуются с расчетными данными.

## ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ

Часть результатов работы легла в основу разработанных с участием автора методических рекомендаций по расчету на прочность цилиндрических и конических зубчатых передач и зубчатых муфт, которые вошли в ГОСТы, а именно:

- Расчеты и испытания на прочность. Общие требования к расчетам на прочность зубчатых передач. Госстандарт СССР, М.: ВНИИНМАШ.

- Расчеты и испытания на прочность. Общие требования и методы расчета на прочность цилиндрических эвольвентных зубчатых передач. Р54-285-90. Госстандарт СССР. М.: ВНИИНМАШ.

- Метод расчета на прочность конических прямозубых эвольвентных передач. Госстандарт СССР. М.: ВНИИНМАШ.

- Метод расчета на прочность зубчатых муфт. Р54-313-90, Госстандарт СССР. М.: ВНИИНМАШ.

Результаты диссертации реализованы:

- в конструкции зубчатых муфт и шпинделей, изготавливаемых на Электростальском заводе тяжелого машиностроения (ЭЗТМ);

- на ОАО Калужском турбинном заводе (КТЗ), при проектировании и экспериментальной отработке перспективных проектов планетарных зубчатых редукторов.

Результаты диссертации использованы:

- в Методике расчета вибраций малошумных редукторов;

- в Правилах акустического проектирования основных механизмов и систем перспективных кораблей ВМФ (инв. № 145, НПВП “Турбокон“ 2009 г.).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов В.М. Колебания прямозубых зубчатых колес. Харьков. Изд-во Харьковского университета, 1968, 175 с.
2. Айрапетов Э.Л. Контактная деформация цилиндров с параллельными осями. Вестник машиностроения, 1988, № 6, стр. 6-10.
3. Айрапетов Э.Л. Распределение нагрузки в зацеплениях с упругими элементами. В кн. Колебания механизмов с зубчатыми передачами. М.: Наука, 1977, с. 111- 117.
4. Айрапетов Э.Л. Определение контактной деформации зубьев цилиндрических зубчатых колес. Вестник машиностроения, 1967, №1, стр. 32- 35.
5. Айрапетов Э.Л. Состояние и перспективы развития методов расчета нагруженности и прочности передач зацеплением. Ижевск- Москва: ИГТУ, 2000, 116 С.
6. Айрапетов Э.Л., Айрапетов Э.Л., Мельникова Т.Н. Расчет контактной нагрузки в зубчатых зацеплениях. Вестник машиностроения. 1982, №10, с.3-6
7. Айрапетов Э.Л., Айрапетов С.Э., Генкин М.Д., Лупандин В.В. Опоры качения зубчатых передач. М.: Наука, 1984, 185 с.
8. Айрапетов Э.Л., Генкин М.Д., Ряснов Ю.А. Статика зубчатых передач. М.: Наука, 1983, 142 с.
9. Айрапетов Э.Л., Генкин М.Д. Деформативность планетарных механизмов. М.: Наука, 1973, 212 с.
10. Айрапетов Э.Л., Генкин М.Д. Статика планетарных механизмов. М.: Наука, 1976, 263 с.
11. Айрапетов Э.Л., Косарев О.И. Зубчатые муфты. М.: Наука, 1982, 128 с.
12. Айрапетов Э.Л., Косарев О.И. Расчет податливости элементов зубчатых муфт.- Вестн. машиностроения, 1972, № 3, с. 17- 21.



13. Айрапетов Э.Л., Косарев О.И. и др. Возбуждение колебаний в зубчатых передачах // *Динамические процессы в механизмах с зубчатыми передачами.* - М.: Наука, 1976.- с. 3- 18.
14. Айрапетов Э.Л., Мирзаджанов Д.Б., Уткин Б.С., Шоломов Н.М. и др. Метод расчета на прочность зубчатых муфт: Метод рекомендации. (Первая редакция). М.: Госстандарт СССР: ВНИИИНМАШ, 1987, 23 с.
15. Айрапетов Э.Л., Мирзаджанов Д.Б. Зубчатые соединительные муфты. М.: Наука, 1991, 251с.
16. Айрапетов Э.Л., Нахатакян Ф.Г., Влияние изгибной деформации зубьев прямозубых цилиндрических передач на параметры контакта зубьев. Вестник машиностроения, 1990, №8, с. 21- 23.
17. Айрапетов Э.Л., Нахатакян Ф.Г. Расчетная модель износа зубьев неточных и деформируемых прямозубых зубчатых передач. Вестник машиностроения, 1990, №11, с. 18- 20.
18. Айрапетов Э.Л., Брагин В.В., Державец Ю.А., Нахатакян Ф.Г., Шоломов Н.М., и др. Расчеты и испытания на прочность. Общие требования и методы расчета на прочность цилиндрических эвольвентных зубчатых передач. Р 54-285-90.- М.: Госстандарт СССР: ВНИИИНМАШ, 1990, с. 105.
19. Айрапетов Э.Л., Ковалевский В.И., Нахатакян Ф.Г., Шоломов И.М., и др. Метод расчета на прочность конических прямозубых эвольвентных передач. -М.: Госстандарт СССР, ВНИИИНМАШ 1990, 92 с.
20. Айрапетов Э.Л., Нахатакян Ф.Г., Уткин Б.С., Шоломов Н.М., и др. Метод расчета на прочность зубчатых муфт. Р 54-313-90. М.: Госстандарт СССР: ВНИИИНМАШ, 1991, 39 с.
21. Айрапетов Э.Л., Брагин В.В., Державец Ю.А., Нахатакян Ф.Г., Шоломов Н.М. и др. Расчеты и испытания на прочность. Общие требования к расчетам на прочность зубчатых передач. - М. : Госстандарт СССР: ВНИИИНМАШ, 1989, 68с.

22. Айрапетов Э.Л., Мамонова М.Г., Мухитдинов А.С., Нахатакян Ф.Г. Метод расчета статической нагруженности упругих систем с односторонними связями. Доклады акад. наук Уз. ССР, 1989, №.4, с. 19- 21.
23. Айрапетов Э.Л., Ковалевский В.И., Нахатакян Ф.Г. и др. Статическое нагружение опор качения. -Сб. научн. Трудов- Повышение работоспособности композиционных материалов, узлов, и машин.- Ташкент, изд. ТашПИ, 1989, с. 88- 94.
24. Айрапетов Э.Л., Ковалевский В.И., Нахатакян Ф.Г., и др. Способ снижения уровня вибрации подшипника качения. Патент 1781477. Бюл. изобр.- 1992- № 46.
- 25 Айрапетов Э.Л., Мухитдинов А.С., Нахатакян Ф.Г., и др. Прямозубая цилиндрическая передача. Патент № 1788364 . Бюл. изобр.- 1993- № 2
26. Айрапетов Э.Л., Нахатакян Ф.Г. Влияние изгибной деформации зубьев прямозубых цилиндрических передач на параметры контакта зубьев. Тез. докл. Всесоюзн. научн.- техн. конф. “Зубчатые передачи: Современность и прогресс”. Одесса, 1990, с.5- 6.
27. Айрапетов Э.Л., Нахатакян Ф.Г. Расчетная модель износа зубьев неточных и деформируемых прямозубых зубчатых передач. Тез. докл. Всесоюзн. научн.- техн. конф. “Зубчатые передачи: Современность и прогресс”. Одесса, 1990, с.110.
28. Айрапетов Э.Л., Ковалевский В.И., Нахатакян Ф.Г. и др. Расчетная оценка прочности зубьев прямозубых конических передач. Тез . докл . Республ . научн.- техн . конф. “Тенденции повышения нагрузочной способности передач зацеплением”, Кишинев, 1989, с. 51- 53.
29. Айрапетов Э.Л., Нахатакян Ф .Г. и др. Снижение виброактивности прямозубой передачи. Тез. докл. Республ. научн.- техн. конф. “Проблемные вопросы создания средств вибрационной техники для использования в различных технологических процессах машиностроительной отрасли Узбекистана”. Ташкент, 1990, с. 100- 101.

30. Айрапетов Э.Л., Ковалевский В.И., Нахатакян Ф.Г. Расчетно-экспериментальная модель износа зубьев прямозубых передач. Тез. докл. Междунар. научно-техн. семинара “Автоматизированное проектирование механических трансмиссий. САПР-МТ” Ижевск, 1991, с. 13-14.
31. Айрапетов Э.Л., Ковалевский В.И., Нахатакян Ф.Г. и др. Алгоритм расчета статической нагруженности опор качения. Тез. докл. научн.-техн. конф. “Разработка и внедрение САПР и АСТПП в машиностроении”. Ижевск, 1990, с. 195-197.
32. Айрапетов Э.Л., Ковалевский В.И., Нахатакян Ф.Г. и др. Снижение виброактивности подшипников качения. Тез. докл. Республ. научн.-техн. конф. “Проблемные вопросы создания средств вибрационной техники для использования в различных технологических процессах машиностроительной отрасли Узбекистана” Ташкент, 1990, с. 99-100
33. Айрапетов Э.Л., Нахатакян Ф.Г. и др. Статическая нагруженность многопарных передач зацеплением. Тез. докл. отрасл. научн.-техн. совещ. “Повышение качества зубчатых колес и момент передающих деталей сельскохозяйственных машин путем использования РК-профилей и технологических методов повышения точности обработки”. Ташкент, 1989, с. 9-10.
34. Айрапетов Э.Л., Коровкин Ю.В., Нахатакян Ф.Г., Тертышный Г.Г. Оптический метод определения контактных деформаций квазиплоских поверхностей деталей машин. Тез. докл. Респуб. научн.-прак. семинара. “Голография в промышленности и научных исследованиях”. Гродно, 1989, с. 10-11.
35. Айрапетов Э.Л., Мамонова М.Г., Мухитдинов А.С., Нахатакян Ф.Г. Метод расчета статической нагруженности многопарных передач зацеплением. Тез. докл. Всесоюзн. симпозиума “Теория реальных передач зацеплением, часть 2-я, Прочность и технология реальных передач зацеплением”. Курган, 1988, с. 45-47.

36. Айрапетов Э.Л., Мухитдинов А. С., Нахатакян Ф.Г. Деформация опор качения зубчатых передач. Тез. докл. Межреспуб. науч.- техн. конф. “Опыт исследований, проектирования, изготовления и эксплуатации зубчатых передач Новикова”. Рига, 1989, с. 89.
37. Айрапетов Э.Л., Нахатакян Ф.Г. Влияние концентрации контактных давлений на изгибающие напряжения в зубьях колес. Тез. докл. Республ. научн.- техн. конф. “Тенденции повышения нагрузочной способности передач зацеплением “ Кишинев, 1989, с. 45- 47.
38. Айрапетов Э.Л., Нахатакян Ф.Г., Тertyшный Г.Г. Голографический метод контроля полного вектора тангенциального перемещения для определения деформации деталей машин в заданном направлении. Тез. докл. Республ. научн. практ. семинара “Голография в промышленности и научных исследованиях” Гродно, 1989, с. 9- 10.
39. Айрапетов Э.Л., Нахатакян Ф.Г., Тertyшный Г.Г. Оптический метод исследования контактных деформаций роликов при моделировании угла перекоса и продольной модификации зубьев цилиндрических зубчатых передач. Тез. докл. отрасл. научн- техн. совещ. “Повышение качества зубчатых колес и моментопередающих деталей сельскохозяйственных машин путем использования РК- профилей и технологических методов повышения точности обработки”. Ташкент, 1989, с. 11.
40. Александров Е.В., Соколинский В.Б. Прикладная теория и расчет ударных систем. М.: Наука, 1969.
41. Батуев Е.С., Голубков Ю.В., Ефремов А.К., Федосов А.А. Инженерные методы исследования ударных процессов. М.: Машиностроения, 1977, 240 с.
42. Бедный И.А., Себякина А.Н. Математическое моделирование вынужденных колебаний планетарного редуктора с упругим эпициклом. // Проблемы машиностроения и автоматизации, 2013. № 2. с.57 -61.
43. Бейзельман Р.Д., Ципкин БюВ., Перель Л.Я. Подшипники качения. – М.: Машиностроение, 1875. – 572с.

44. Беляев Н.М. Труды по теории упругости и пластичности, М.: Гостехтеориздат, 1957. 632 с.
45. Беляев Н.М. Местные напряжения при сжатии упругих тел. Инженерные сооружения и строительная механика. Л., Изд-во «Путь», 1924.
46. Беляев Н.М. К вопросу о местных напряжениях в связи с сопротивлением рельсов смятию. Труды ЛИИПС. Вып. 99, Л., 1929.
47. Беспалов Б.Л., Глейзер Л.А., Колесов Н.М. и др. Технология машиностроения (специальная часть). – М.: Машиностроение, 1973. – с.
48. Беспальцев И.И., Генкин М.Д., Фридман И.И. Концентрация напряжений в зубьях шестерни.- В сб.: Поляризационно- оптический метод исследования напряжений. АН СССР, 1956.
49. Болотовский И.А. Обеспечение полноты соприкосновения зубьев прямозубых конических колес // Точность механизмов и машин: Труды семинара по точности механизмов и машин. Вып. 2. – М.: Издательство АН СССР, 1962. – с. 3-139.
50. Верховский А.Н., Адронов В.П., Ионов В.А. и др. Определение напряжений в опасных сечениях деталей сложной формы. Машгиз, М.:1958, 146 с.
51. Вибрации в технике. Справочник. В 6 т. Т.3. Колебания машин, конструкций и их элементов / Под редакцией Ф.М. Диментберга, К.С. Колесникова. – М.: Машиностроение, 1980 – 544с.
52. Виноградов В.Н., Сорокин Г.М., Албачиев А.Ю. Изнашивание при ударе. М.: Машиностроение, 1982, 192 с.
53. Власов В.З. Избранные труды. М.: Изд- во АН СССР. 1962. Т.1. 528 с.
54. Волгин И.В. К вопросу о влиянии перекосов в зацеплении на долговечность тракторных зубчатых колес.- В кн.: Современные методы оценки качества и пути повышения точности изготовления зубчатых передач. М.: Машгиз, 1962, с. 120- 128.
55. Гавриленко В.А. Основы теории эвольвентной зубчатой передачи. – М.: Машиностроение, 1969. – 431с.

56. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М., 1953.
57. Гаррис. Влияние перекоса на усталостную долговечность цилиндрических роликоподшипников с закругленными роликами // Труды американского общества инженеров - механиков: Проблемы трения и смазки. – М.: Мир, 1969, № 2. – с. 91-101.
58. Генкин М.Д., Рыжов М.А., Рыжов Н.М. Повышение надежности тяжело нагруженных зубчатых передач. – М.: Машиностроение, 1981. – 232с.
59. Герасимова Н.Н. Исследование влияния технологических факторов на срок службы шариковых подшипников. Труды совещания по качеству поверхности в машиностроении. Изд-во АН СССР, 1960.
60. Герасимова Н.Н. Влияние волнистости на работоспособность шариковых радиальных подшипников. Труды ВНИИПП, 1960, № 2.
61. Глаголев Н.И. Определение напряжений при давлении системы жестких профилей. ПММ. Т. VII. Вып. 5, 1943.
62. Головкин В.Ф. Исследование продольного контакта зубьев прямозубых передач авиационных агрегатов. – Рига: РКИИГА, 1969.- с.
63. Гольдфарб В.И. Прогрессивные зубчатые передачи // Инновации. 2005. №6. – с.89- 91.
64. Гольдфарб В.И. и др. Концепция САПР и результаты исследования спироидных передач и редукторов.- Proceedings of the 4th World Congress on Gearing and Power Transmissions, Volume 1, Paris, 1999, p.365-375.
65. Гольдфарб В.И. и др. Разработка тяжело нагруженных низкоскоростных спироидных мотор- редукторов. Сборник докладов международного научного семинара- Современные информационные технологии. Проблемы исследования, проектирования и производства зубчатых передач. Ижевск, 2001 г. с.50- 55.
66. Гольдфарб В.И., Макаров В.В., Маслов В.М. Перспективы развития приводной техники для трубопроводной арматуры. Арматуростроение, С-Петербург, 2005, №5, с.43- 45.

67. Громан М.Б., Зак П.С. Бочкообразный зуб. // Вестник машиностроения – 1974. - № 4. – с. 23-25.
68. Громан М.Б., Зак П.С. Форма и контактное напряжение бочкообразного зуба. // Вестник машиностроения – 1976. - № 5. – с. 42-45
69. Грубин А.Н. Контактные напряжения в зубчатых и червячных зацеплениях. Исследование контакта деталей машин. М., Машгиз, 1949.
70. Грубин А.Н. Контактная усталость материалов для зубчатых колес. М., Машгиз, 1962.
71. Динник А.Н. Удар и сжатие упругих тел. Известия Киевского политехнического института. Кн. 4, 1909.
72. Динник А.Н. Избранные труды.- Киев: АН УССР, 1952, т.1.- 151с.
73. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия: М.: Мир, 1989. 510 с.
74. Дорофеев В.Л. Анализ и расчет контактных и изгибных перемещений деталей машин. // Вестник машиностроения. 1993. № 10. С. 5- 7.
75. Дорофеев В.Л. Основы расчета нагрузок и напряжений, действующих в зацеплении цилиндрических зубчатых передач. // Вестник машиностроения. 1983. № 3. С. 14- 16.
76. Дорофеев В.Л. Расчет динамического распределения контактных нагрузок в косозубых передачах. // Вестник машиностроения. 1987. № 1. С. 9- 11.
77. Дроздов Ю.Н. и др. Развитие методов расчета на износ зубчатых колес.- Вестник машиностроения - №11, 1990, с. 15- 17.
78. Дьяченко П.Е., Толкачева Н.И., Андреев Г.А. и Карпова Т.М. Площадь фактического контакта сопряженных поверхностей. М., Изд-во АН СССР. 1963.
79. Журавлев Г.А., Карпенко В.А. Сближение упругих тел, моделируемых круговыми цилиндрами. – Техника машиностроения, 2000, № 6, (28), с. 51- 55.
80. Заблонский К.И. Зубчатые передачи Киев, Техника, 1977, 205 с.
81. Заблонский К.И. Жесткость зубчатых передач. Киев: Техник, 1967, 259 с.

82. Заблонский К.И., Филипович С.И. Исходное положение для разработки стандарта на расчет конических зубчатых передач на прочность. // Детали машин: Республ. межвед. научно-техн. сборник. – 1990. – Вып. 51. с. 8-17.
83. Зантопулос Х. Влияние перекоса на долговечность конических роликоподшипников: Проблемы трения и смазки. – М.: Мир, 1972 - № 2. с.82-89.
84. Захаров В.А. Технология сборки и контроля подшипниковых опор ГТР. – М.: Машиностроение, 1985. – 127с.
85. Зарифьян А.А. Аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния эвольвентных зубьев цилиндрических прямозубых передач: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Новочеркасск: НПИ, 1977, 244с.
86. Зверьяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит. // ПММ. – 2003. – т.67, вып 3.-с.472- 481.
87. Исследование напряжений в бочкообразных зубьях: Отчет/ УПИ. Руководитель темы В.С.Плотников. 562 ГР 72004074; Инв. Б 396520.- Свердловск, 1975, -15 с.
88. Ишлинский А.А. О перемещениях упругой полуплоскости. // Учен.зап. МГУ, 1940, вып.39, с. 83- 86.
89. Кильчевский Н.А. Экстремальные свойства решений задачи о контактном сжатии упругих тел. Доклады АН УССР, 1958, № 1.
90. Клеников С.С., Люминарский И.Е. Силовое взаимодействие упругих элементов нагруженных сдвоенных волновых зубчатых передач. // Вестник машиностроения, 1988, № 1, с. 21- 24.
91. Клепиков С.П. Расчет конструкций на упругом основании. – Киев: Будивильник, 1967. – 184с.
92. Клименко И.С. Голография сфокусированных изображений и спекл-интерферометрия. М.: Наука, 1985.
93. Когаев В.П., Дроздов Ю.Н. Прочность и износостойкость деталей машин. – М.: Высшая школа, 1991ё. – 318с.



94. Ковалев М.П., Народецкий М.З. Расчет высокоточных шарико-подшипников. – М.: Машиностроение, 1975, 279с.
95. Ковалевский В.И. Разработка и теоретическое обоснование рациональных конструкций прямозубых конических передач: Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук.- Ташкент, 1992. – 374с.
96. Ковалевский В.И., Нахатакян Ф.Г. и др. Расчетная модель износа зубьев цилиндрических и конических передач. Тез. докл. пятого симпозиума "Теория реальных передач зацеплением" Курган, 1993г., с. 7- 8.
97. Ковальский Б.С. Напряженное состояние и критерий прочности при контактном сжатии.- научн. Записки Харьковского авиационного института.- Харьков, 1941, т.5.
98. Ковальский Б.С. Расчет деталей на местное сжатие. – Харьков: Издд. ХВКИУ, 1967. – 222с.
99. Ковальский Б.С. Напряжения на участке местного сжатия при учете сил трения. «Известия АН СССР», 1942, № 9.
100. Ковальский Б.С. Напряжения в зоне местного сжатия. Труды ХВАИВУ. Вып. 68, 1957.
101. Ковальский Б.С. Контактная задача в инженерной практике. Известия ВУЗов «Машиностроение», 1960, № 6.
102. Козлов М.П. Зубчатые передачи точного приборостроения. М.: Машиностроение, 1969. – 399с.
103. Комиссар А.Г. Опоры качения в тяжелых режимах эксплуатации. Справочник. – М.: Машиностроение, 1987. – 384с.
104. Кораблев А.И., Решетов Д.Н. Повышение несущей способности и долговечности зубчатых передач. – М.: Машиностроение. 1968. – 288с.
105. Красильников В.И. О применимости теории Герца к одной пространственной контактной задаче. Известия ВУЗов «Машиностроение», 1958, № 1.

106. Косарев О.И., Бедный И.А., Леонтьев М.Ю., Пузакина А.К. Вибрации и динамические нагрузки в судовых планетарных редукторах. // Проблемы машиностроения и автоматизации, 2013. № 3. с. 116 -124.
107. Косарев О.И. Контактная деформация и сжатие цилиндров // Вестник машиностроения. 2011, № 2. С.27-31.
108. Косарев О.И. Модификация зубьев косозубых цилиндрических передач для снижения вибраций с зубцовой частотой.// Вестник машиностроения. 2009, № 5, стр. 7-9.
109. Косарев О.И. , Бедный И.А., Мамонова М.Г. Снижение вибраций шевронной зубчатой передачи в источнике. // Вестник машиностроения. 2011, № 11, Стр. 19-23.
110. Косарев О.И. Контактная деформация цилиндра при сжатии его двумя плоскими плитами. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010, № 4, с. 66- 75.
111. Косарев О.И. Снижение виброактивности косозубого зацепления. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011, № 1, с. 19- 27.
112. Косарев О.И. Вибровозбуждение и динамические процессы в цилиндрических зубчатых передачах. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук.- Москва, 1997.- 324 с.
113. Косарев О.И. Модель вибровозбуждения в косозубом зацеплении // Вестник машиностроения. 1995, № 11, Стр. 3- 10.
114. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М.: Наука, 1971, с. 130- 140.
115. Королев Н.А. Новый метод измерения вертикальных перемещений в зоне контакта сопряженных тел. Известия ВУЗов «Машиностроение», 1962, № 6.
116. Короткий В.И., Газзаев Д.А. Эффективные контактные напряжения на поверхностях прямых бочкообразных зубьев эвольвентных зубчатых колес.// Вестник машиностроения, 2011, № 8, стр. 3- 8.

117. Крагельский И.В. Трение и износ. М.: Машиностроение, 1968, 480с.
118. Кудрявцев В.Н. Детали машин. Л.: Машиностроение, 1980, 464с.
119. Крагельский И.В. и др. Основы расчетов на трение и износ. Машиностроение, 1977, с. 528.
120. Кудрявцев В.Н. Зубчатые передачи. –М. –Л.: Машгиз, 1957.
121. Кудрявцев В.Н. Планетарные передачи.- М.: Машиностроение, 1966,- с. 308.
122. Кудрявцев В.Н., Державец Ю.А., Глухарев Е.Г. Конструкции и расчет зубчатых редукторов.- М.: Машиностроение, 1971, -с. 328.
123. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.8. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
124. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости, ГИТТЛ. М.,-Л., 1947.
125. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. М.: Наука, 1968, 584 с.
126. Лурье А.И. Некоторые контактные задачи теории упругости. ПММ. Т. 5, № 3, 1941.
127. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М., 1955.
128. Ляндон Ю.Н. Функциональная взаимозаменяемость в машиностроении. –М.: Машиностроение, 1967. – 219с.
129. Макушин В.М. Напряженное состояние и прочность деталей в местах контакта. –Труды кафедры сопротивления материалов МВТУ. Некоторые вопросы теоретических и экспериментальных исследований в области прочности. 1947, с. 79- 145.
130. Матлин М.М., Мозгунова А.И., Стариков А.А., Куликова М.А. К вопросу расчетного определения упругого сближения при первоначально линейном контакте деталей машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 1. С. 44- 46.
131. Матлин М.М., Бабаков А.В. Механика контактного взаимодействия твердых тел при начальном контакте по линии. // Механика (Литва). 2000. № 3 (23). С. 5- 10.

132. Махалов А.Г. Исследование изгибной выносливости цилиндрических передач с арочными зубьями: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. –Курган, 1983. -17с. (Курганский машиностроит. институт).
133. Машиностроение. Энциклопедия. Детали машин. Конструкционная прочность. Трение, износ, смазка. Т.4- 1 // Д.Н.Решетов и др. – М.: машиностроение, 1995 г. 864 с.
134. Медведев В.И. Оценка контактной и изгибной прочности зубьев спирально- конических передач. // Вестник машиностроения. 2004. №5
135. Медведев В.И. Расчет изгибных напряжений в круговых зубьях конических колес // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. №4. С. 32- 40.
136. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 4-е, М.-Л., 1954.
137. Мусхелишвили Н.И. Решение основной смешанной задачи теории упругости для полуплоскости. ДАН, Т. III, № 2, 1935.
138. Мусхелишвили Н.И. Основные граничные задачи теории упругости для полуплоскости. Сообщения АН Груз. ССР. Т. II, № 10, 1941.
139. Нахатакян Ф.Г. Определение коэффициента концентрации изгибных напряжений в зубьях колес с учетом упругих деформаций и погрешностей изготовления и монтажа элементов передачи.// Проблемы машиностроения и надежности машин, 2008г. № 4, с. 39- 43.
140. Нахатакян Ф.Г., Косарев О.И., Леонтьев М.Ю., Пузакина А.К. Расчетное определение коэффициента изгибных напряжений на зубьях зубчатых колес при перекосе // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2010, № 2, с. 61- 69.
141. Нахатакян Ф.Г. Механика контактного сближения упругих тел в задаче Герца. // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2010. № 5, с. 48- 56.

142. Нахатакян Ф.Г. Расчетное определение контактной податливости зубьев цилиндрических зубчатых колес на основе теории Герца. // Проблемы машиностроения и автоматизации, 2010. № 4. с. 49-52.
143. Нахатакян Ф.Г. Расчетное определение упругой податливости роликовых подшипников на основе теории Герца. // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2011. № 1. 28- 32.
144. Нахатакян Ф.Г. Об одном методе точного решения контактной задачи Герца для круговых цилиндров с параллельными осями // Вестник машиностроения. 2011, № 3. с.3-6.
145. Нахатакян Ф.Г. Решение плоской контактной задачи теории упругости с помощью модели упругого полупространства // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2011. № 5. с. 63- 67.
146. Нахатакян Ф.Г. Контактные напряжения и деформации цилиндров при наличии перекося // Вестник машиностроения. 2011. № 10. с. 45- 48.
147. Нахатакян Ф.Г, Бедный И.А., Пузакина А.К. Расчетная оценка контактной податливости зубчатых зацеплений. // Вестник машиностроения. 2011. № 11. с. 24-26.
148. Нахатакян Ф.Г. Краевой эффект при контактном взаимодействии двух цилиндров с различными длинами // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2012. № 1. с. 50-54.
149. Нахатакян Ф.Г., Косарев О.И. Аналитический метод решения задачи о контакте цилиндров при наличии перекося // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2012. № 2. с. 45-49.
150. Нахатакян Ф.Г. Контактное взаимодействие цилиндров при наличии перекося // Проблемы машиностроения и автоматизации, 2012. № 4. с. 91-93.
151. Нахатакян Ф.Г., Фирсанов В.В., Леонтьев М.Ю., Пузакина А.К. К вопросу моделирования краевого эффекта с помощью упругого основания // Проблемы машиностроения и автоматизации, 2012. № 2 . С.60-62.

152. Нахатакян Ф.Г. К определению контактной деформации круговых цилиндров. Международная конференция «Современные проблемы механики», посвященная 100- летию Л.А.Галина. М.: 2012 г. С. 61- 62.
153. Нахатакян Ф.Г., Косарев О.И. Сближение упругих тел в контактной задаче Герца. // Проблемы машиностроения и автоматизации, 2010. № 1, с. 102- 106.
154. Нахатакян Ф.Г. О решении Н.М.Беляева задачи по определению контактной деформации цилиндров // Вестник машиностроения. 2013. № 5. С. 91- 93.
155. Нахатакян Ф.Г. Контактная деформация упругих тел конечных размеров при взаимодействии по линии // Вестник машиностроения. 2014. № 2, с.24-27.
156. Нахатакян Ф.Г. К методу Н.М.Беляева по определению контактной деформации цилиндров. // Проблемы машиностроения и автоматизации, 2014. № 2, с.64-68.
157. Начинкин В. П. Изгибная и контактная прочность зубьев муфт с бочкообразными зубьями. //Вестник машиностроения. – 1982, № 7.- С.22-25.
158. Оптимизация параметров косозубых цилиндрических передач, эксплуатируемых в условиях абразивного изнашивания. Первая редакция МР 188-82 // Обеспечение износостойкости изделий. – М.: Госстандарт, 1982. -19 с.
159. Орлов А.В. Оптимизация рабочих поверхностей опор качения.- М.: Наука, 1984.- 84 с.
160. Орлов А.В., Саверский А.С., Устинов В.Г. и др. Повышение работоспособности радиальных шарикоподшипников за счет оптимизации формы желобов колец. / Труды ВНИИПП, 1974. - №1. - с.47-55.
161. Орлов А.В. Упругие деформации и напряжения на линейном контакте. //Проблемы машиностроения и надежности машин, 2006., № 6, с. 31-36.
162. Орлов А.В. Влияние износа на работоспособность опор качения // Проблемы машиностроения и надежности машин 2007. № 5. С. 71-79.

163. Орлов А.В. Определение нагруженности рабочих поверхностей опор качения. // Проблемы машиностроения и надежности машин 2008. № 5. С. 73-79.
164. Передатки зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет на прочность. ГОСТ 21354-87. М.: Изд-во стандартов, 1988, с. 125.
165. Петрусеви́ч А.И. Расчет зубчатых колес, принятый в ЦКБР – Редукторостроение. М., Оргметалл, 1935.
166. Петрусеви́ч А.И. Зубчатые передачи – Детали машин. М., Машгиз, 1953.
167. Петрусеви́ч А.И. Контактные напряжения, деформации и контактная гидродинамическая теория смазки. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, ИМАШ, 1950.
168. Петрусеви́ч А.И. Зубчатые передачи.- «Детали машин», т.1, М., 1953.
169. Петрусеви́ч А.И., Генкин М.Д., Гринкевич В.К. Динамические нагрузки в зубчатых передачах с прямозубыми колесами. –М.: Изд-во АН СССР, 1956. -134 с.
170. Печеный В.И. Исследование упругих деформаций зубьев и их влияние на нагрузочную способность зубчатых передач Новикова: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Одесса, 1978.- 125с. (Одесский политехнический институт).
171. Пинегин С.В. Контактная прочность в машинах. М.: Машиностроение, 1965, 192 с.
172. Пинегин С.В., Фролов К.В. Вибрации и шум подшипников качения. // Машиноведение. – 1966, - №2. – С. 36-45.
173. Пинегин С.В., Орлов А.В., Вершин Л.И. Тензометрический метод измерения местных напряжений в зоне контакта сжатых тел.- «Вестник машиностроения», 1961, № 3.
174. Пинегин С.В. Работоспособность деталей подшипников. М., Машгиз, 1949, 136 с.

175. Плахтин В.Д., Ивочкин М.Ю. Синтез зацепления зубчатых муфт с повышенными углами перекоса соединяемых валов. //Вестник машиностроения, 2003, № 6, стр. 3-9.
176. Плеханов Ф.И., Кузнецов В.С. Исследование деформативности элементов зубчатой планетарной передачи.// Вестник машиностроения, 2010, № 6, стр. 25- 28.
177. Плеханов Ф.И., Овсянников А.В. Исследование распределения нагрузки по длине ролика зубчато- роликовой планетарной передачи.// Вестник машиностроения, 2011, № 3, стр. 12- 14.
178. Повышение несущей способности механического привода/ Под ред. В.Н.Кудрявцева.- Л.: Машиностроение, 1973, с. 223.
179. Подшипники качения: Справочник – каталог. /Под редакцией В.Н. Нарышкина и Р.В. Коросташевского. –М.: Машиностроение, 1984. -280с.
180. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М.: Машгиз, 1958. 974 с.
181. Попов А.П. Исследование нагрузочной способности зубчатых и упругих муфт в условиях перекоса осей агрегатов. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук, ИМАШ, М., 1971.
182. Проников А.С. Надежность машин. –М.: Машиностроение, 1978. -591с.
183. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник// Под ред. И.А.Биргера, Я.Г.Пановко М.: Машиностроение, 1968, т. 2, с. 463.
184. Рабинович И.М. Вопросы теории статического расчета с односторонними связями. М.: Стройиздат, 1975, с. 145.
185. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
186. Разработка рекомендаций на метод расчета соединительных зубчатых муфт: Отчет// ДПИ: Руководитель темы В.М.Филипов Х-73-122; ГНР 74047105; Инв. Б 337629.- Донецк, 1973, 89 с.
187. Р.Джоунс, К.Уайке. Голографическая и спекл- интерферометрия. М.: Мир, 1986.



188. Редько С.Г. и Шаталин В.А. К вопросу влияния кривизны на контактные напряжения. Известия ВУЗов «Машиностроение», 1962, № 4.
189. Решетов Д.Н. Детали машин. М.: Машиностроение, 1989. 496 с.
190. Робер А.И. Исследование зубчатых шпинделей прокатных станков. Автореферат дис. канд. техн. наук. Свердловск, УПИ, 1972
191. Семенча П.В., Зисмин Ю.А., Шубина Н.Б. Распределение напряжений по длине бочкообразных зубьев. //Вестник машиностроения. -1970. -№2. -с.22.
192. Симвулиди И.А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании. – М.: Росвузиздат, 1963. – 144с.
193. Сирицин А.И., Мельникова Т.Н., Айрапетов С.Э. Регулирование зазора в конической передаче. // Вестник машиностроения. – 1970. -№2. – с. 24-26.
194. Скопин А.А., Молчанов С.М., Плеханов Ф.И. Распределение нагрузки и напряжений изгиба по длине зуба солнечной шестерни планетарной передачи.
195. Сызранцев В.Н. Синтез зацеплений цилиндрических передач с локализованным контактом. Автореферат на соискание ученой степени доктора технических наук. Ленинград, ЛПИ, 1989.
196. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т.2, М., Наука, 1965, с. 480.
197. Тимошенко С.П., Бауд Р.В. Напряжения в зубьях колес.- В кн. Тимошенко С.П. Статические и динамические проблемы теории упругости. Наукова думка, Киев, 1975, с. 198- 208.
198. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
199. Тимошенко С.П., Войновский- Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: физматгиз, 1963, 635с.
200. Трейер В.Н. Теория и расчет подшипников качения. М.-Л., Изд-во ОНТ, 1934.
201. Угодчиков А.Г., Длугаи М.Н., Степанов А.Е. Решение краевых задач теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. Высшая школа, 1970, 528 с.

202. Устиненко В.Л. Напряженное состояние зубьев цилиндрических прямозубых колес. - Машиностроение, 1972, 91 с.
203. Фёппль А. и Фёппль Л.. Сила и деформация. Т. 1 и II, М., ОНТИ, 1936.
204. Хоприх, Цантопулос. Контактные деформации вдоль прямой линии: цилиндр между двумя плоскими плитами. // Тр. Американского общества инженеров - механиков. Проблемы трения и смазки. М.: Мир, 1974. № 3, С. 193- 198.
205. Часовников Л.Д. Передачи зацеплением (зубчатые и червячные). –М.: Машиностроение, 1969. -486с.
206. Черменский О.Н., Ряховский О.А. Расчеты на контактную прочность. //Вестник машиностроения, 2008, № 7, стр. 3- 7.
207. Шевелева Г.И., Медведев В.И., Волков А.Э. Алгоритм геометро-кинематического анализа зацепления зубчатых колес. // Вестник машиностроения. 2004. № 8. С.
208. Шевелева Г.И. Расчет упругих контактных перемещений на поверхностях деталей ограниченных размеров. // Машиноведение. 1984, № 4, С. 92- 98.
209. Шевелева Г.И, Нагорнова У.Б. Численное решение задачи об упругом контакте двух цилиндров конечной длины. // Машиноведение. 1988, № 3, С. 43- 48.
210. Штаерман И.Я. Обобщение теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел. ДАН. Т. 29, № 3, 1940.
211. Штаерман И.Я. Об одном обобщении задачи Герца. ПММ. Т. 5, № 3, 1941.
212. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.: Машгиз, 1949.
213. Archard I.F. Contact and Rubbing of Flat Surfaces. I.Appl.Phis, vol.24, № 8, 1953, p. 981- 988.
214. Archard I.F., Hirst W. The Wear of Metals under Lubricated Conditions. Proc. Roy. Soc. Lond. Ser A, vol. 236, 1956, p. 397- 410.

215. Boussinesq J. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris, 1885.
216. Buckingham E. Dynamic Loads in Gear Tecth. 1931.
217. Buckingham E. Manual of Gear Design. Machinery, V, v 2, 1935, 1937.
218. Burwell I.T., Strang C.D. On the Empirical Law of Adhesive Wear.I. Appl. Phys, vol.23, № 1, 1952, p.18-28.
219. Calculation of load capacity of spur and helical hears. International standart ISO- 6336, 1991.
220. Foppl A., Lectures on Technical Mechanics, Fifth Volume, B.G.Teubner, Leipzig, 1907.
221. Föppl L. Beachpuchung von Schiene u. Rad. Forschung. G.W. 1936.
222. Fromm H. Berechnung des Schlupfes Z. für ang. M. u M. Bd. 7, 1927, ss 27-58. Arbeitverlust, Formänderung u. Schlupf beim Rollen. Z.f. techn. Physik № 9, 1928.
223. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. Verhandlungen des Vereine zur Beforderung des Geverbefleisses. Berlin. Nov. 1882. s. 49.
224. Hertz H. Gesammele Werke. Bd. 1, 1895. Leipzig, ss 155-196.
225. Holl D.L. Консольная пластинка под действием сосредоточенной нагрузки, приложенной на ее свободном конце.- В кн. Сборник переводов по зубчатым зацеплениям. Ростов-на-Дону, 1962, с. 140-152.
226. Holm R. Electrical Contacts. Stockholm. H. Gerbers, 1946, p.398.
227. Ishikawa I., Umezawa K. Контактные деформации зубьев колес конечной ширины. М.: ВИНТИ, Экспресс- информ. «Детали машин». 1973, № 39, с.21- 32.
228. Jaramillo N.T. Деформации и моменты в консольной пластинке бесконечной длины от сосредоточенной нагрузки.- В кн.: Сборник переводов по зубчатым зацеплениям. Ростов-на-Дону, 1962, с.153- 176.
229. Lubkin J.L. The torsion of Elastic Spheres in contact. J. of Appl. Mech. v. 18. 1951, № 2, pp. 183-187.

230. Lundberg G. Elastische Berührung Zweier Halbraume Forsch. Ing.- Wes., 1939, Bd. 10, № 5.
231. Mac Gregor C. Деформация длинного зуба зубчатой передачи.- В кн.: Сборник переводов по зубчатым зацеплениям. Ростов-на-Дону, 1962, с. 177 -185.
232. Merritt H.E. Mechanical World. № 2377, 1932.
233. Merritt H.E. Wear performance. Engineer. №№ 4303-4310, 1938.
234. Mindlin R.D. Compliance of Elastic Bodies in Contact. J.Applied Mechanics. 1949, v. 16, p. 259.
235. Mindlin R.D., Mason W.P., Osmer T.F., Deresiewicz H. Effects of an oscillating tangential Force on the contact surfaces of Elastic Spheres, Proceedings of the First U. S. National Congress of Appl. Mechanics. Chicago, 1952, pp. 203 -208.
236. Mundt R. Zulässige Belastung von Wälzgerlagern. Forschung 7. Bd. 6, 1930.
237. Opper G. Polarisationoptische Untersuchung räumlicher Spannungs- und Dehnungszustände. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens Ausgabe. B. 7, № 5, Sept. 1936.
238. Johnson K.L. Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces. Proc. of R. Soc. Ser A. Math. a Phys. Sciences. № 1183, 1955, v. 230.
239. Palmgren A. Die Lebensdauer von Kugellagern. Z. V. D.Y. Rd. 68, № 14, 1924.
240. Poritsky H. Stresses and Deflections of Cylindrical Bodies in Contact with Application to Contact to Gears and Lokomotive Wheels. Mechanical Engineering, 1949. v – 71 p. 1050, see also J. of Appl. Mech. 1950, v. 17, № 2.
241. Stellrecht H. Die Belastbarkeit des Wälzlagers, 1928.
242. Stoeckicht W.G. J. Of the American Society of Naval Engng, 1948, v. 60.
243. Stribeck R. Kugellager für Beliebige Belastungen. Z. V. D. Y. 1901. Bd. 45.

244. Tonn W. Beitrag zur Kenntnis des Verschleissvorganges beim Kurzversuch. Ztsch. F. Metallkunde, Bd.29, № 6, 1937, S.196- 198.
245. Vartak G.V. Изгибающий момент в заделке пластины, подверженной действию сосредоточенных нагрузок на свободной стороне.- В кн.: Сборник переводов по зубчатым зацеплениям. Ростов-на-дону, 1962, с. 186- 212.
246. Weber C. Stresses in a Semispace due to a Normal load over a Ellipse. Department of Scientific and Industrial Research. Nieman Report № 91 (Germany).
247. Wellauer E.I., Seirag A. Исследование напряжений у корня зуба зубчатых колес с использованием консольной пластины в качестве модели зуба. Экспресс- информация. Редукторостроение и детали машин, 1960, 2, с. 1- 14.
248. Winkler, "Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit", Prag, Dominicus, 1867.