

ИНСТИТУТ МАШИНОВЕДЕНИЯ  
им. А.А. Благонравова (ИМАШ РАН)

На правах рукописи

НАСОНОВ ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

МЕТОДОЛОГИЯ РАСЧЕТА И ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
ТУРБОЗУБЧАТЫХ АГРЕГАТОВ ГЛАВНОГО ПРИВОДА  
СУДОВЫХ ГРЕБНЫХ ВИНТОВ

**01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры**

Диссертация на соискание ученой степени доктора  
технических наук

Научный консультант  
Доктор технических наук  
Косарев О.И.

Москва 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

I. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	4
2. МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАНЕТАРНЫХ РЕДУКТОРОВ .....	21
2.1. Особенности конструкции. Кинематическая схема .....	21
2.2. Разработка расчетной модели корпуса редуктора и его собственные колебания .....	25
2.3 Математическое моделирование кинематической части редуктора .....	41
2.3.1 Зубчатые зацепления и соединения.....	42
2.3.2 Соединительные муфты .....	51
2.3.3 Водило .....	52
2.3.4 Подшипники скольжения.....	54
2.3.5 Валопроводы и дисковые муфты.....	57
2.4. Учет контактных взаимодействий в сателлитных узлах.....	67
2.5. Собственные колебания редуктора .....	80
2.6. Верификация .....	99
2.6. Выводы .....	107
3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБОАГРЕГАТОВ В СОСТАВЕ ГТЗА.....	108
3.1. постановка задачи. ....	108
3.2. Разработка методик моделирования динамики роторных систем, оценка качества модели .....	110
3.3. Особенности колебаний роторных систем.....	124
3.4. Построение расчетной модели ротора приводной турбины ....	132
3.5. Выводы .....	138
4. ДИНАМИКА ПЛАНЕТАРНЫХ РЕДУКТОРОВ В СОСТАВЕ ТУРБОЗУБЧАТЫХ АГРЕГАТОВ .....	139
4.1. Взаимная компенсация возмущающих сил в зацеплениях сателлитов с центральными колесами.....	139

4.2. Влияние неравномерности нагрузки по спутникам на динамику системы .....	151
4.3. Влияние корректировки фазовых соотношений возбуждающих сил со стороны эпицикла и солнечной шестерни. ....	158
4.4. Влияние перекосов в спутничных узлах на динамику системы .....	165
4.5. выводы и рекомендации .....	168
5. РАЗРАБОТКА ИМПОРТОЗАМЕЩАЮЩЕГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ РАБОЧИХ КОЛЕС ТУРБОАГРЕГАТОВ .....	170
5.1. Состояние дел.....	170
5.2. Структура программного комплекса.....	179
5.3. Тестирование, верификация, результаты расчетов .....	199
5.4. Частотные функции, связанность системы, оценка корректности форм резонансных колебаний .....	210
5.5. Выводы .....	222
6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	224
7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	228
8 ПРИЛОЖЕНИЯ .....	258

## I. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Турбозубчатый агрегат представляет собой турбину и редуктор, которые связаны системой валопроводов и установлены на общей раме. Агрегат, предназначенный для привода гребного винта, называется главным турбозубчатым агрегатом (ГТЗА). Динамическими характеристиками ГТЗА в значительной мере определяются виброшумовые параметры кораблей и подводных лодок, на которых данные агрегаты устанавливаются. Этот факт определяет важность и актуальность затрагиваемой тематики.

Схемы современных силовых корабельных установок достаточно разнообразны. Это могут быть дизельные двигатели или паровые и газовые турбины. В 30-х годах прошлого века особенно популярен был электропривод гребного винта. С точки зрения виброшумовых характеристик электропривод является безусловным лидером, но имеет серьезные ограничения по мощности.

Газовые турбины широко применяются на небольших скоростных судах, в основном на военно-морском флоте (десантные катера, минные тральщики, суда на подводных крыльях). Учитывая их малый вес, компактность и быстрый запуск, они во многих случаях становятся конкурентоспособными с дизелями и паровыми турбинами.

На крупных судах, ледоколах, подводных лодках, использующих атомную энергию, для привода гребного винта устанавливаются паровые турбины, причем на одном валопроводе могут быть установлены несколько турбин.

# ИСТОЧНИКИ ВИБРАЦИИ ТУРБОЗУБЧАТОГО АГРЕГАТА

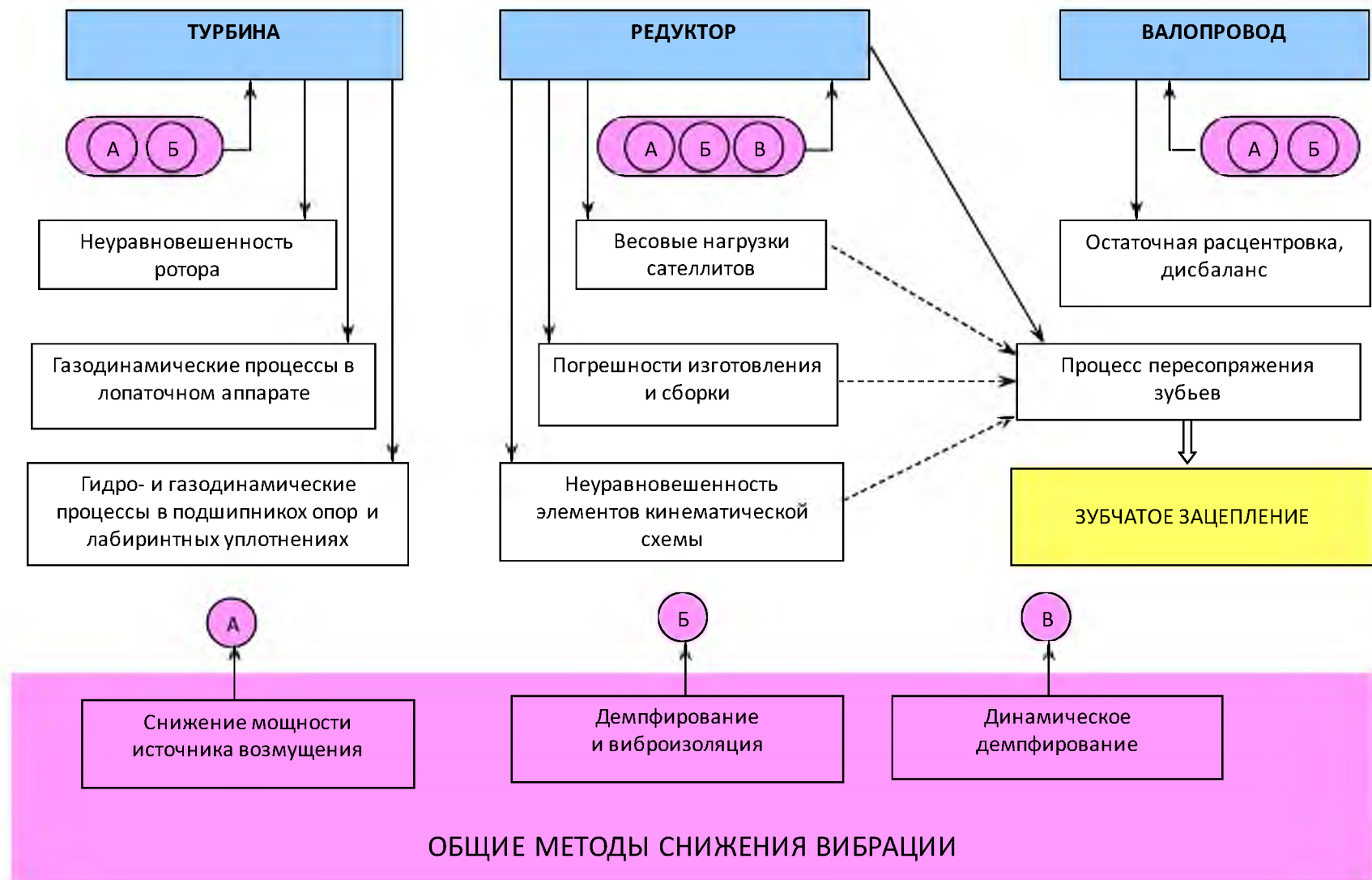


Рис. 1.1 Источники вибрации в ГТЗА и общие методы ее снижения

Говоря о динамике турбозубчатых агрегатов и турбин в частности, следует разделить задачи, связанные с проблемами прочности, и задачи, связанные с обеспечением требуемых виброшумовых характеристик, хотя обе проблемы взаимосвязаны. В первом случае рассматриваются вопросы собственных колебаний и режимы работы на резонансных частотах, во втором – исследуются вынужденные колебания в широком диапазоне частот. В данной работе рассматриваются оба этих аспекта.

На схеме рис.1.1 показаны основные источники вибрации и общие методы ее снижения.

Все три основных компонента турбозубчатых агрегатов (турбина, редуктор, валопроводы) являются источниками вибрации.

Одним из самых сложных объектов с точки зрения динамики является ротор турбоагрегата. Большинство аварий турбоагрегатов связано именно с динамическими процессами. Огромное количество аналитических и экспериментальных исследований в области динамики роторов и лопаточного аппарата обеспечивает надежность выпускаемых сегодня турбин.

Проблема распространения вибрации при проектировании турбин успешно решается путем виброизолирующего крепления корпуса и применения компенсирующих вибрацию конструкций муфт.

Вместе с тем уменьшение габаритов при одновременном повышении мощности при проектировании новых турбин ставят на первый план задачи динамики, связанные с обеспечением прочности, и в первую очередь это касается лопаточного аппарата. **В связи с этим встает задача достоверного определения собственных колебаний лопаточного аппарата, рабочих колес и всего ротора на стадии проектирования и доводки.**

Существующие в настоящее время методики расчетов, изложенные в учебно-методической литературе [12, 40, 53, 58, 76, 83, 84, 90,

130, 157, 162, 166, 169], позволяют достаточно точно определить вибрационные характеристики отдельных элементов. При расчете такого узла, как облопаченное колесо или ротор турбоагрегата в сборе, используются упрощенные математические модели [87, 150, 194, 202, 209, 221, 279]. Такие модели позволяют решить частные, очень узкие в своей области, задачи. Для решения более широкого круга задач математическая модель должна достаточно точно отражать внутреннюю структуру исследуемого объекта.

Достаточно важную и сложную задачу представляет исследование колебаний валопроводов, связанное прежде всего с газогидродинамическими процессами в подшипниках и уплотнениях, а также с расцентровкой валов [115, 116, 117, 118]. Недостаток внимания, уделенного этим вопросам, может привести к серьезным проблемам при эксплуатации турбоагрегатов и силовых установок [115, 13].

Для снижения внутренних напряжений в валопроводах, прежде всего, проводится тщательная центровка соединяемых валов. Однако в силу объективных причин остаточная расцентровка всегда присутствует, и для ее компенсации используют различные конструкции упругих соединительных муфт. Наличие остаточной расцентровки приводит к возникновению динамических сил, порождающих вибрационные процессы в муфтовых соединениях. Величины этих сил и уровень вибрации зависят от конструкции муфты.

В работах [1, 89, 124, 158] рассматриваются наиболее популярные в турбостроении конструкции муфт. Особо следует отметить дисковые муфты, которые выгодно отличаются низким уровнем возмущающих динамических сил. Благодаря экспериментально-аналитическим исследованиям, проведенным на Калужском турбинном заводе [215, 97, 99], а также численным исследованиям [98], можно считать природу возникновения этих сил достаточно хорошо изученной. Построение математических моделей таких муфт для

исследования динамики валопроводов особых сложностей не вызывает. Интерес представляет построение упрощенной модели произвольной конструкции муфты. Например, можно ли заменить довольно сложную конструкцию соединительной муфты несколькими элементами с соответствующими инерционными и жесткостными свойствами с добавлением фиктивных динамических сил, имитирующих эффект возмущений, генерируемых внутренними процессами в муфтах. Такой подход позволит более рационально распределить вычислительные ресурсы при расчете столь сложных систем как турбозубчатый агрегат.

Основным источником шума из составляющих турбозубчатый агрегат компонентов, как показала практика, является редуктор. В отличие от турбины, проблему распространения вибрации решить путем виброизолирующего крепления и применения соответствующих конструкций муфт не удастся. Ограничения по передаваемому моменту не дают возможности использовать желаемую конструкцию упругой муфты на выходном валу редуктора.

Поэтому задача снижения виброактивности корабельных редукторов стоит достаточно остро, поскольку возникающая в нем и распространяемая в окружающую среду вибрация представляет собой серьезную проблему.

**Основной целью** работы является снижение уровня вибрации при проектировании малозумных ГТЗА.

В современных корабельных установках широкое применение нашли многосателлитные планетарные передачи. Фундаментальные исследования кинематики подобных механизмов [д1.113, 177] показали возможности достижения достаточно высоких значений их КПД, а также преимущества по массогабаритным характеристикам в сравнении с рядовыми.



В то же время использование планетарных механизмов в тяжело нагруженных передачах поставило серьезную задачу выравнивания передаваемой по параллельным потокам мощности. Задача решалась применением специальных уравнивательных механизмов [175, 177, 193], повышением податливости опор сателлитов [64, 113], установкой сателлитов на специальные шарнирные опоры, допускающие их угловую самоустановку [175, 195].

Наиболее широкое применение получили предложения Stoekicht'a [273, 297] по реализации «плавающих» подвесок у одного или нескольких звеньев планетарного механизма [2, 113, 161, 175, 207] и повышению податливости ободьев центральных колес [2, 103, 193].

Наметившееся отставание теории проектирования от практики уже на этапе выравнивания статических нагрузок привело к появлению схем с излишним количеством плавающих и податливых элементов. Проведенные впоследствии исследования позволили выявить механизмы кинематического «плавания», бесполезного с точки зрения выравнивания нагрузки в системе с двумя плавающими колесами и вредного с точки зрения виброактивности [4, 168, 207]. Подобные проблемы были выявлены при испытаниях и экспериментальной доводке многопоточных соосных редукторов на Калужском турбинном заводе и учтены при проектировании планетарных схем с податливыми сателлитными узлами [212, 213].

Решение задач раскрытия статической неопределимости планетарного механизма и дифференцирования влияния, оказываемого «плаванием» центральных колес и упругой податливостью их ободьев на распределение нагрузки по сателлитам [4, 6], позволило обосновать целесообразность комбинации одного плавающего центрального колеса (шестерни) и другого (эпицикла) с податливыми ободьями. В пользу подобной комбинации говорят результаты анализа и обобщения ис-

следований зубчатых муфт [131, 137, 163, 211], сделанные в работе [9].

Первые исследования динамики планетарных механизмов были посвящены разработке методов вибрационного расчета в предположении преобладания крутильных колебаний [60, 74]. Однако главные особенности мощных судовых планетарных редукторов – неравномерность распределения нагрузки по сателлитам, ведущая к поперечным колебаниям звеньев, и упругие деформации некоторых податливых элементов, определяющие спектр собственных колебаний, – были учтены только после построения их полной динамической модели путем объединения конечного числа простых подсистем на основе метода динамических податливостей [4]. При этом были исследованы факторы, приводящие к возникновению в планетарных механизмах взаимосвязанных крутильно-поперечных колебаний, найдены способы их минимизации [19, 78].

Исследования физических процессов возникновения вынуждающих сил и особенности их суммирования на элементах планетарного механизма выявили возможности снижения виброактивности за счет взаимной компенсации возмущающих факторов как непосредственно в источниках – в зубчатых зацеплениях [5, 294, 295], так и на твердых звеньях – водиле, сателлитах, солнечной шестерне [18, 25, 269]. В частности, было показано, что выбором чисел зубьев колес можно существенно влиять на характер и уровень колебаний планетарных механизмов. Результаты этих исследований показали, что потенциал планетарной схемы по достижению минимальной виброактивности более высок, чем у переборных редукторов, а реализация этого потенциала связана с обеспечением инерционной, жесткостной и силовой симметрии механизма.

Главным источником возбуждения колебаний в редукторах является процесс пересопряжения зубьев. Первые попытки снизить интен-

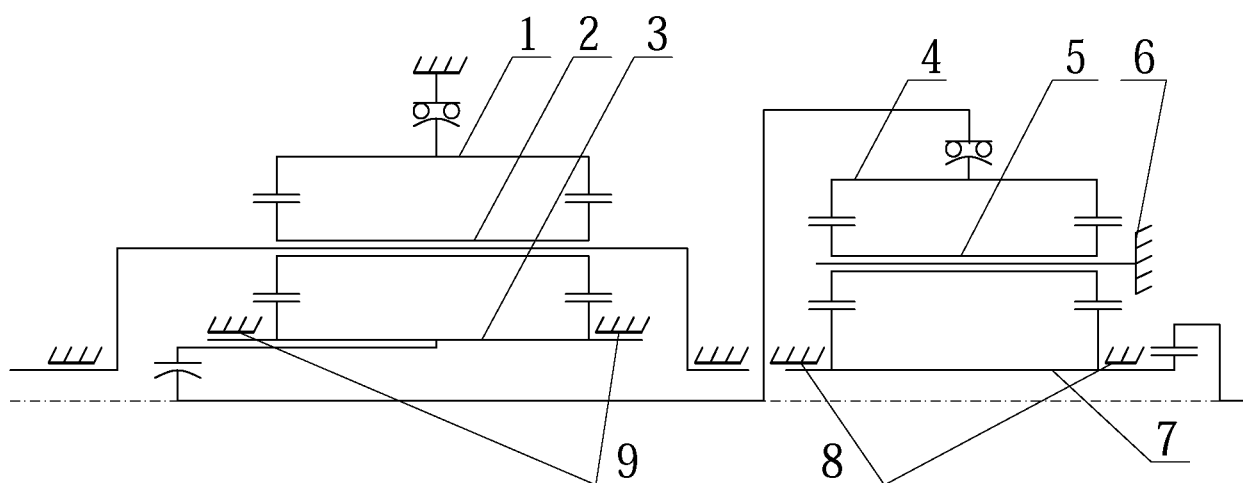
сивность этого возбуждения сводились к повышению точности изготовления зубчатых колес. Так на Южно-уральском турбинном заводе после ужесточения требований к точности изготовления зубчатых колес по плавности и контакту с пятой до четвертой степени (ГОСТ 8889-88) удалось снизить виброактивность судового двухступенчатого редуктора на зубцевой частоте (т.е. на частоте пересопряжения зубьев) высокооборотной ступени на 13 дБ (при работе с номинальной нагрузкой) [179]. При этом на низкооборотной ступени эффекта получено не было.

Более поздние попытки снизить виброактивность судовых редукторов на частоте пересопряжения зубьев за счет коррекции геометрии эвольвентного зацепления (профильная и продольная модификации зубьев) тоже не дали однозначно положительных результатов [251]. Так, стендовые испытания судовых редукторов, проведенные по заказу ВМФ Великобритании [276], показали, что при общей тенденции к снижению нерезонансных динамических нагрузок на опорных подшипниках в 10 раз при таком же уменьшении суммарной кинематической погрешности и упругой деформации звеньев под нагрузкой [252], даже у передач с оптимизированной геометрией, имеет место значительная нестабильность динамических характеристик. Полученные результаты показали, что на режимах малых нагрузок суммарная кинематическая погрешность и упругая деформация звеньев не является основной (тем более единственной) причиной вибровозбуждения на частоте пересопряжения зубьев.

На Калужском турбинном заводе, где при достигнутом уровне точности изготовления (не ниже четвертой степени по плавности и контакту) стояла задача снижения виброактивности низкооборотных планетарных ступеней, поиски решения велись не в области оптимизации геометрии зацеплений, а на путях совершенствования конструкции редуктора. После большого количества экспериментальных ис-

следований и доводки опытных образцов была получена конструкция двухступенчатого планетарного редуктора, схема которого показана на рис. 1.2. В настоящее время это типовая схема планетарного редуктора, входящего в состав ГТЗА. Высокооборотная ступень редуктора имеет три сателлита (5) и остановленное водило (6). Низкооборотная ступень, – пять сателлитов (2) и остановленный эпицикл (1).

Главная отличительная особенность данной схемы это отказ от традиционной схемы Stoezicht'a с двумя «плавающими» центральными колесами. В соответствии с рекомендациями [4, 6, 5] на каждой ступени был оставлен только один «плавающий» элемент – солнечная шестерня (3), (7) и один податливый элемент – ободья венцов эпицикла (1), (4). Устранение плавающей подвески венцов эпицикла второй ступени (1) достигается установкой блокирующей муфты второй ступени в корпус редуктора без уравнительного механизма. Блокирующая муфта венцов вращающегося эпицикла первой ступени (4) с той же целью опирается на специальные катки, воспринимающие весовую нагрузку. Данные мероприятия позволили исключить двухпрофильный контакт в зубчатых зацеплениях эпициклов даже при работе без нагрузки.



**Рис.1.2. Схема двухступенчатого планетарного редуктора.**

Установка солнечной шестерни первой ступени (7) в подшипники (8) с зазором, не препятствующим ее всплыванию, но исключаящим двухпрофильный контакт ее зубьев, позволила существенно снизить вибрацию корпуса редуктора на зубцовой частоте высокооборотной ступени. Аналогичные мероприятия на низкооборотной ступени успеха, к сожалению, не принесли, что свидетельствует о наличии иных преобладающих факторов, вызывающих рост вибрации на частоте пересопряжения зубьев второй ступени. Таким фактором, как показали дальнейшие экспериментальные исследования, явилось перераспределение контакта по зацеплению (смещение контакта к торцам шестерни из-за ее перекоса) и неравномерное распределение нагрузки по потокам, обусловленное весовыми нагрузками элементов редуктора на режимах малой мощности. Нестабильность пятна контакта и его перемещение по ширине зубчатых венцов изменяет фазу входа зубьев в зацепление, что исключает возможность минимизации возмущающих сил и их взаимной компенсации выбором коэффициентов перекрытия [8], профильной и продольной модификацией зубьев [147, 251], подбором числа зубьев [296] без восстановления симметрии статического нагружения зацеплений.

С целью решения указанных проблем были предприняты попытки исследования напряженно-деформированного состояния сателлитного узла методом конечных элементов [128, 129], однако неопределенность граничных условий при моделировании данного узла не позволила получить корректное решение без учета контактного взаимодействия оси сателлита с сателлитом и со щеками водила.

Еще одно направление снижения возмущающих сил в зацеплении связано с оценкой погрешностей изготовления сопрягаемых узлов (зубчатые венцы, водило) и проведением сборочных работ, оптимизирующих их взаимное расположение с учетом имеющихся погрешностей. С этой целью в работе [120] был введен комплексный точност-

ной параметр (КТП), учитывающий достаточно большое количество факторов. Одной из проблем, связанных с уточнением КТП, является недостаточная точность определения взаимного расположения расточек для осей сателлитов в водиле [141, 143]. Решение данной проблемы и один из возможных способов коррекции погрешностей изготовления водила описан в [121, 144].

Для оценки и исследования динамических свойств редукторов на стадии проектирования в настоящее время используется разработанное в ИМАШ РАН программное обеспечение. Расчеты проводятся на моделях, состоящих из простых подсистем с распределенными (ободья эпициклов) и сосредоточенными (остальные узлы) параметрами. Подсистемы объединяются на основе метода динамических податливостей [4, 5]. Коэффициенты жесткости и демпфирования некоторых элементов уточняются по результатам экспериментальных исследований [29, 220, 224].

Несмотря на то, что природа возмущающих сил, возникающих в процессе пересопряжения зубьев в редукторных системах, достаточно сложна [4, 3, 5, 7 и др.], при проведении динамических расчетов численными методами [110] эти силы задаются в виде суммы гармоник кинематического возбуждения:

$$P = C_3 \sum (\Delta_m \sin(m\omega_z t + \varphi_m)), \text{ где}$$

$C_3$  – жесткость зацепления;  $\omega_z$  – частота пересопряжения зубьев;  $\Delta_m$  и  $\varphi_m$  – амплитуда и фаза  $m$ -й гармоники возмущающей силы, обусловленной технологическими погрешностями, упругими деформациями и изменениями жесткости зубьев по фазе зацепления.

И хотя приведенная формула не полностью соответствует физической природе возмущающих сил, такой подход позволяет добиться достаточно высокой точности амплитудно-частотных характеристик вынужденных колебаний в диапазоне 50-2000 Гц [29].

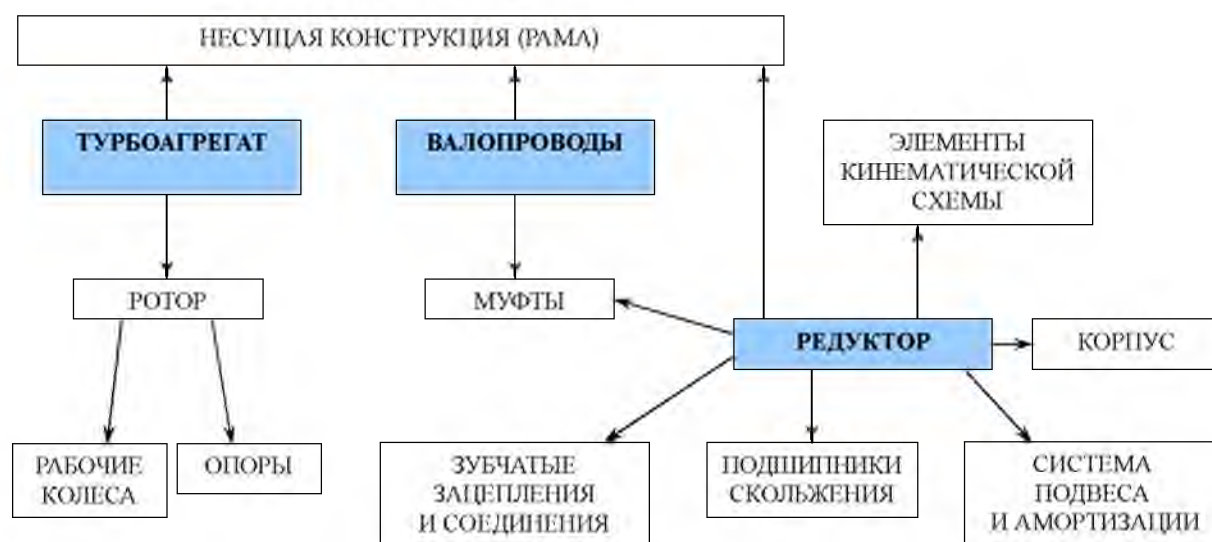
Основная проблема ГТЗА, в состав которого входит упомянутый редуктор, – это повышенный уровень вибрации на частоте пересопрежения зубьев второй ступени в диапазоне 50-200Гц. Именно в этом диапазоне находится малошумный режим, т.е. режим скрытного хода. Снижение уровня вибрации ГТЗА на режиме скрытного хода представляет собой важную народно хозяйственную задачу.

Существенным недостатком математических моделей, используемых в ИМАШ РАН можно считать наличие твердых не деформируемых деталей (это зубчатые колеса, водило ...). Корпус редуктора тоже моделировался весьма упрощенно – в виде балки Тимошенко. Создавать более совершенные модели на основе методов строительной механики, использовавшихся ранее, на сегодняшний день представляется не рациональным. Наиболее практичным для моделирования сложных механических конструкций является метод конечных элементов (МКЭ).

Современное программное обеспечение и мощности ЭМВ создают все условия для построения более совершенных моделей и проведения численных исследований на качественно новом, более высоком уровне, позволяющем оценивать вибрационные характеристики современных редукторов в условиях, максимально приближенных к условиям их работы, например, в составе силовой установки или испытательного стенда.

Сравнительный анализ наиболее известных автоматизированных конечноэлементных программных комплексов (ПК) NASTRAN, ASKA, ADINA, ANSYS и других выполнен в работах [16, 41, 42, 152, 164, 218]. Большой популярностью на российском рынке пользуются универсальные ПК NASTRAN и ANSYS, позволяющие решать достаточно сложные задачи. Однако методик расчета систем, подобных ГТЗА в настоящее время не существует.

ГТЗА представляет собой чрезвычайно сложную для моделирования систему. Поэтому в данной работе, согласно основному принципу диакоптики, вся система делится на ряд более простых подсистем с целью исследования возможности их упрощения. Затем из упрощенных моделей подсистем собирается модель всей системы. Задача промежуточных исследований заключается в том, чтобы построить максимально упрощенную модель, при адекватном отражении ею основных свойств моделируемого объекта. На рис. 1.3 показана схема разбиения ГТЗА на подсистемы.



**Рис.1.3. Подсистемы и компоненты ГТЗА**

Поскольку основным источником шума в ГТЗА является редуктор, то, в соответствии с целью работы он и входящие в его состав подсистемы следует моделировать с максимальной степенью детализации. Остальные подсистемы моделируются с максимальной степенью упрощения. Степень детализации или упрощения определяется имеющимися вычислительными ресурсами.

При исследовании динамики типовой конструкции ГТЗА в данной работе используется ПК ANSYS. Однако, достаточное внимание уделено вопросу разработки отечественного, импортозамещающего программного обеспечения. Это особенно актуально для таких облас-



тей как ядерная энергетика, авиа- и кораблестроение, космические технологии.

Небольшим коллективам без серьезной государственной поддержки тяжело состязаться с иностранными производителями, уже признанными лидерами на международном рынке ПО. Тем не менее, есть ниша, которую следует занять и развивать в дальнейшем, – это разработка узкоспециализированного высокоточного ПО, адаптированного для решения частных задач, характерных для конкретных предприятий. Имеет смысл, например, разработать ПК для расчета собственных колебаний рабочих колес турбоагрегатов. Как было сказано выше, эти задачи связаны в большей степени с проблемами прочности, а не с обеспечением требуемых виброшумовых характеристик.

Теоретические основы и математический аппарат для решения подобных задач известны и хорошо разработаны. Тем не менее, программная реализация не обходится без решения технических вопросов, связанных с конкретной областью применения.

Первые основополагающие исследования в области расчета собственных колебаний вращающихся колес принадлежат Стодоле [272]. Стодола использовал приближенное решение, основанное на методе Релея. Лопатки рассматривались как твердое тело на ободу диска, т.е. как сосредоточенная кольцевая масса. Причины колебаний лопаточных колес впервые были исследованы Кэмпбеллом в работе [226], где проанализированы случаи разрушения лопаток и дисков в результате изгибных колебаний. Вибрационный расчет лопаток на основе теории Кирхгофа–Клебша позволяет исследовать чисто изгибные и чисто крутильные колебания [31,33,204] и справедлив только для слабо закрученных лопаток. Дальнейшее развитие теория закрученных стержней получила в работах Ю.С. Воробьева, С.М. Гринберга, Б.Ф. Шорра и других [66, 67, 70, 77, 208, 243]. Это позволило учесть влияние таких факторов, как начальная закрутка, депланация сечения, сдвиг и т.д. В

работе И.Ю. Хижа [201] исследуются колебания нагруженных стержневых систем. Один из программно реализованных методов на базе стержневой теории, принятый для расчета лопаток турбомашин, излагается в работах Л.Х. Листвинской [122, 123].

Более высокочастотные формы колебаний позволяет исследовать теория пластин. Таким расчетам посвящены работы Ф.С. Бедчер, И.И. Меерович [30, 133], позволяющие учитывать косую и частичную заделку в корневом сечении, а также косой периферийный срез пера лопатки. Лопатки являются наиболее нагруженными элементами рабочих колес турбоагрегатов, и исследованию их колебаний посвящено большое количество работ. В зависимости от формы лопаток расчет базировался на использовании теории стержней, пластин или оболочек.

Вибрационные напряжения и усталость материала, наблюдаемые в дисках служат проявлением резонансных колебаний, а уменьшение их достигается отстройкой и демпфированием. Для снижения вибрационных нагрузок могут использоваться антивибрационные полки [187], демпферные связи и бандажи [105, 153, 261, 289, 291] и некоторые другие конструктивные решения [15, 22, 174, 181, 203]. Демпфирование колебаний лопаток с помощью пьезоэлементов предлагается в [277], но в связи с техническими трудностями реализация этого метода не нашла применения.

Сложные формы современных лопаток и специфичные характеристики дисков [114, 198, 281] приводят к значительным ошибкам при использовании в расчетах технической теории изгиба стержней и круглых пластин.

Известны уточненные варианты теории кольцевых пластин, построенной в соответствии с гипотезой Кирхгофа, и теории колебаний, основанной на аналоге гипотезы Тимошенко для стержней, учитывающей деформацию сдвига [192]. Эти теории дают существенную

погрешность при описании высших форм колебаний. Кроме того, они не учитывают асимметрию полотна и обода диска, условия закрепления и жесткость узлов перехода к оболочкам вращения и валам.

Численные исследования выделили основные факторы, влияющие на характер колебаний рабочих лопаток. Ряд работ был посвящен учету влияния упругих свойств заделки лопатки [52, 151, 256]. В них разработаны конечноэлементные модели, позволяющие проводить расчеты лопаток с замковыми частями. Еще одним фактором, влияющим на НДС и колебания рабочих колес, считается неравномерный нагрев различных элементов. С этой проблемой связаны работы [167, 205]. Особое внимание при расчете динамики рабочих колес турбомашин уделяется полю центробежных сил. Конечноэлементная реализация учета центробежных сил отражена в работах [85, 151, 191, 253]. Этот алгоритм учитывает статические напряжения от действия центробежных сил в срединной поверхности лопатки, а также их восстанавливающее действие при изгибе. Обширные обзоры, посвященные расчету лопаток в поле центробежных сил, представлены в работах [17, 88, 91, 237].

В работах [38, 39] приведены результаты анализа взаимодействия колебаний в различных узлах турбомашин. В расчетах на базе стержневых и прямоугольных пластинчатых элементов использовалось свойство циклической симметрии. В научных кругах и сейчас имеют место споры о правомерности использования в расчетах свойств циклической симметрии, поскольку результаты, полученные численным путем с использованием свойств циклической симметрии и без использования этих свойств, имеют некоторые отличия.

Ответ на вопрос о корректности использования в расчетах свойств циклической симметрии, безусловно, представляет научный интерес.

Исходя из вышеизложенного, в соответствии с целью работы можно сформулировать основные задачи, которые необходимо решить для достижения поставленной цели:

- 1) Разработка методик моделирования турбозубчатых агрегатов и их элементов.
- 2) Построение математических моделей турбозубчатого агрегата в сборе и его отдельных компонентов.
- 3) Оценка адекватности построенных моделей.
- 4) Исследование динамических характеристик построенных моделей.
- 5) Разработка предложений по улучшению конструкций корабельных редукторов на примере двухступенчатого планетарного редуктора РП18 производства Калужского турбинного завода.
- 6) Разработка узкоспециализированного алгоритмического и программного инструментария для исследования динамики рабочих колес турбоагрегатов.

## **2. МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАНЕТАРНЫХ РЕДУКТОРОВ**

Турбозубчатый агрегат является основным источником вибрации корабельных силовых установок. Определяющий вклад в уровень шумов, излучаемых кораблем или подводной лодкой, вносит, как известно, зубчатая передача, т.е. редуктор. Поэтому вопросам моделирования данного узла уделяется особое внимание. В качестве инструмента исследования используется ПК ANSYS. Ключевые моменты моделирования рассматриваются на примере типовой конструкции двухступенчатого планетарного редуктора с плавающей подвеской центральных колес.

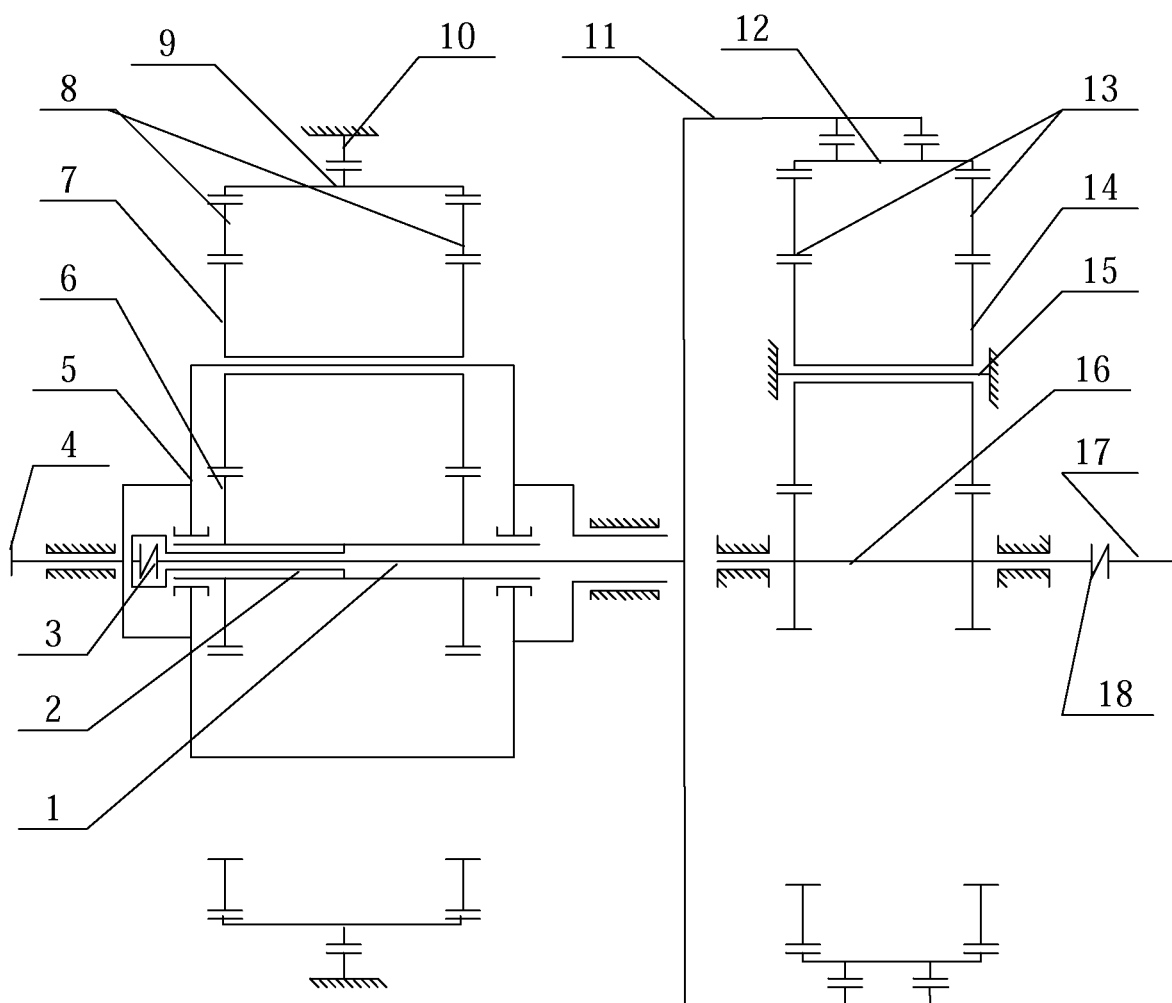
### **2.1. Особенности конструкции. Кинематическая схема**

Рассматриваемый редуктор выполнен по схеме 2-К-Н рис. 2.1. В данном изделии реализованы конструктивные решения, полученные в результате многолетних опытно-экспериментальных и научно исследовательских совместных работ по улучшению конструкции турбозубчатых агрегатов на Калужском турбинном заводе и в Институте машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (ИМАШ РАН).

Высокооборотная ступень выполнена по трехсателлитной схеме с остановленным водилом 15. В низкооборотной ступени – пять сателлитов 7 и остановленный эпицикл 8. В отличие от традиционной схемы Stotkich'a [273] с двумя «плавающими» колесами, у данной конструкции в каждой ступени имеется только по одному «плавающему» элементу – солнечные шестерни 6 и 16 и одному податливому элементу – ободья эпициклов 8, 13.

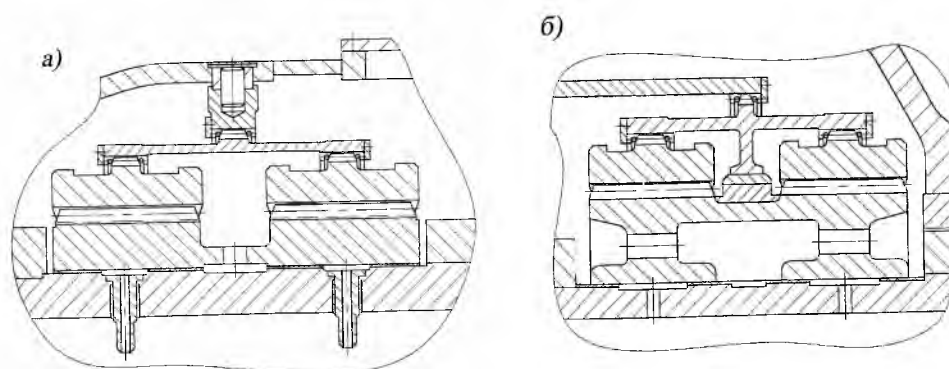
Венцы неподвижного эпицикла второй ступени установлены с помощью блокирующей муфты 9 в однорядную зубчатую муфту 10,

смонтированную на корпусе (рис. 2.2а). Блокирующая муфта венцов вращающегося эпицикла первой ступени 12 опирается на воспринимающие весовую нагрузку катки (рис. 2.2.б).



*Рис. 2.1. Кинематическая схема двухступенчатого планетарного редуктора. 1 – вал, соединяющий 1-ю и 2-ю ступени; 2 – вал, передающий крутящий момент с дисковой муфты к центру солнечной шестерни; 3 – дисковая муфта; 4 – фланец выходного вала; 5 – водило 2-й ступени; 6 – солнечная шестерня 2-й ступени; 7 – сателлит; 8 – эпицикл 2-й ступени; 9 – блокирующая муфта 2-й ступени; 10 – соединительная муфта 2-й ступени; 11 – соединительная муфта 1-й ступени; 12 – блокирующая муфта 1-й ступени; 13 – эпицикл 1-й ступени; 14 – сателлит; 15 – водило; 16 – солнечная шестерня 1-й ступени; 17 – приводной вал; 18 – дисковая муфта*

Зазоры в зубчатых соединениях блокирующих муфт обеих ступеней и между катками первой ступени выбраны таким образом, чтобы исключить двухпрофильный контакт в зацеплениях венцов эписцикла с сателлитами.



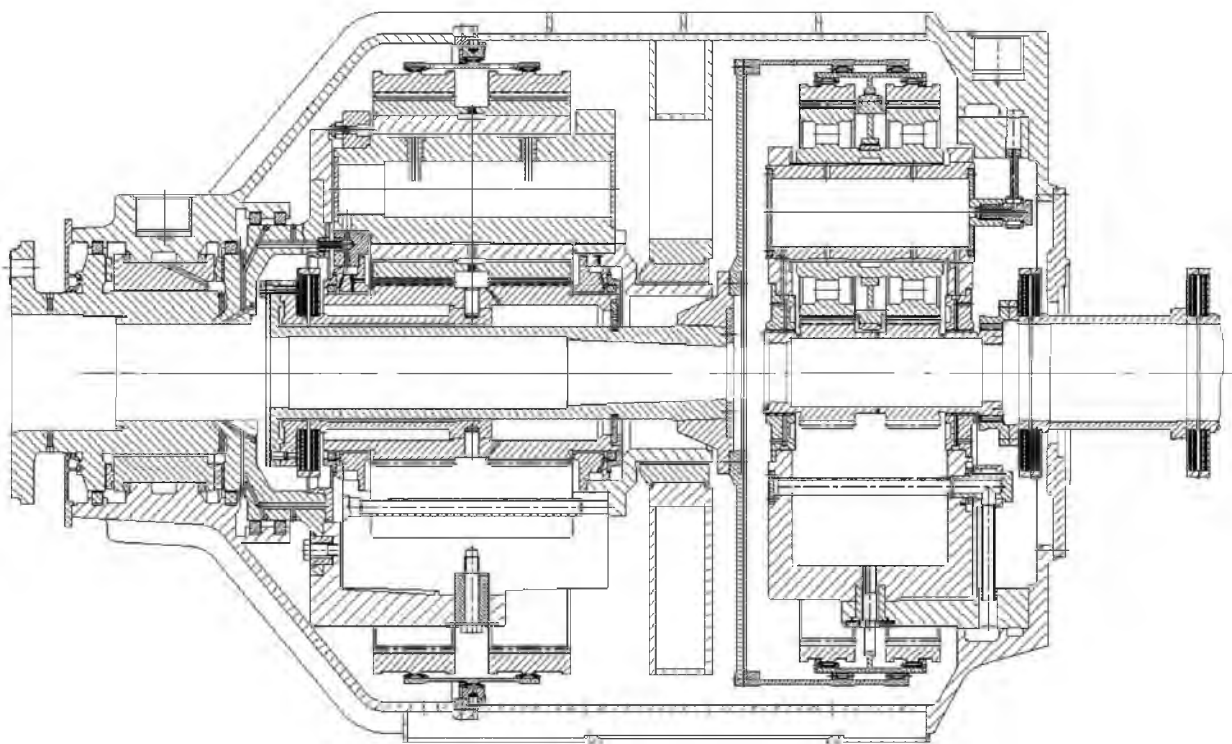
**Рис. 2.2. Конструктивная схема блокирующей муфты 2-й ступени (а) и 1-й ступени (б)**

Солнечные шестерни обеих ступеней установлены в подшипники скольжения с зазором, не препятствующим плаванию, но исключающим двухпрофильный контакт. Для обеспечения симметричного нагружения полушевронов второй ступени, подвод мощности к солнечной шестерне осуществляется в центральной ее части через шлицевой шарнир с помощью вала 2.

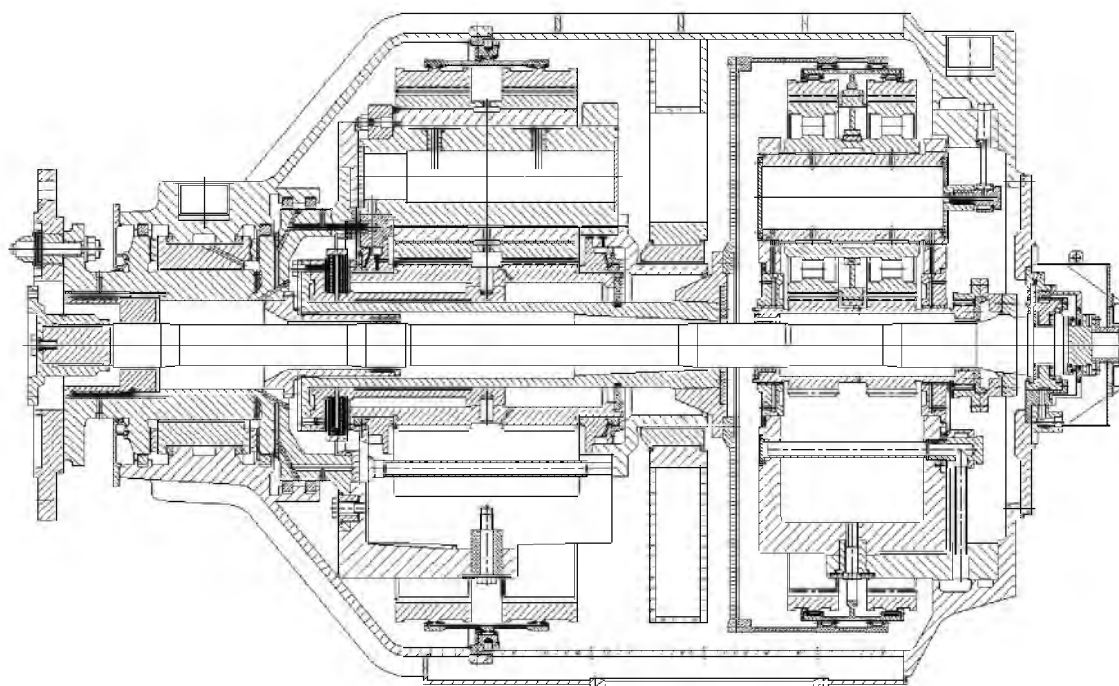
Соединительная муфта 1-й ступени выполнена в виде податливого барабана и гибкого диска (рис. 2.3), промежуточный вал, соединенный с этим диском и дисковой муфтой 2-й ступени, обеспечивает компенсацию остаточной угловой и радиальной расцентровок элементов 1-й и 2-й ступеней.

Для проведения стендовых испытаний в конструкцию серийного редуктора добавляется центральный вал, позволяющий подводить мощность к высокооборотной ступени не только с носовой, но и с кормовой стороны (рис. 2.4). Наличие экспериментальных данных по стендовым испытаниям обусловило выбор этого варианта конструкции

для апробации методики исследования динамики планетарных редукторов большой мощности.



*Рис. 2.3. Эскизный чертеж двухступенчатого планетарного редуктора*



*Рис. 2.4. Стендовый вариант исполнения редуктора*



## **2.2. Разработка расчетной модели корпуса редуктора и его собственные колебания**

Одним из важнейших элементов модели редуктора является корпус. У большинства механизмов корпус играет роль несущей конструкции для основных функциональных узлов. Его внешняя конфигурация, как правило, решает задачи теплообмена, аэро- или гидродинамики, промышленной эстетики. Основными требованиями, предъявляемыми к корпусным конструкциям, обычно являются герметичность, прочность, жесткость, обеспечение необходимых звуко- и виброизолирующих свойств, технологичность, ограничения по весу.

Соблюдение требований по герметичности и технологичности изготовления и сборки в большинстве случаев удается обеспечить уже на этапе проектирования корпусных конструкций путем ограничения числа входящих в них деталей и минимизации сопрягаемых поверхностей последних.

Для снижения веса и экономии материала при сохранении требуемой жесткости, а также для повышения теплоотдачи корпусные конструкции обычно выполняют тонкостенными с оребрением. Это значительно усложняет их геометрию.

В инженерной практике прочностные расчеты подобных конструкций, как правило, проводятся с привлечением методов строительной механики и сопротивления материалов либо по эмпирическим формулам, полученным на основании экспериментальных данных.

Поскольку экспериментальные исследования весьма дорогостоящи, испытания, необходимые для поиска оптимальной для каждого конкретного случая конструкции, обычно не проводятся. Используются « типовые » варианты конструкции, адаптируемые под « нетиповые » требования с использованием различных поправочных коэффициентов (как правило, также эмпирических).

В подавляющем большинстве случаев для реализации предъявляемых к конструкциям требований таких расчетов вполне достаточно. Однако, учитывая достаточно жесткие требования, предъявляемые к корабельным силовым установкам, в первую очередь по шуму и вибрациям, излучаемым механизмами в окружающую среду, проблема придания корпусным деталям оптимальных динамических характеристик становится весьма актуальной.

Традиционно для снижения передачи вибрации от механизма на фундаментные или несущие конструкции его корпус устанавливаются на специальные виброизолирующие опоры. С целью повышения эффективности виброизоляции места крепления этих опор к корпусу стремятся выбирать в узловых точках последнего. Для этого необходимо знать динамические характеристики корпусных конструкций, в первую очередь формы их собственных колебаний и частоты возможных резонансных режимов работы.

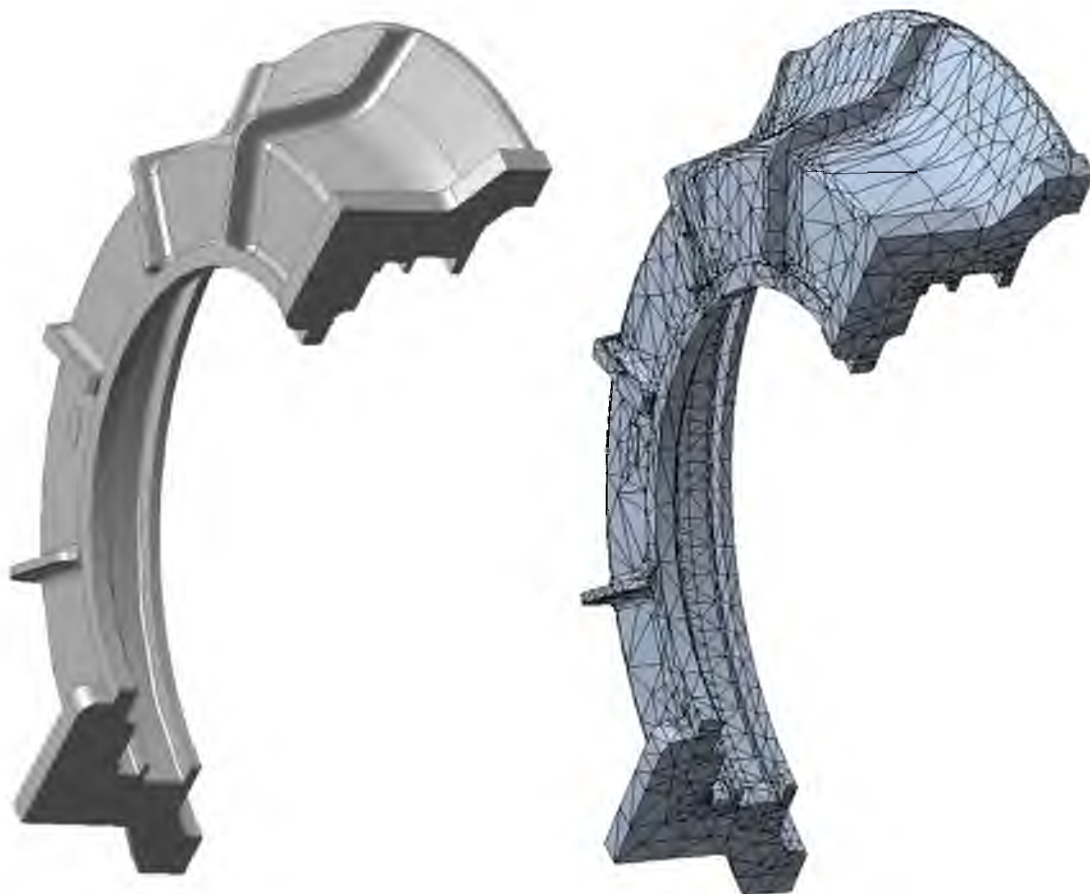
Знание динамических характеристик корпусных деталей необходимо и при выборе мест передачи на них возмущающих сил, генерируемых в процессе работы механизма. Например, при наличии в механизме нескольких источников вибрации, действующих с одинаковой частотой, существует возможность полной или частичной взаимной компенсации на корпусных конструкциях создаваемых этими источниками колебаний.

Действенным средством уменьшения воздушного шума, излучаемого механизмом, является отстройка собственных частот его корпусных конструкций (главные источники звуковых волн) от частот внутренних возмущающих сил.

Существенно скорректировать динамические характеристики корпусных конструкций можно, например, за счет изменения конфигурации и расположения ребер жесткости. Для этого уже на стадии проектирования подобных деталей необходим корректный расчет этих

характеристик, что также невозможно без наличия у конструктора эффективных методик.

МКЭ в сочетании с современными вычислительными мощностями в состоянии решить все указанные проблемы, однако в нашем случае корпус редуктора это только одна из многих составляющих исследуемой конструкции. Поэтому опять встает вопрос о рациональном использовании вычислительных ресурсов.



***Рис. 2.5. Трехмерная и конечноэлементная модели нижней части носовой крышки редуктора***

Тестовое моделирование одной из носовых крышек редуктора (рис. 2.5) позволило оценить требуемые ресурсы. Так, при построении самой «грубой» конечноэлементной сетки в автоматическом режиме с использованием объемных элементов было сгенерировано 11382 КЭ и 22196 узлов, что соответствует примерно 67000 степеней свободы. Для расчета собственных частот только этого фрагмента корпуса тре-

буется как минимум 24 мБ оперативной памяти, и это в режиме с использованием дополнительной дисковой памяти, когда матрица системы помещается в оперативную память и обрабатывается по частям. В режиме «in-core», когда в оперативную память загружается вся матрица, требуется как минимум 208 мБ (рекомендуемое значение – 220 мБ). Последний режим позволяет не использовать для расчетов дисковую память и существенно сократить время счета, что в ряде случаев может оказаться одним из определяющих параметров расчета.

Учитывая, что данный фрагмент представляет собой примерно 1/8-ю часть корпуса, можно оценить требуемые для расчета всего корпуса вычислительные ресурсы. Сделанная оценка позволила констатировать неприемлемость данного подхода, а именно использование конструкторской трехмерной модели и разбивку ее на объемные элементы. Как правило, на этапе проектирования такая модель создается конструкторами, причем с проработкой достаточно мелких элементов, и использование уже созданной модели для прочностных и динамических расчетов весьма соблазнительно.

С целью упрощения математической модели целесообразно исключить моделирование таких мелких и незначительно влияющих на динамику системы элементов, как отверстия для подвода и отвода масла, проточки под подшипники и уплотнения и пр. На рис. 2.5 хорошо видно сгущение КЭ-сетки в зонах с этими элементами. Вместе с тем исключение из геометрической модели мелких деталей ставит под сомнение целесообразность использования объемных элементов.

Для рассматриваемого в данной работе в качестве примера редуктора, например, корпус лучше моделировать оболочечными элементами 1-го или 2-го порядка, учитывающими изгибную и «мембранную» жесткости (shell63 и shell281 соответственно). В местах крепления подшипников можно взять осредненное значение толщины оболочки, учитывающее исключенные из модели проточки.

Используемый в работе ПК ANSYS предоставляет пользователю возможность разработки собственных «сценариев» расчетов. Делается это с помощью языка параметрического моделирования APDL (Ansys Parametric Language). Это мощный инструмент для проведения многовариантных расчетов и оперативной обработки результатов. С его помощью можно строить параметрические расчетные модели.

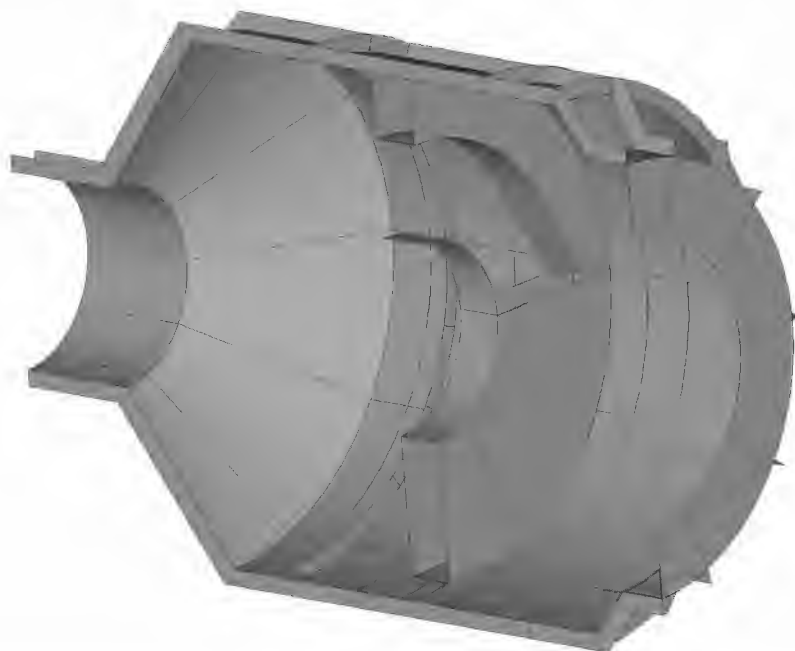
Так, при моделировании корпуса редуктора в качестве параметров можно выбрать основные геометрические размеры (толщина стенок редуктора, расположение и толщина ребер жесткости, толщина фланцев и внутренних перегородок). Написанная на APDL программа позволяет по заданным параметрам построить набор поверхностей (рис. 2.6, 2.7), которые затем «склеиваются» и в автоматическом режиме разбиваются на конечные элементы оболочечного типа (рис. 2.8, 2.9).

Построенная таким образом модель корпуса редуктора содержит 3772 КЭ, 3681 узлов, что соответствует  $3681 \cdot 6 = 22086$  степеням свободы и требует 56 мБ ОЗУ для расчета собственных колебаний в режиме «in-core».

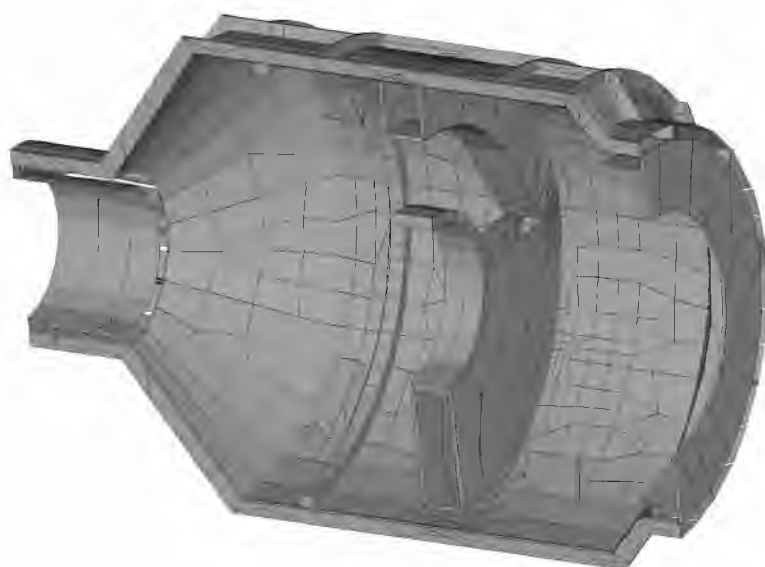
Несмотря на наличие диагностического предупреждения о том, что значения геометрических параметров у 487 из 3772 конечных элементов близки к критическим, построенная модель признана неплохим решением. Модель с измельченной (не генерирующей диагностических сообщений) конечноэлементной сеткой содержит 14500 КЭ (86670 степеней свободы) и требует 253 мБ ОЗУ, а результаты расчетов собственных частот в диапазоне до 500 Гц отличаются не более чем на 3%.



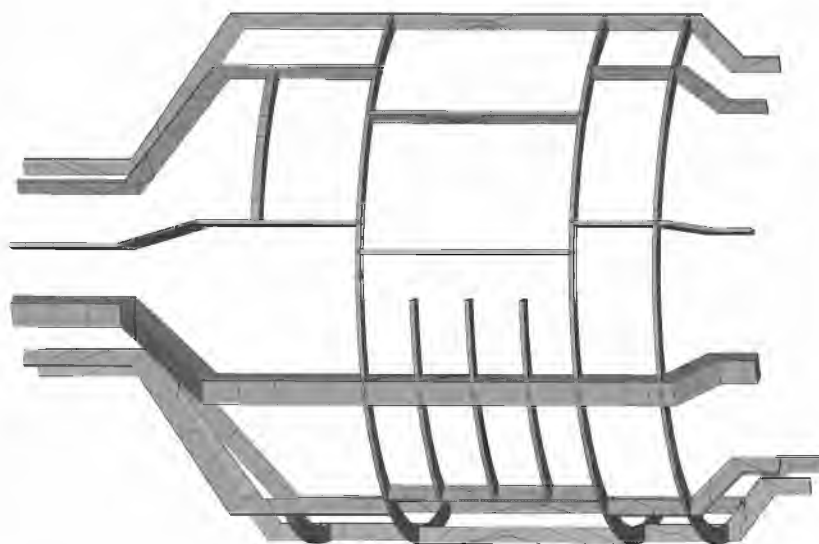
*Рис. 2.6. Модель корпуса редуктора, построенная с помощью набора поверхностей*



*Рис. 2.7. Внутренние переборки корпуса редуктора*



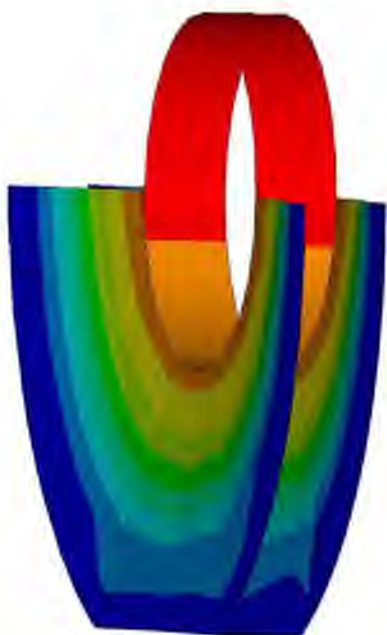
*Рис. 2.8. КЭ-модель корпуса и внутренних переборок*



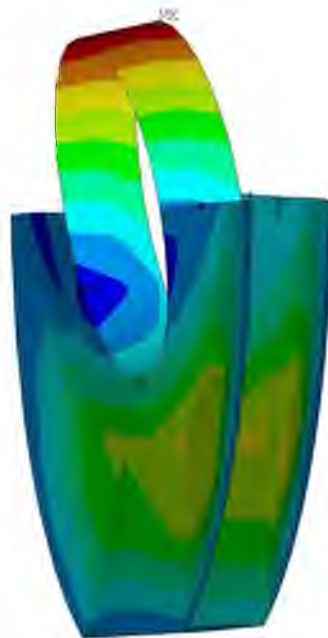
*Рис. 2.9. КЭ-модель ребер жесткости корпуса*

При исследовании собственных колебаний корпуса, систему подвеса можно моделировать упрощенно. Например, «подвесить» корпус на тросах за места крепления вертикальных подвесов.

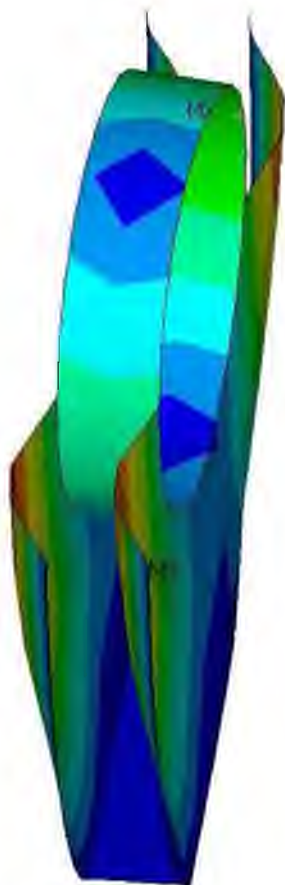
Результаты расчетов некоторых собственных колебаний построенной модели корпуса типового редуктора приведены на рис. 2.10 – 2.18. Первые 6 рассчитанных форм соответствуют движению корпуса как жесткого тела на упругом подвесе и интереса не представляют.



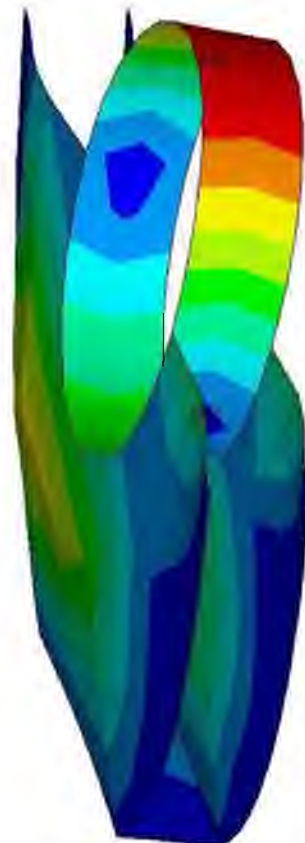
$f_7$  34 Гц



$f_8$  150 Гц



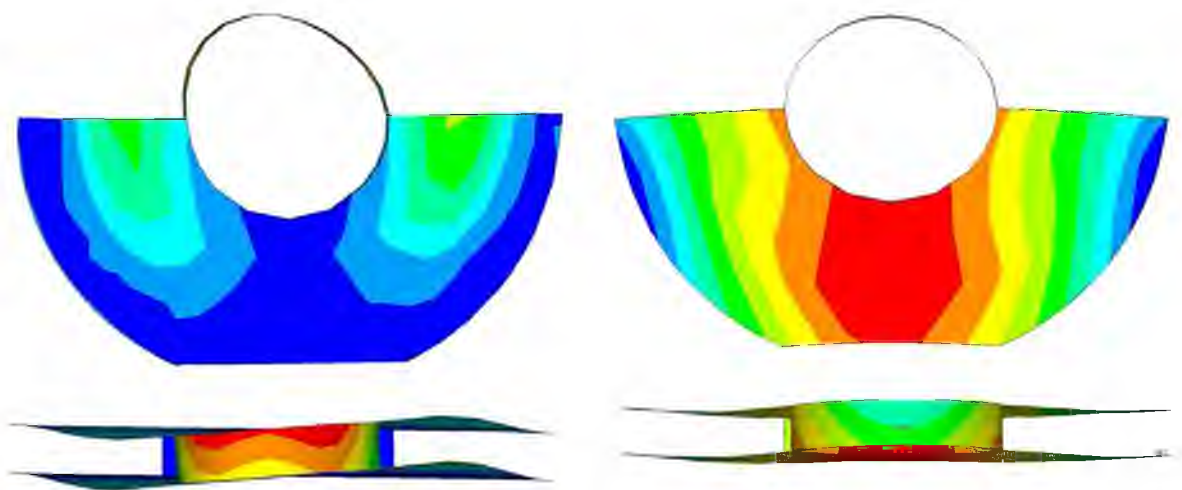
$f_9$  157 Гц



$f_{10}$  159 Гц

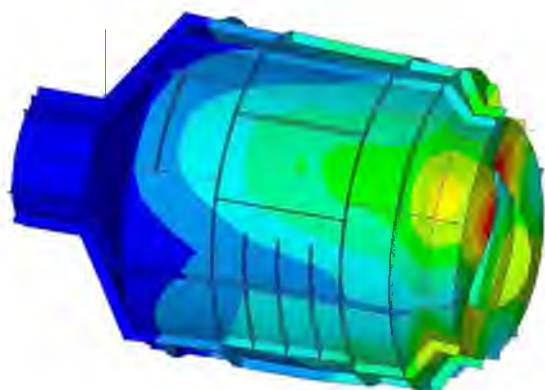
***Рис. 2.10. 7-я – 10-я формы собственных колебаний редуктора  
(показана только внутренняя перегородки корпуса)***



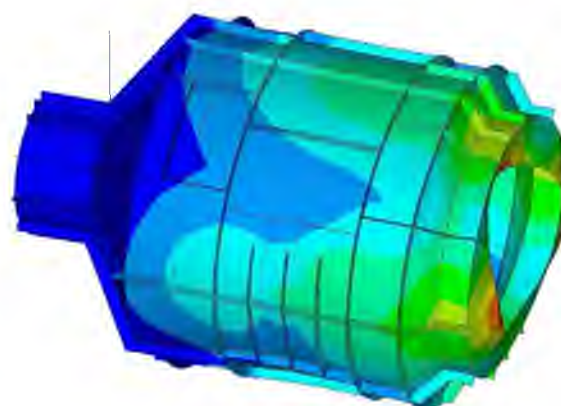


$f_{11}$  165,2 Гц

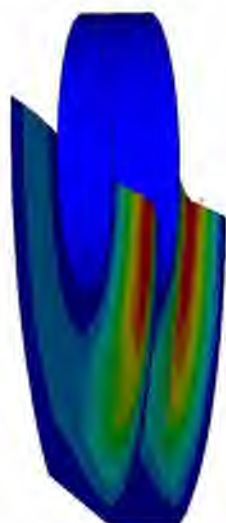
$f_{12}$  166 Гц



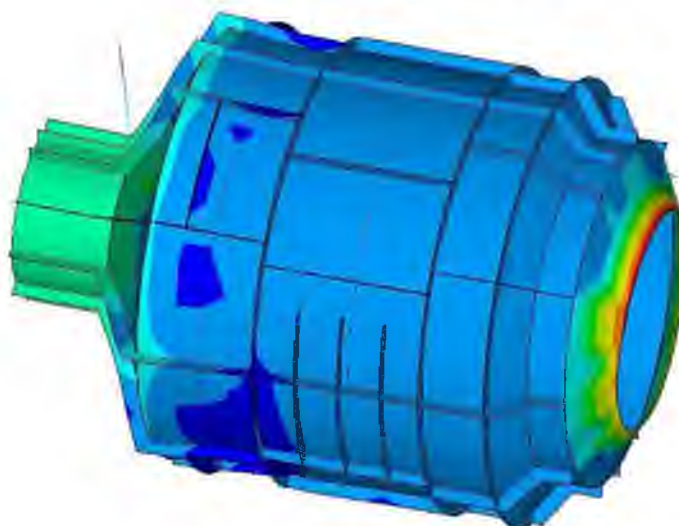
$f_{13}$  170 Гц



$f_{14}$  173 Гц

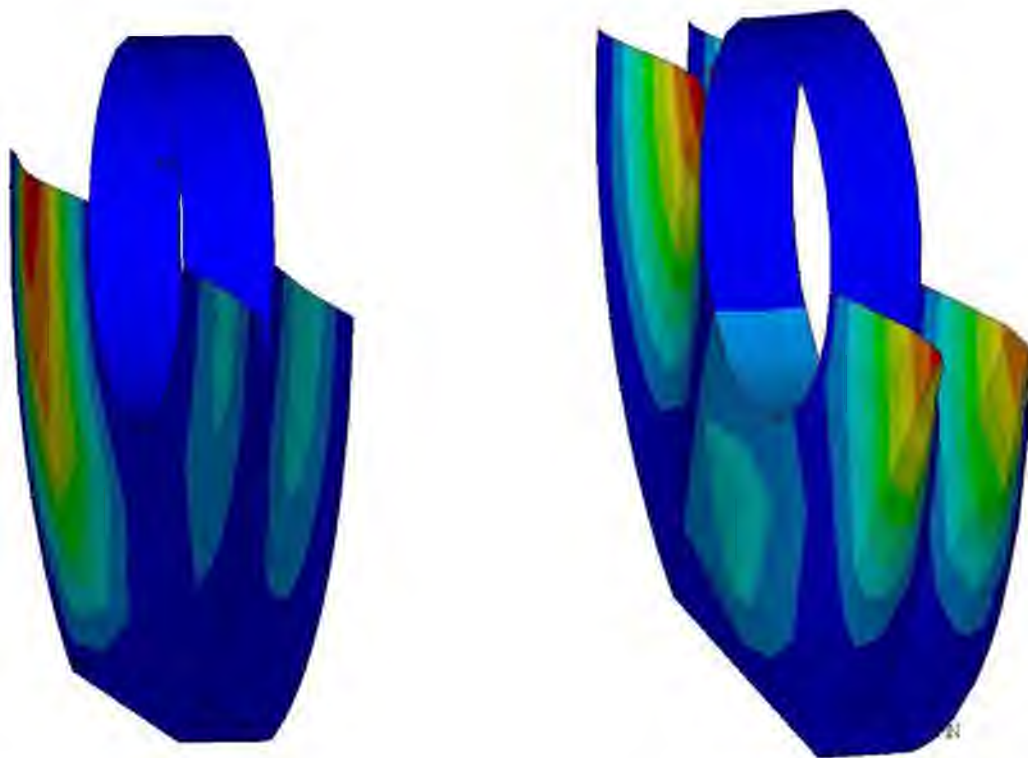


$f_{15}$  170 Гц



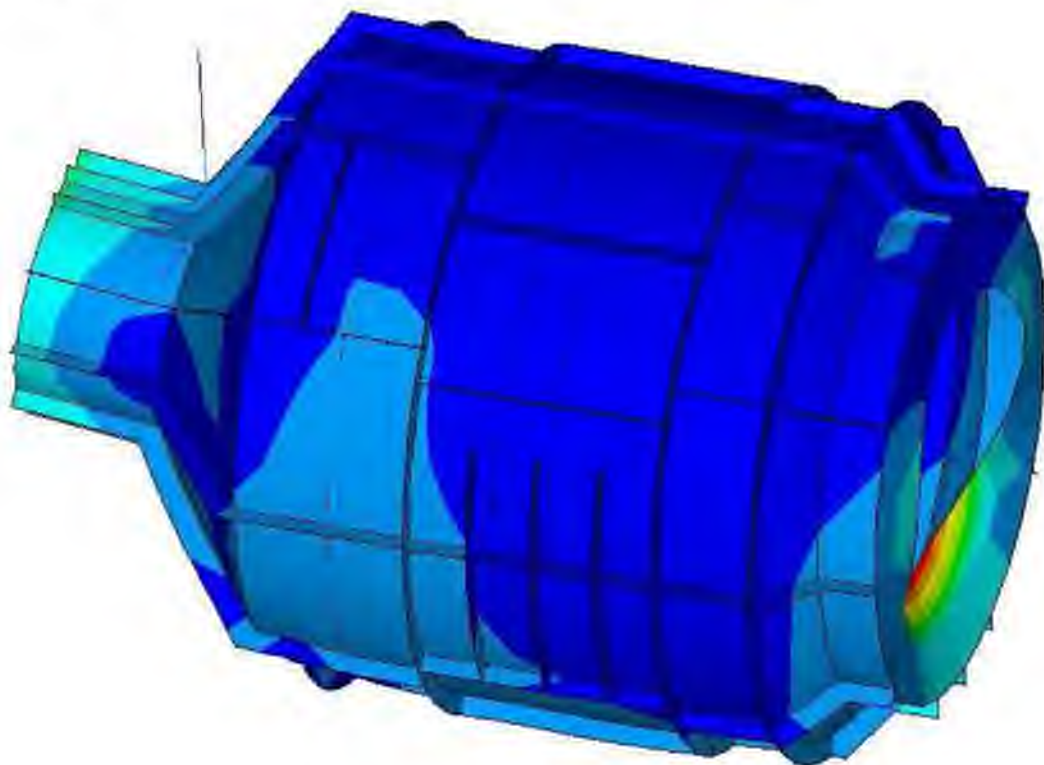
$f_{16}$  173 Гц

*Рис. 2.11. 11-я – 16-я формы собственных колебаний редуктора*



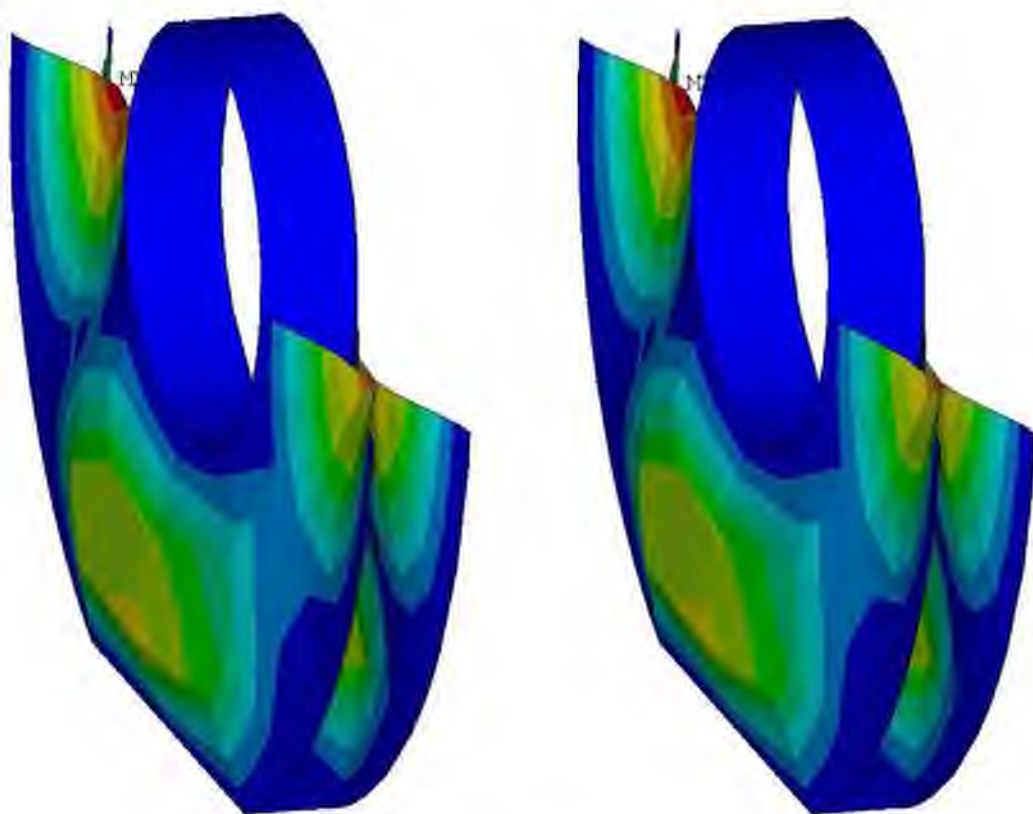
$f_{17}$  184 Гц

$f_{18}$  195 Гц



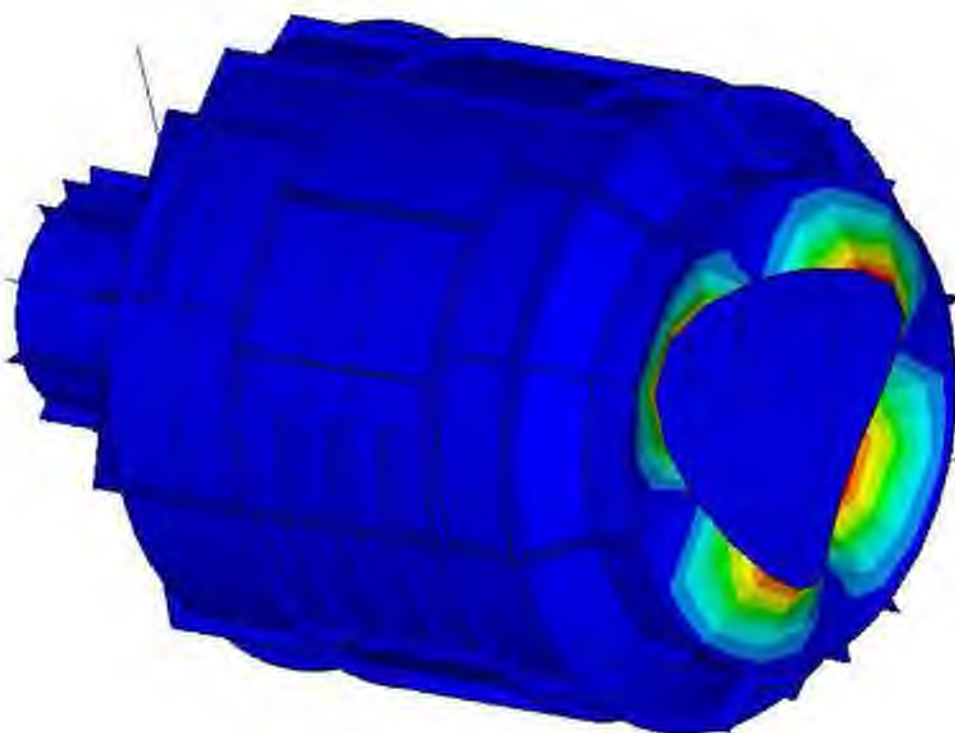
$f_{19}$  201 Гц

*Рис. 2.12. 17-я – 19-я формы собственных колебаний редуктора*



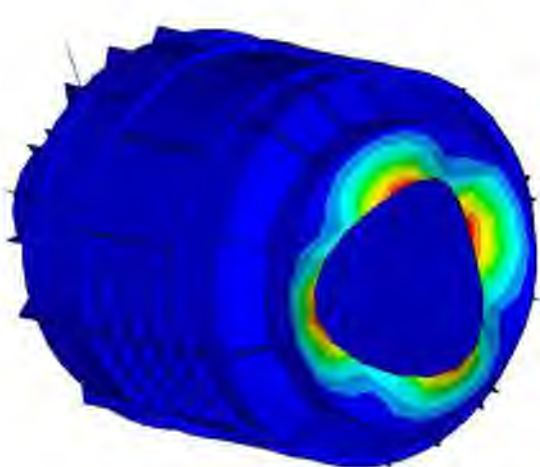
$f_{20}$  203 Гц

$f_{21}$  204 Гц

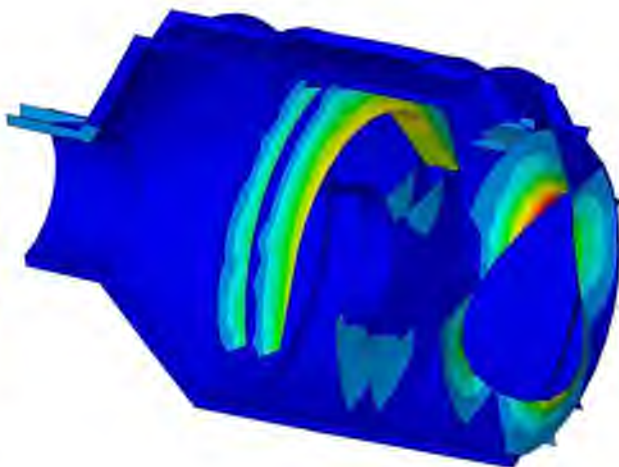


$f_{22}$  207 Гц

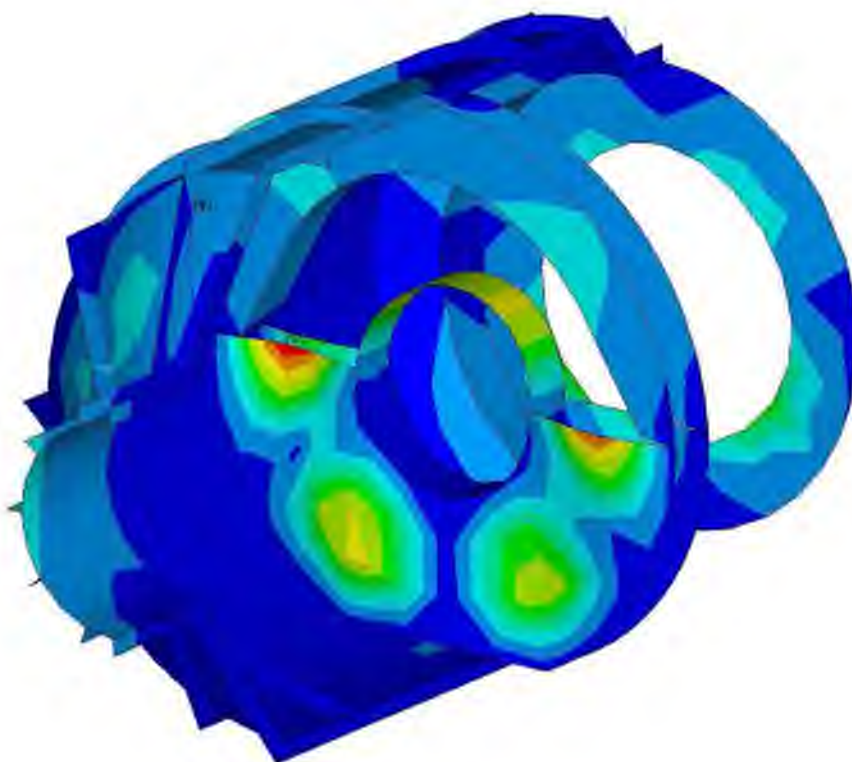
*Рис. 2.13. 20-я – 22-я формы собственных колебаний редуктора*



$f_{23}$  209 Гц

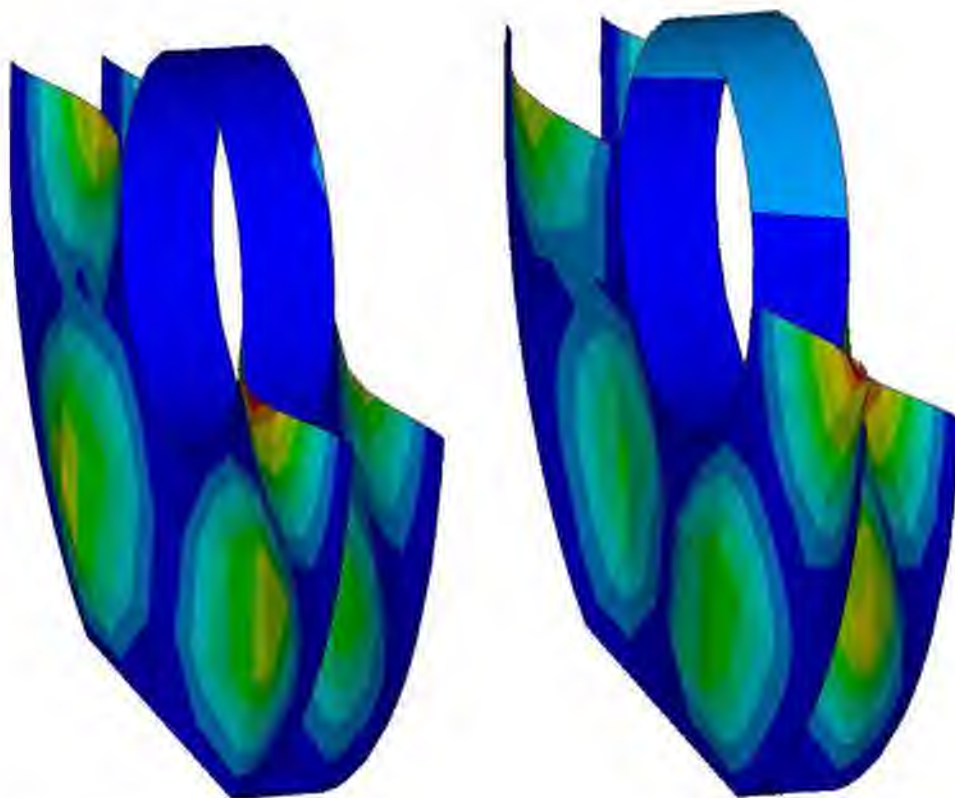


$f_{24}$  212 Гц



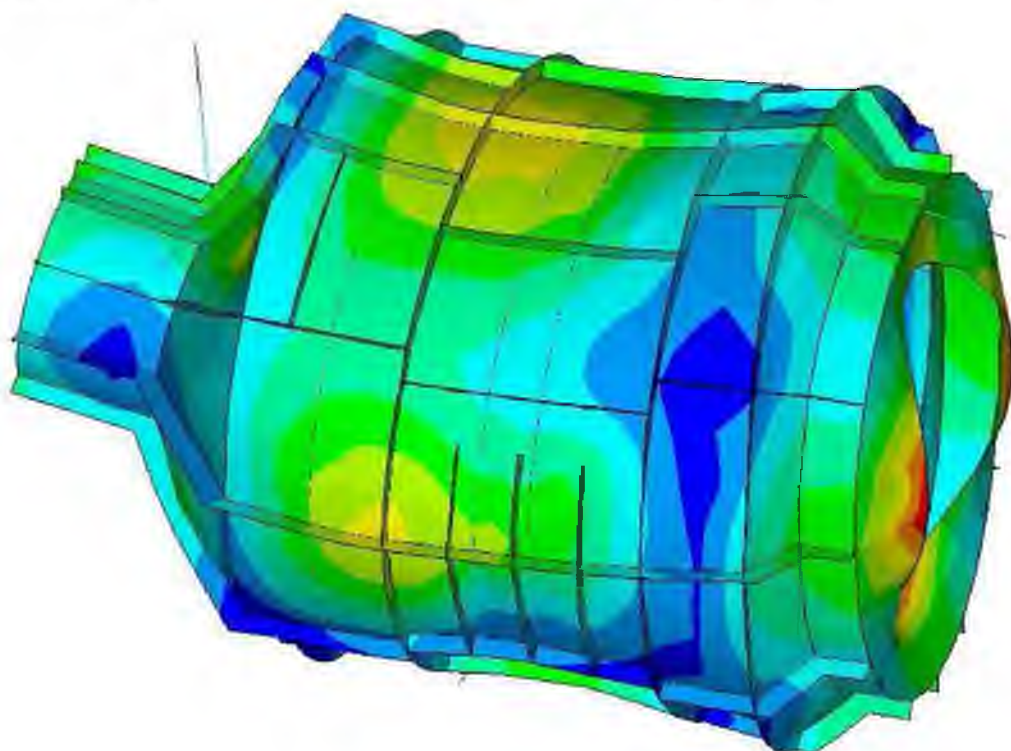
$f_{25}$  215 Гц

*Рис. 2.14. 23-я – 25-я формы собственных колебаний редуктора*



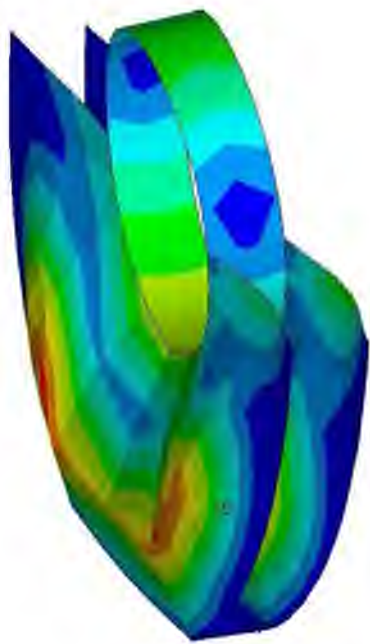
$f_{26}$  216 Гц

$f_{27}$  217 Гц

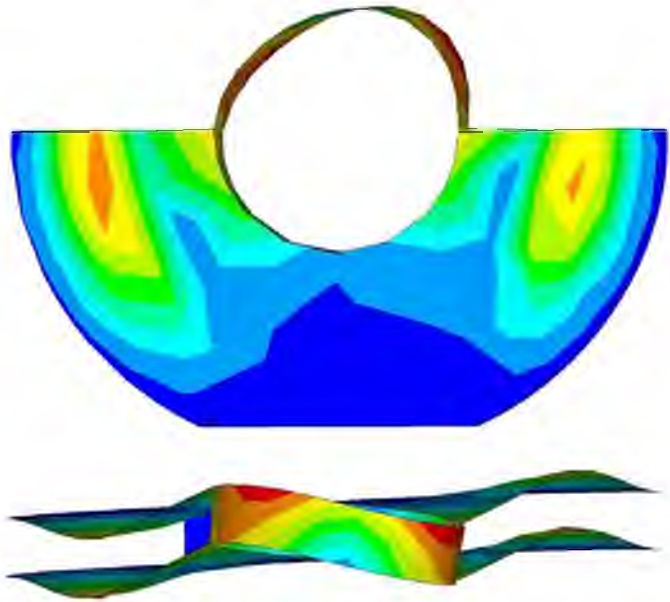


$f_{28}$  224 Гц

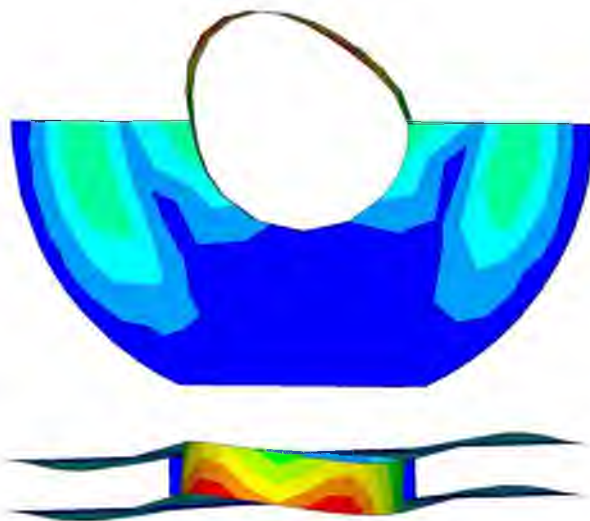
*Рис. 2.15. 26-я – 28-я формы собственных колебаний редуктора*



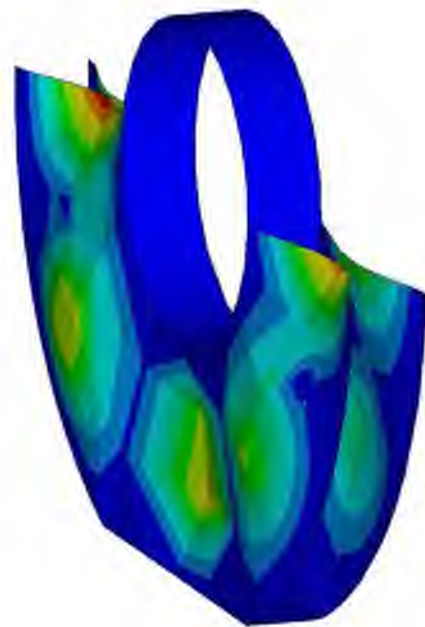
$f_{29}$  235 Гц



$f_{30}$  242 Гц

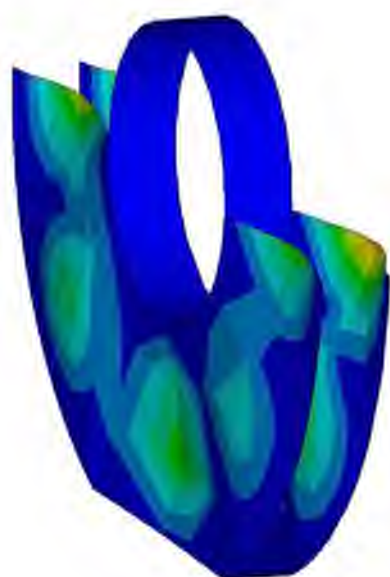


$f_{31}$  246 Гц

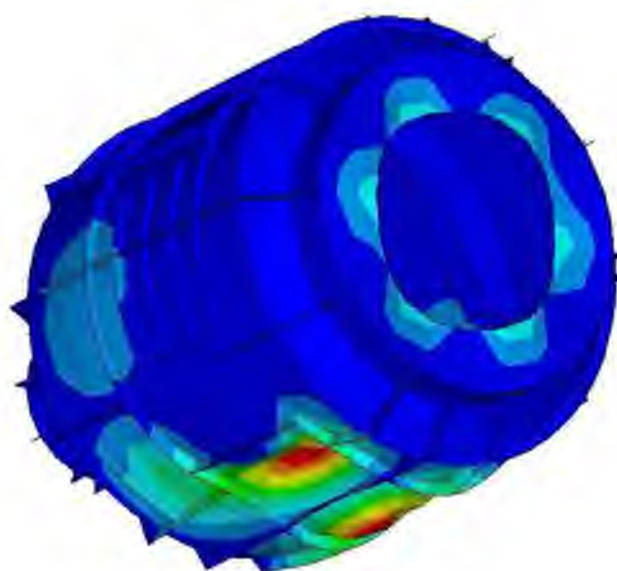


$f_{32}$  255 Гц

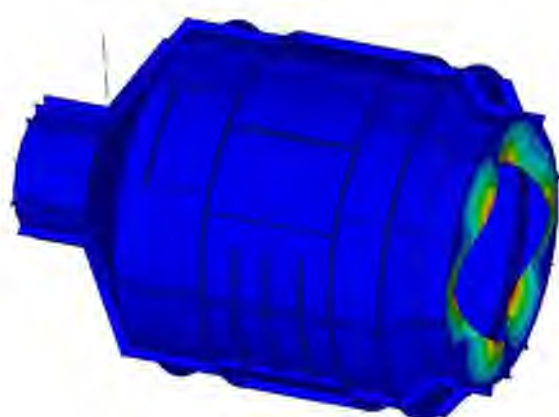
*Рис. 2.16. 29-я – 32-я формы собственных колебаний редуктора*



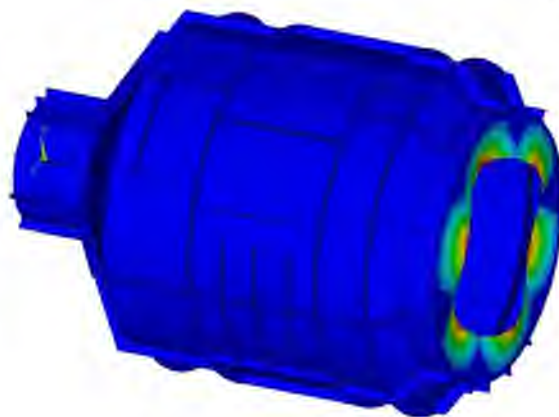
$f_{33}$  259 Гц



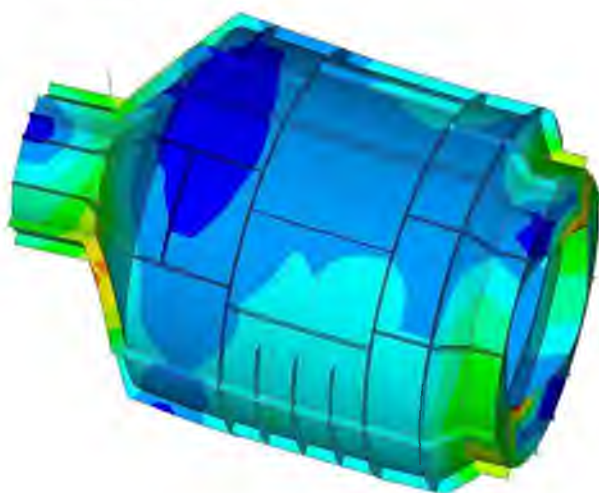
$f_{34}$  264 Гц



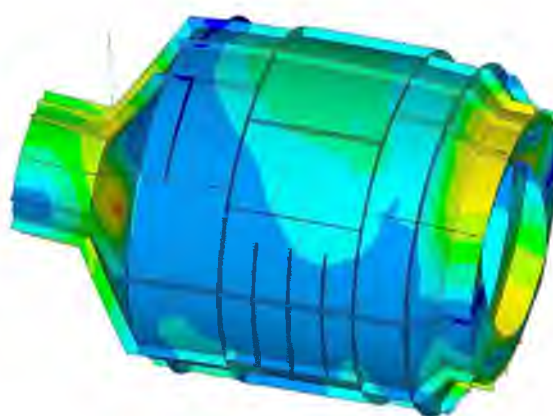
$f_{35}$  267 Гц



$f_{36}$  269 Гц

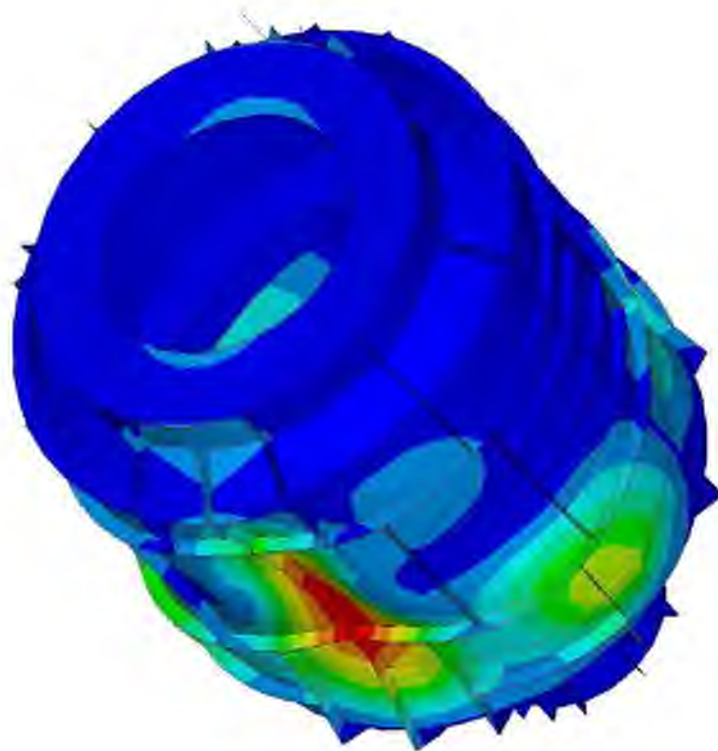


$f_{37}$  277 Гц



$f_{38}$  278 Гц

*Рис. 6.17. 33-я – 38-я формы собственных колебаний редуктора*



$f_{39}$  289 Гц

***Рис. 2.18. 39-я форма собственных колебаний редуктора***

Из представленных форм колебаний интерес представляют низкочастотные формы (до 170 Гц) – это изгибные колебания нижней части внутренней переборки корпуса, способные взаимодействовать с колебаниями кинематической части редуктора ( $f_7 - f_{12}$ ).

Мембранные колебания  $f_{15}$   $f_{17}$   $f_{18}$   $f_{20}$   $f_{21}$   $f_{26}$   $f_{27}$   $f_{32}$ ,  $f_{33}$  не оказывают влияния на динамику редуктора, т.к. замыкаются на внутренней переборке. Дисковые формы колебаний носовой крышки  $f_{16}$ ,  $f_{13}$ ,  $f_{14}$ ,  $f_{22}$ ,  $f_{23}$ ,  $f_{35}$ ,  $f_{36}$  не вполне корректны из-за отсутствия на упрощенной модели ребер жесткости. Кроме того, эти формы не представляют интерес, поскольку не оказывают существенного влияния на динамику редуктора в связи с отсутствием сил, возбуждающих эти колебания.

Спектр собственных колебаний на частотах свыше 150 Гц настолько густой, что эти формы колебаний имеет смысл рассматривать только в контексте взаимодействия с кинематической частью при исследовании вибрационных характеристик всего редуктора.



Анализ форм собственных колебаний корпуса позволяет сделать следующие выводы:

1. Отсутствие форм собственных колебаний с пучностями в местах крепления корпуса в исследуемом диапазоне частот подтверждает корректность выбора мест крепления.
2. В модели нет элементов, имитирующих приливы на корпусе в местах крепления его вертикальных подвесов. Однако отсутствие форм собственных колебаний с пучностями в этих местах позволяет считать такое допущение вполне корректным для исследования динамики редуктора. Исключение составляет форма №28, поэтому при наличии резонансных пиков на частоте 224 Гц в АЧХ вынужденных колебаний модель необходимо будет скорректировать, дополнив соответствующими элементами.

### **2.3 Математическое моделирование кинематической части редуктора**

Конструкция двухступенчатого планетарного редуктора с плавающей подвеской центральных колес и массой различных уравнивающих устройств (рис. 2.1) чрезвычайно сложна с точки зрения конечноэлементного моделирования. Предъявляемые требования к исследованию виброактивности редуктора предполагают возможность его моделирования в составе всей силовой судовой установки или, как это сделано в данной работе, в составе испытательного стенда. Следовательно, необходимо искать пути упрощения модели.

Основным источником вибровозбуждения, как показала практика, в подобных системах является процесс пересопряжения зубьев. Для получения полной картины динамики пересопряжения зубьев хотелось бы воспользоваться предлагаемым ПК ANSYS «transient»-анализом. Это расчет переходных процессов путем численного интегрирования системы уравнений, полученных на основе конечноэле-

ментной модели, причем на каждом шаге необходимо решать задачу контактного взаимодействия зубьев. Анализ требующихся для этого вычислительных ресурсов не оставляет автору шанса на проведение подобных численных исследований в ближайшем будущем. Поэтому для исследования динамических характеристик используется расчет отклика системы на гармоническое воздействие – «harmonic response analysis».

### **2.3.1 Зубчатые зацепления и соединения**

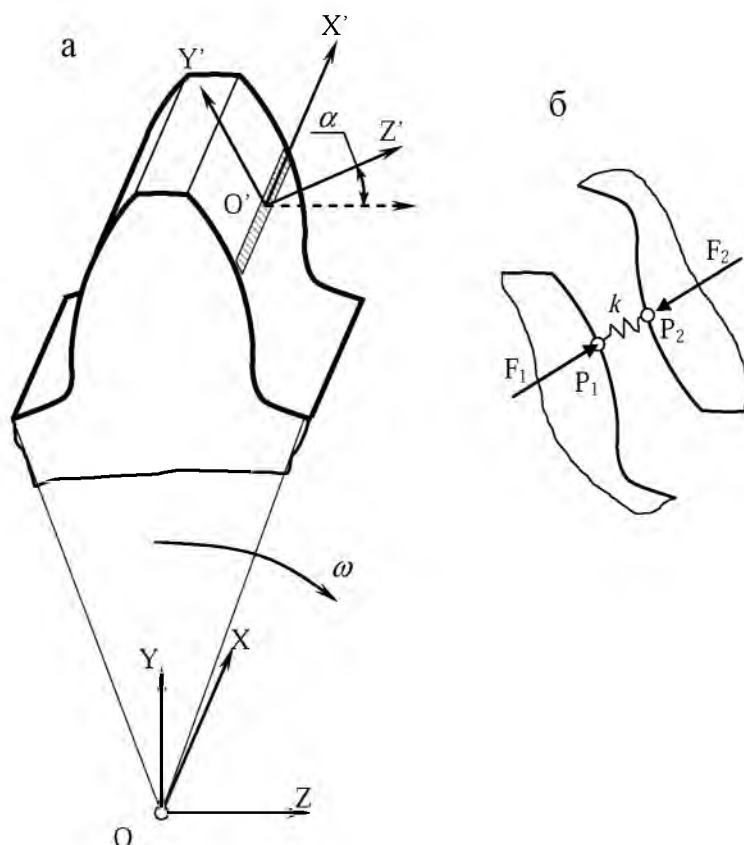
В основу математической модели для исследования вынужденных колебаний редуктора положен «комбинированный» подход [139]: часть модели строится классическим способом – конечноэлементная модель получается на базе геометрической модели с применением технологии «сверху вниз» или «снизу вверх», а часть – путем задания свойств моделируемых объектов на основе проведенных ранее аналитических или экспериментальных исследований.

Главная сложность заключается в моделировании процесса пересопряжения зубьев. В основу моделирования этого процесса легли аналитические и экспериментальные исследования, проведенные в ИМАШ РАН [110, 120] по заказу Калужского турбинного завода.

Проведенные исследования позволили смоделировать контактное взаимодействие в зубчатом зацеплении набором упругих элементов – пружин, расположенных на линии контакта зубьев. Суммарная жесткость и распределение этой жесткости по линии контакта определяется путем решения статической задачи контактного взаимодействия.

В динамике за счет того, что число контактирующих зубьев периодически изменяется в соответствии с коэффициентом перекрытия, жесткость зацепления также изменяется и зависит от фазы зацепления зубьев. Ввести в динамический расчет периодически изменяющиеся

жесткости достаточно тяжело. Поэтому контактное взаимодействие зубьев моделируется упругими элементами (пружинами) постоянной жесткости, к обоим концам которых прикладываются противоположно направленные (перпендикулярно контактной поверхности), изменяющиеся по гармоническому закону с частотой пересопряжения зубьев силы (рис.2.19б).



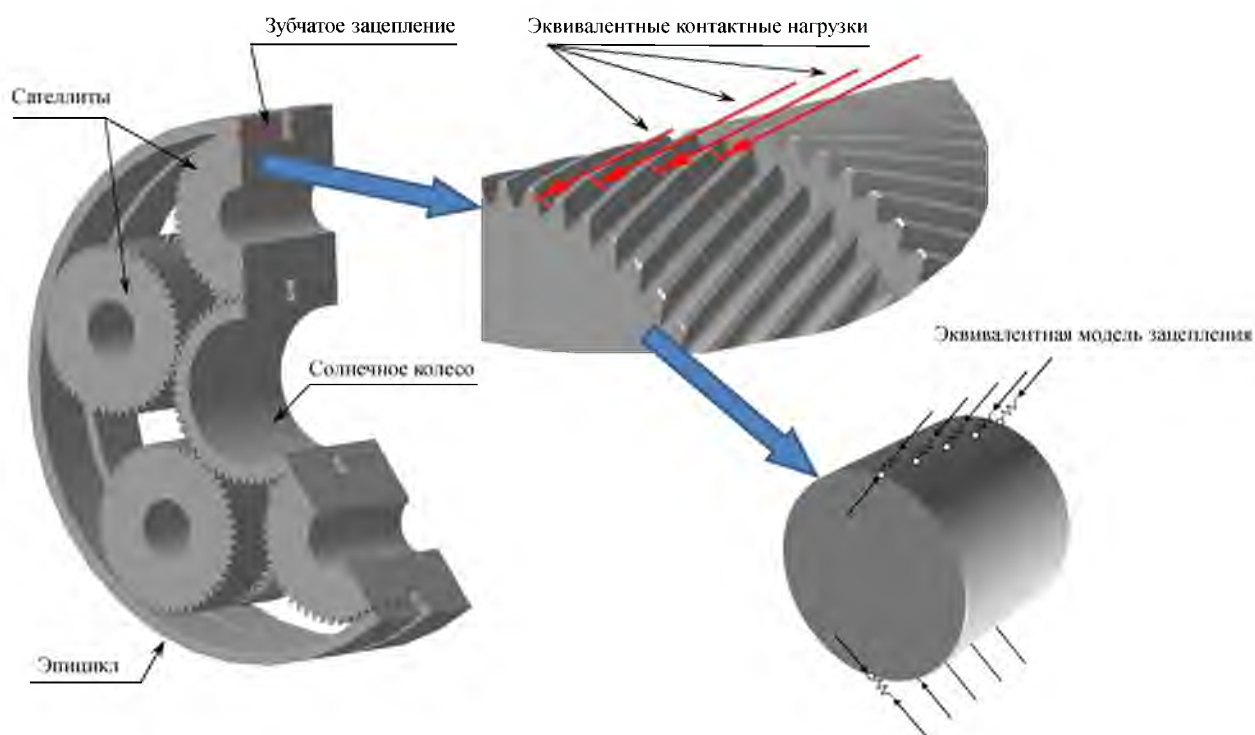
**Рис. 2.19. Моделирование зубчатого зацепления: а – локальная и глобальная системы координат; б – упругий элемент и пара сил, имитирующих переменную жесткость зацепления**

Таким образом, мы приходим к задаче определения отклика механической системы на гармоническое силовое воздействие.

Моделирование зубчатого зацепления с помощью безмассовых пружин позволяет существенно упростить геометрию шестерен и зубчатых колес, используя в качестве последних деформируемые диски и цилиндры с диаметрами, равными диаметрам делительных окружностей без моделирования отдельных зубьев. Введение нескольких таких

пружин на линии соприкосновения моделируемых колес позволяет воспроизвести распределение контактной нагрузки по ширине зубчатого колеса (шестерни).

В исследуемом редукторе обе ступени выполнены с использованием шевронного зацепления. С учетом коэффициента перекрытия на каждом полушевроне сателлита контактируют 4 или 5 пар зубьев со стороны солнечной шестерни и столько же со стороны эпицикла. Каждое такое зацепление моделируется пятью фиктивными пружинами, равномерно расположенными на линии контакта (рис. 2.20).

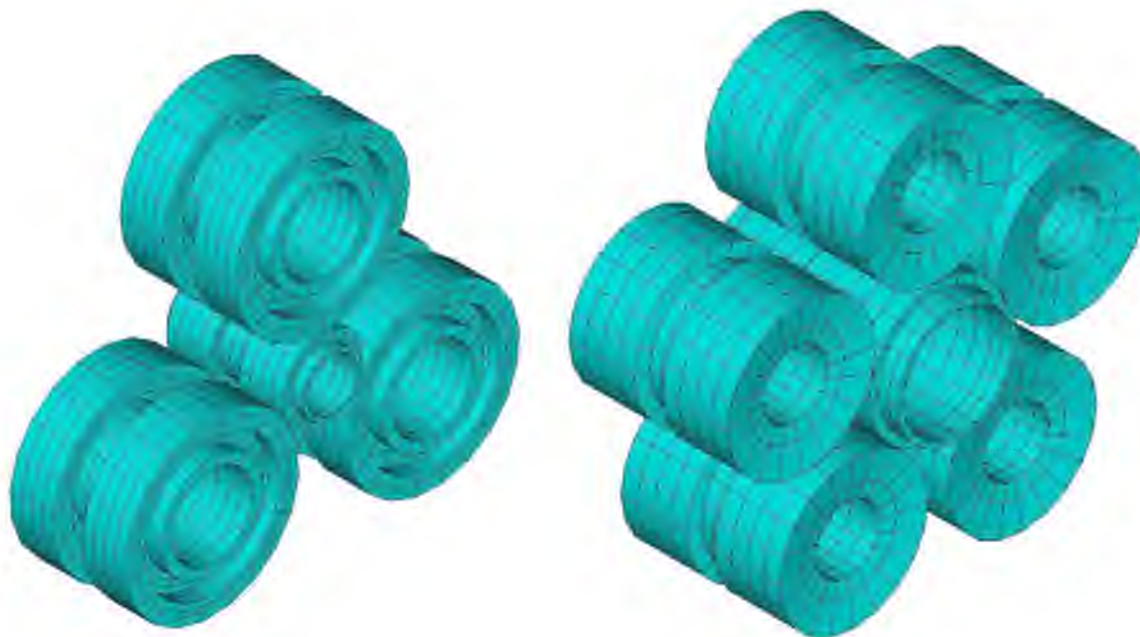


**Рис. 2.20. Замена контактирующих пар упругими элементами**

Конечноэлементные модели солнечных шестерней и сателлитов обеих ступеней построены на базе трехмерных объемных элементов по технологии «снизу вверх», т.е. без предварительного 3D-моделирования. Такой подход позволяет получить регулярную конечноэлементную сетку с заданными параметрами.

Модели солнечных шестерен и сателлитов обеих ступеней построены таким образом, что на линиях контакта полушевронов сол-

нечной шестерни с сателлитами соприкасаются по 5 угловых узлов КЭ шестерни и сателлитов (рис. 2.21). Именно в этих узлах добавляются фиктивные связи – пружины.



*Рис. 2.21. Конечноэлементные модели солнечных шестерен и сателлитов 1-й и 2-й ступеней*

В идеале жесткость зубчатого зацепления равномерно распределяется на эти пять пружин, но при наличии перекосов, выявленных в результате статических расчетов, распределение жесткостных характеристик и динамических сил по пружинам может быть неравномерным.

Моделировать такие связи типовыми стержневыми элементами неудобно, поскольку концы стержня должны определять его ориентацию и не могут задаваться совпадающими в пространстве точками, однако ПК ANSYS позволяет вводить элементы, заданные непосредственно матрицами жесткости, демпфирования и масс.

Методику получения матрицы жесткости фиктивной связи-пружины, имеющей заданную жесткость в направлении нормали к

контактной поверхности, рассмотрим сначала на примере прямозубого зацепления.

Будем считать рабочим направлением вращения солнечной шестерни первой ступени против часовой стрелки, если смотреть с носовой части редуктора.

На рис. 2.19а показан фрагмент зубчатого колеса с одним зубом, привязанный к глобальной системе координат с центром в точке  $O$ , и полоса контакта при идеальном зацеплении. Поскольку основным правилом МКЭ при конструировании КЭ является обеспечение перемещения элемента как жесткого целого без изменения внутренних напряжений, то параллельный перенос системы координат в точку контакта на зубе не изменяет матрицы жесткости. Введем локальную систему координат, у которой ось  $Z$  совпадает с направлением фиктивной пружины. Такую систему координат можно получить путем поворота глобальной системы координат вокруг оси  $X$  на угол  $\alpha$ . В нашем случае  $\alpha = -20^\circ$  (стандартный профиль рейки, поворот по часовой стрелке, если смотреть с конца оси  $X$ ). В этой системе координат легко задается матрица жесткости пружины.

Обозначим матрицу преобразования координат при повороте вокруг оси  $X$  на угол  $\alpha$  –  $[A_\alpha]$ . Тогда любой вектор  $P$ , заданный в глобальной системе координат, в локальной системе будет определяться как  $\{P'\} = [A_\alpha]^{-1} \{P\}$ . Уравнение жесткости для пружины в локальной трехмерной системе координат можно записать следующим образом:

$$[K']\{\delta'\} = \{F'\} \text{ или, } [K']\{[A_\alpha]^{-1}\{\delta\}\} = \{[A_\alpha]^{-1}\{F\}\}, \text{ где}$$

$[K']$ ,  $\{F'\}$  и  $\{\delta'\}$  – матрица жесткости и векторы узловых сил и перемещений в локальной системе координат;

$\{F\}$  и  $\{\delta\}$  – те же векторы узловых сил и перемещений, заданные в глобальной системе координат.

Умножив обе части последнего выражения на  $[A_\alpha]$  слева, получим:

$$[A_\alpha][K'][A_\alpha]^{-1}\{\delta\}=\{F\};$$

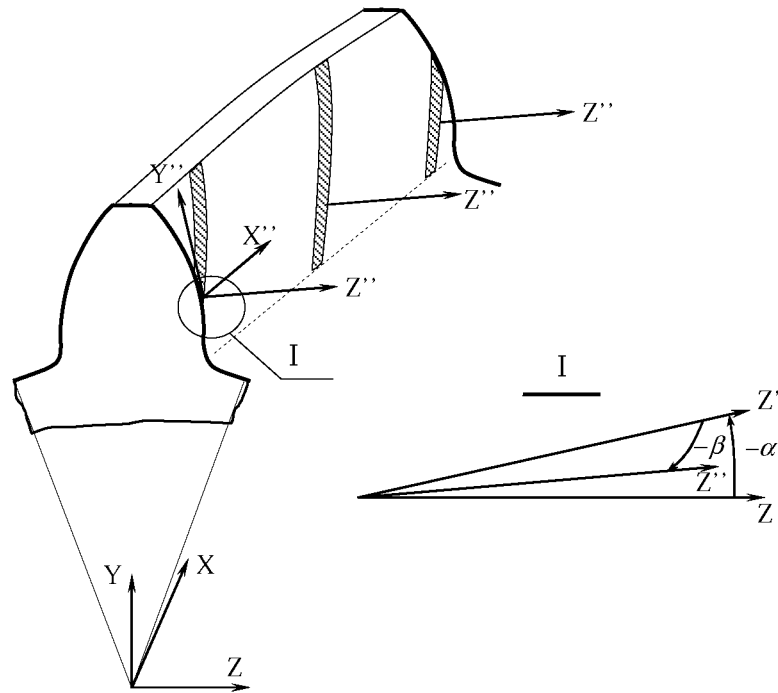
Следовательно, выражение  $[A_\alpha][K'][A_\alpha]^{-1}$  есть ни что иное, как преобразованная в глобальную систему координат матрица жесткости пружины, имитирующей прямозубое зацепление солнечной шестерни с первым (верхним) сателлитом. Для зацепления со вторым сателлитом, получающимся при повороте первого вокруг оси X, проходящей через солнечную шестерню на угол  $120^\circ$  против часовой стрелки, если смотреть с конца оси X,  $\alpha=(120-20)^\circ$ , для третьего –  $\alpha=(240-20)^\circ$ . Матрица преобразования  $[A_\alpha]$  при повороте вокруг оси X на угол  $\alpha$  выглядит следующим образом:

$$[A_\alpha] \begin{bmatrix} [a_\alpha] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [a_\alpha] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [a_\alpha] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [a_\alpha] \end{bmatrix}, \text{ где } [a_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

В силу ортогональности матрицы поворота обратная матрица  $[A_\alpha]^{-1}$  получается путем транспонирования исходной, т.е.  $[A_\alpha]^{-1}=[A_\alpha]^T$ .

В случае косозубого зацепления (рис. 2.22) матрица преобразования пространства, совмещающая ось Z глобальной системы координат с направлением нормали в точке контакта (осью Z' локальной системы) получается путем двойного поворота: сначала на угол  $\alpha$  вокруг оси X, затем на угол  $\beta$  вокруг оси Y. Результирующая матрица преобразования координат, как и в случае с прямозубым зацеплением, блочно-диагональная, состоящая из блоков  $[a_{\beta\alpha}]$ :

$$[a_{\beta\alpha}] = [a_\beta][a_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$



**Рис. 2.22. Моделирование косозубого зубчатого зацепления**

В общем случае для получения локальной системы координат пружины, имитирующей зацепление  $i$ -го сателлита, отстоящего от 1-го на угол  $\alpha_1$ , требуется три поворота глобальной системы координат: сначала на угол  $\alpha$  вокруг оси  $X$ , затем на угол  $\beta$  вокруг оси  $Y$ , после чего на угол  $\alpha_1$  опять вокруг оси  $X$ . Матрица жесткости такой пружины в глобальной системе запишется следующим образом:

$$[K] = [A_{\alpha_1\beta\alpha}] [K'] [A_{\alpha_1\beta\alpha}]^{-1},$$

а соответствующие блоки матрицы преобразования:

$$[a_{\alpha_1\beta\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

В таблице 2.1 приведены значения всех углов в соответствии с выбранным рабочим направлением приводного вала для носовых полушвернов зацеплений сателлитов. Для аналогичных зацеплений кормовых полушвернов угол  $\beta$  меняет знак на противоположный.



Таблица 2.1.

Углы преобразования системы координат для зацеплений  
носовых полушевронов

Зацепление / соедине- ние	№ спутника	$\alpha$	$\beta$	$\alpha_1$
Солнечная шестерня – спутник (1-я ступень)	1	-20	29	0
	2	-20	29	120
	3	-20	29	240
Солнечная шестерня – эпицикл (1-я ступень)	1	20	-29	0
	2	20	-29	120
	3	20	-29	240
Солнечная шестерня – спутник (2-я ступень)	1	20	-29	0
	2	20	-29	72
	3	20	-29	144
	4	20	-29	216
	5	20	-29	288
Солнечная шестерня – эпицикл (2-я ступень)	1	-20	29	0
	2	-20	29	72
	3	-20	29	144
	4	-20	29	216
	5	-20	29	288

Имитирующий косозубое зацепление спутника элемент (фиктивная пружина) имеет матрицу жесткости  $[K']$  размерностью 12x12, в которой отличны от 0 только 4 элемента:  $k_{3,3}=k_{9,9}=kz$ ;  $k_{3,9}=k_{9,3}= -kz$ , где  $kz$  – жесткость пружины в направлении локальной оси  $Z$ . После преобразования в глобальную систему координат матрица жесткости приобретает следующую блочную структуру:

$$[K] = \begin{bmatrix} [k] & [0] & -[k] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ -[k] & [0] & [k] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}, \text{ где } [k] = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 \\ k_3 & k_5 & k_6 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в силу своей симметрии матрица жесткости полностью определяется шестью коэффициентами:

$$\begin{aligned}
k_1 &= k_z \cos(\alpha)^2 \sin(\beta)^2 \\
k_2 &= -k_z \cos(\alpha) (\cos(\alpha) \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\alpha_1)) \sin(\beta) \\
k_3 &= k_z \cos(\alpha) (\cos(\alpha) \cos(\alpha_1) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\alpha_1)) \sin(\beta) \\
k_4 &= -k_z (\cos(\alpha_1) \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\alpha_1))^2 \\
k_5 &= -k_z (\cos(\alpha_1) \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\alpha_1))^* \\
&\quad * (\cos(\alpha) \cos(\alpha_1) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\alpha_1)) \\
k_6 &= k_z (\cos(\alpha) \cos(\alpha_1) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\alpha_1))^2
\end{aligned}$$

Элемент, моделирующий прямоугольное зацепление эпицикл – блокирующая муфта имеет жесткость не только в направлении нормали к поверхности контакта –  $k_z$ , но и в направлении локальной оси  $X$  (совпадающей с осью  $X$  глобальной системы) –  $k_x$ , а также крутильную жесткость относительно локальной оси  $Y$  –  $c_y$ . Локальная система координат получается поворотом глобальной вокруг оси на угол  $\alpha = 20 + \varphi$  для первой ступени и  $\alpha = -20 + \varphi$  – для второй. Глобальная матрица жесткости имеет блочный вид:

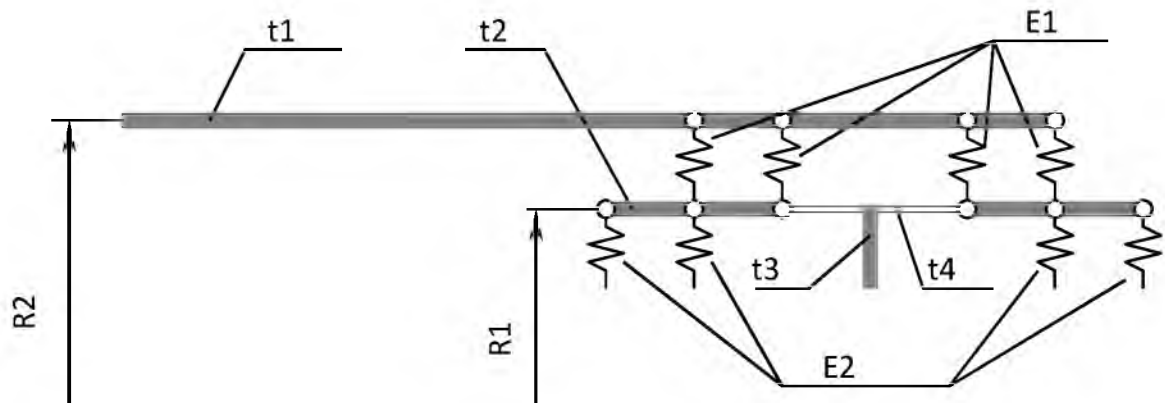
$$[K] = \begin{bmatrix} [k] & [0] & -[k] & [0] \\ [0] & [k_\varphi] & [0] & -[k_\varphi] \\ -[k] & [0] & [k] & [0] \\ [0] & -[k_\varphi] & [0] & [k_\varphi] \end{bmatrix}$$

В силу симметрии матрицы, блоки  $[k]$  и  $[k_\varphi]$  определяются шестью коэффициентами каждая:

$$\begin{cases} k_1 = k_x \\ k_2 = k_3 = 0 \\ k_4 = k_z \sin(\alpha)^2 \\ k_5 = -k_z \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ k_6 = k_z \cos(\alpha)^2 \end{cases} \text{ для } [k], \text{ и } \begin{cases} k_1 = k_2 = k_3 = 0 \\ k_4 = c_y \cos(\alpha)^2 \\ k_5 = c_y \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ k_6 = c_y \sin(\alpha)^2 \end{cases} \text{ для } [k_\varphi]$$

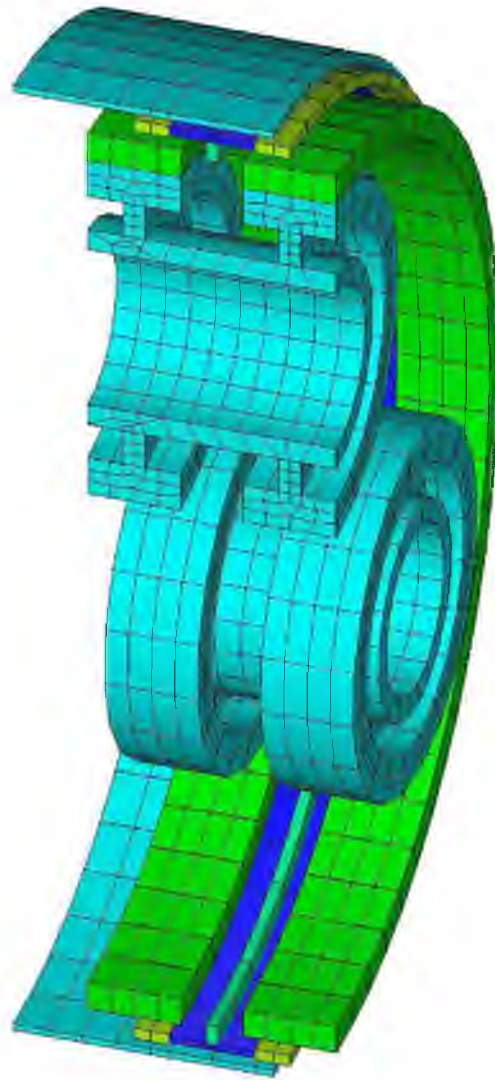
### 2.3.2 Соединительные муфты

Блокирующая и соединительная муфты в данной конструкции представляют собой два тела вращения, соединенные между собой упругими элементами E1 (рис. 2.23), имитирующими зубчатое соединение. Средний радиус барабана соединительной муфты –  $R_2$ , толщина оболочечных элементов, которыми моделируется соединительная муфта, –  $t_1$ . Средний радиус блокирующей муфты –  $R_1$ , толщина оболочечных элементов, моделирующих ее в местах контакта с соединительной муфтой и сателлитами, –  $t_2$ . Опорное кольцо моделируется оболочечными элементами толщиной  $t_3$ , оставшаяся часть моделируется оболочечными элементами толщиной  $t_4$ . E2 – упругие элементы, моделирующие зацепление блокирующей муфты и сателлита.



*Рис. 2.23. Расчетная схема модели соединения барабана соединительной и блокирующей муфт*

Зубчатое соединение блокирующая-соединительная муфты первой ступени моделируется шестьюдесятью точками контакта (60 фиктивных пружин), каждая из которых имитирует суммарную жесткость  $1/60$  части всех зубьев. На рис. 2.24, где показаны конечноэлементные модели сателлитов, эпицикла, блокирующей муфты и барабана соединительной муфты, эти элементы не отображены. (Для второй ступени используется 50 контактных точек).

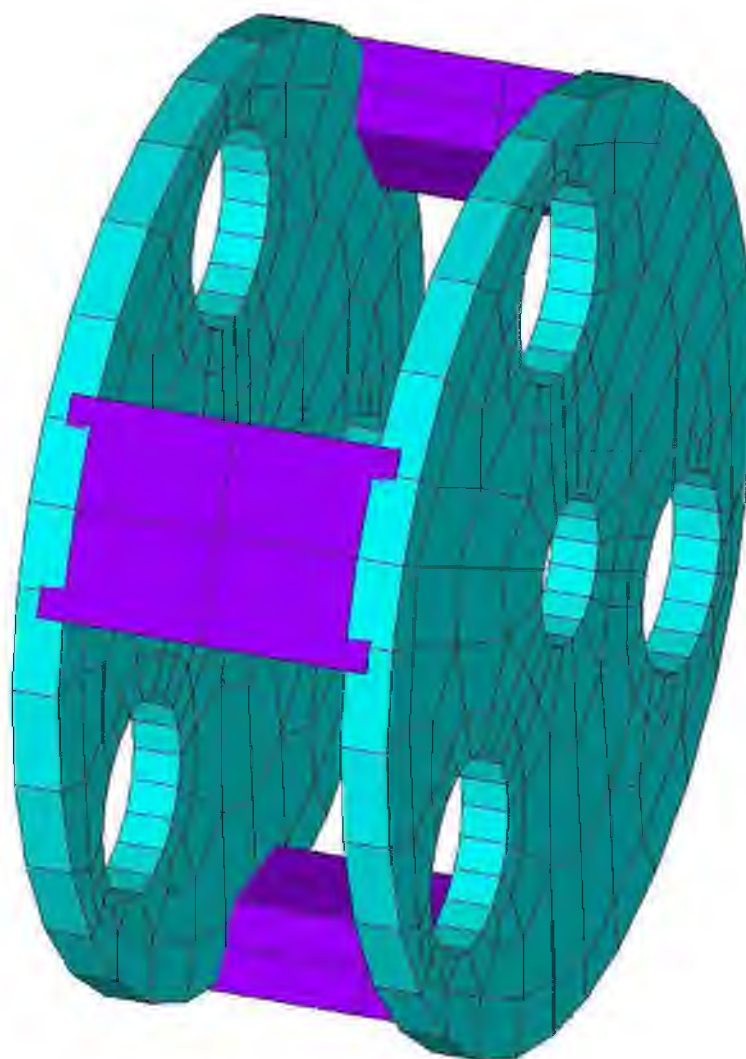


*Рис. 2.24. Конечноэлементная модель соединительной и блокирующей муфты*

### **2.3.3 Водило**

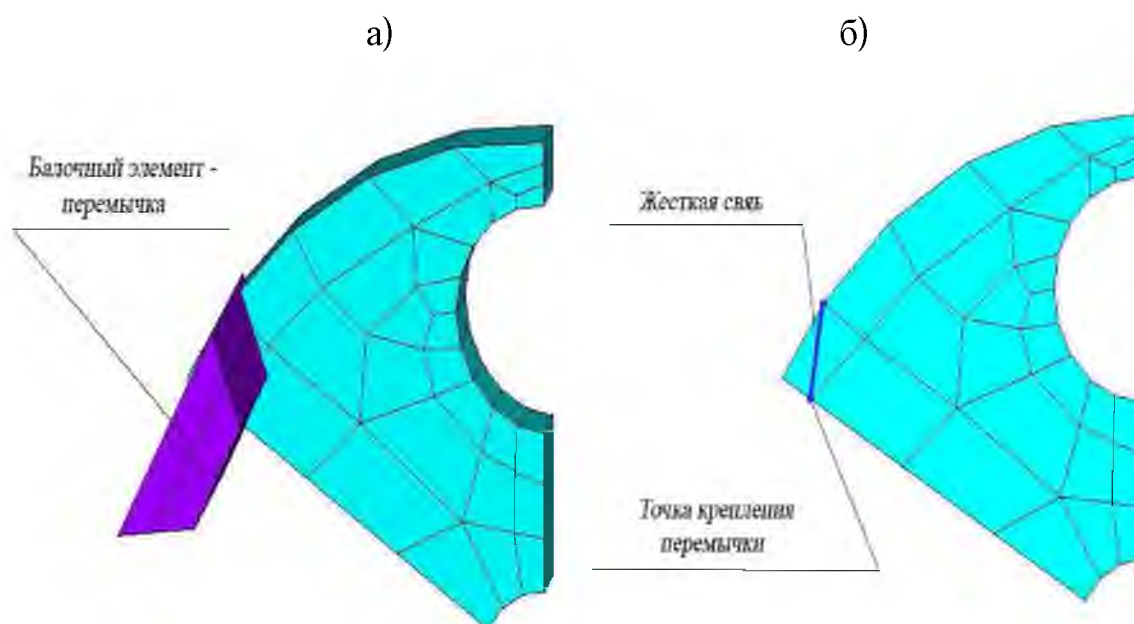
Вторая по сложности моделирования после корпуса деталь редуктора, это водило. В последних разработанных в ИМАШ РАН моделях, предназначенных для исследования динамики планетарных редукторов, водило рассматривалось как твердое недеформируемое тело. Однако, при исследовании взаимной компенсации источников возбуждения рассмотрение водила как жесткого тела на котором суммируются силовые воздействия со стороны сателлитных узлов представляется не вполне корректным.

В данной работе предлагается строить конечноэлементную модель водила на базе оболочечных (щеки водила) и балочных (перемычки) элементов рис. 2.25. При моделировании следует использовать технологию «снизу вверх» т.е. без построения трехмерной геометрической модели. Базовым «шаблоном» конструкции является сектор одной из щек (рис. 2.26а), из которого путем добавления зеркальной копии получается сектор 1/3 щеки водила. Копирование полученного сектора с поворотом на  $120^\circ$  и  $240^\circ$  завершает построение щеки водила. Перемычка, соединяющая щеки водила, моделируется балочным элементом, сечение которого видно на рис. 2.26а.



*Рис. 2.25. Конечноэлементная модель водила 1-й ступени*

Как показано при исследовании колебаний однодискового ротора (в разделе 3.2), крепление балочного элемента к поверхности в единственной точке не вполне корректно, несмотря на наличие 6-ти степеней свободы в узлах оболочечных элементов, моделирующих поверхность. Поэтому для некоторого «усиления» поверхности, перекрываемой сечением прикрепляемой балки, в модель включаются невесомые балочные элементы – жесткие связи (рис.6.26б).



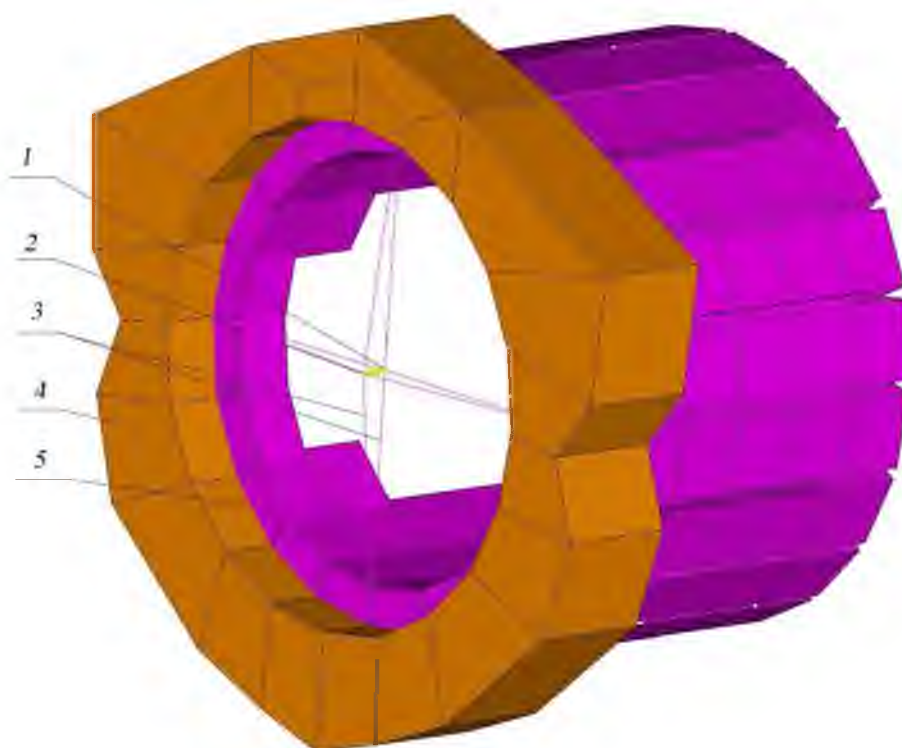
*Рис. 6.26. Базовый сектор для построения щеки водила*

#### **2.3.4 Подшипники скольжения**

При моделировании связей сателлит – ось – водило принято одно из важных допущений. Как показали статические расчеты исследуемой конструкции, податливость сателлитного узла в значительной степени определяется деформированием оси сателлита при ее контактом взаимодействии с сателлитом. Логично предположить, что и колебательные процессы в сателлитном узле будут происходить вблизи некоторого равновесного положения, вызванного действием осредненной статической нагрузки. Моделирование распределенного по всей оси сателлита подшипника скольжения, адекватно отражающего

деформацию оси, весьма проблематично. Поэтому имеет смысл «склеить» ось и сателлит по поверхности пятна контакта, полученной из статического расчета.

При таком подходе ось моделируется оболочечными элементами и вращается вместе с сателлитом, а подшипники скольжения, имитирующие демпфирующие и упругие свойства соединения ось – сателлит, моделируются в соединении ось – водило. Тогда, в отличие от реального объекта, в модели при крутильных колебаниях сателлита инерция оси прибавляется к инерции сателлита. Поскольку момент инерции оси весьма мал по сравнению с моментом инерции сателлита, этой погрешностью в большинстве случаев можно пренебречь. В остальном модель сателлитного узла вполне адекватна.



***Рис. 2.27. Моделирование подшипников скольжения***

Подшипники скольжения определяются матрицами жесткости и демпфирования, связывающими два центральных узла 1 и 2 рис. 2.27. Центральный узел 1 соединяется с 4-мя узлами элементов щеки води-

ла 4, лежащими на поверхности соприкосновения с осью с помощью невесомых жестких балок 3. Центральный узел 2 также связан с 4-мя узлами элементов оси 5. Таким образом, узлы 1 и 2 представляют собой внешнюю и внутреннюю обоймы подшипника скольжения. Сами центральные точки 1 и 2 могут совпадать геометрически, но это не обязательно. Если одна или обе обоймы подшипника принадлежат балочному элементу, то специально создавать центральный узел нет необходимости, в роли последнего может служить любой узел балочного элемента. Подобным образом моделируются все подшипники скольжения в данной работе.

В работе [112] приводится методика расчета динамических характеристик подшипников скольжения, используемых в турбиностроении. Однако многие параметры, используемые в этих расчетах, могут варьироваться в достаточно широких пределах. В первую очередь, это величины зазоров, скорости вращения валов, температура, а следовательно, и вязкость масла. Поэтому в данной работе в качестве начального приближения взяты осредненные значения радиальной жесткости и демпфирования. В дальнейшем эти параметры уточняются методом идентификации, т.е. путем сравнения расчетных данных и результатов эксперимента.

Учитывая, что солнечные шестерни установлены в водиле с зазором, обеспечивающим их «плавание», радиальная жесткость этих подшипников принимается достаточно малой и носит, скорей, условный характер – фиктивные пружины, необходимые для обеспечения вычислительного процесса. Принятые в качестве начального приближения динамические параметры подшипников скольжения в моделируемом редукторе приведены в таблице 2.2.



Таблица 2.2.

## Динамические характеристики подшипников скольжения

Сопрягаемые детали	Жесткость		Демпфиро- вание
	Радиальная	осевая	радиальное
I ступень			
Водило – солнечная шестерня (нос)	3E7	0	0
Водило– солн. шестерня (корма)	3E7	5E8	0
Водило – ось сателлита (нос)	4E9	5E8	2E3
Водило– ось сателлита (корма)	4E9	0	2E3
II ступень			
Водило – солнечная шестерня (нос)	3E7	0	0
Водило– солн. шестерня (корма)	3E7	5E8	0
Водило – ось сателлита (нос)	4E9	0	2E3
Водило– ось сателлита (корма)	4E9	5E8	2E3
Носовой фланец водила - опора	0.7E12	0	0
Выходной вал - опора	0.13E13	1E10	0

### 2.3.5 Валопроводы и дисковые муфты

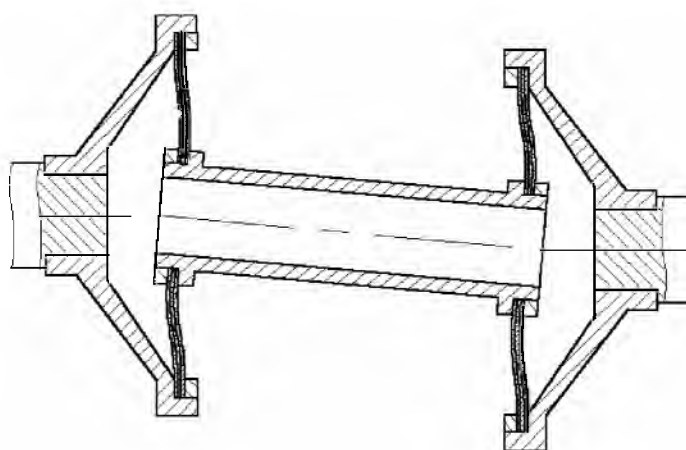
Термином валопровод в судостроении принято называть устройство, соединяющее главный судовой двигатель с движителем. В Турбиностроении это соединенные между собой ротора последовательно расположенных цилиндров турбины. В данной работе под валопроводом будем подразумевать совокупность любого количества отдельных валов, соединенных подвижными муфтами. Таким образом, валопроводом можно назвать и соединение ротора турбины с редуктором, и соединение первой ступени редуктора со второй. В обоих случаях соединение валов обеспечивается подвижными дисковыми муфтами.

Основное назначение подвижных муфт компенсация радиальной и угловой расцентровок соединяемых валов. Некоторые конструкции муфт способны существенно снижать передаваемые с одного вала на другой радиальные, крутильные или осевые колебания.

В большинстве задач наличие подвижных муфт позволяет рассматривать роторную систему как систему, состоящую из отдельных независимых роторов, однако при исследовании возникновения и распространения вибрации по валопроводу это недопустимо. При наличии остаточной расцентровки соединяемых валов сама муфта часто становится источником вибрации [141]. Конструкция и характеристики соединительных муфт существенным образом влияют на динамику валопроводов.

Наиболее перспективны сегодня дисковые муфты, кинематической основой которых является промежуточный вал с упругими шарнирами (дисками) на концах (рис. 2.28). Основное достоинство таких муфт – существенное снижение уровня динамических сил, вызывающих вибрации. Это позволяет пренебречь возникающими в них возмущающими силами.

В турбоагрегатах дисковые муфты начали применяться с 1986 года, когда на Калужском турбинном заводе была разработана конструкция муфты, в которой упругие диски выполнены в виде пакета относительно тонких пластин.



*Рис. 2.28. Муфта с упругими дисками*

Упругие диски допускают значительные угловые и осевые отклонения соединяемых валов. Радиальные отклонения  $\Delta$  обеспечива-

ются за счет перекоса промежуточного вала. При этом угол поворота пакетов пластин  $\varphi = \Delta/l$  ( $l$  – длина промежуточного вала), а момент, необходимый для деформирования пакета пластин  $M = zM' + M''$ , где  $M'$  – момент, необходимый для поворота одной пластины на угол  $\varphi$ ;  $z$  – число пластин в пакете;  $M''$  – момент, определяемый вытяжкой пластин, отстоящих от середины пакета на заданное расстояние.

Одиночный диск муфты можно рассматривать как круглую пластину, жестко заделанную по наружному краю и имеющую жесткий центр, к которому приложен изгибающий момент. Такой пример рассмотрен в [56] где получено следующее выражение для момента  $M'$ :

$$M' = 4\pi D\varphi k_\varphi, \text{ где}$$

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} - \text{ жесткость одной пластины при изгибе,}$$

$$k_\varphi = \frac{(\beta^2 + 1)}{(\beta^2 + 1)\ln\beta - (\beta^2 - 1)},$$

$\mu$  – коэффициент Пуассона  $\beta = d/D$ .

Для вычисления  $M''$  у одиночной пластины можно воспользоваться зависимостью, предложенной в [214]:

$$M'' = \varphi \cdot c \cdot \frac{\delta + h}{2},$$

где  $c$  – жесткость при вытяжке пластины вдоль листа.

Для вычисления жесткости  $c$  используем зависимость для случая закрепления пластины по внешнему периметру при  $\mu = 0,3$ :

$$c = \frac{-E \delta}{0,643 \left( \lg\beta + 0,1 \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} \right)}. \quad (2.1)$$

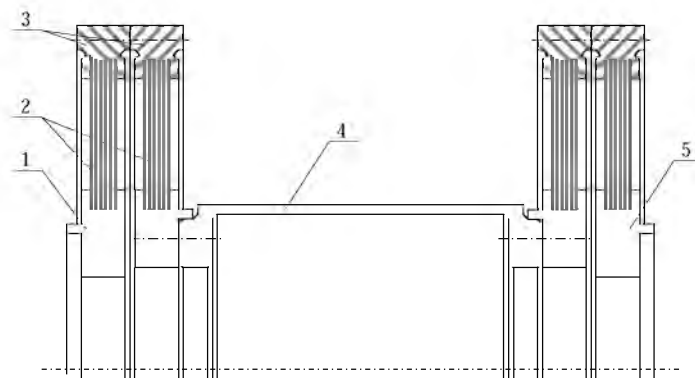
Для пакета пластин из [15]:

$$M'' = \frac{c (h + \delta)^2}{12} z (z^2 - 1).$$

Зависимость для расчета поворотной жесткости пакета пластин будет имеет вид:

$$c_{\varphi} = \frac{M}{\varphi} = 4\pi zD k_{\varphi} + \frac{c (h + \delta)^2}{12} z (z^2 - 1).$$

Эти формулы были получены для случая жесткого крепления пластин к внешнему ободу или ступице. Чтобы убедиться в точности получаемых по этим формулам результатов, была произведена серия расчетов конечноэлементных моделей дисковых муфт.



**Рис. 2.29. Рассчитываемый вариант дисковой муфты: 1,5 – фланцы ведущего и ведомого валов; 2 – пакеты пластин (упругие диски); 3 – внешний соединительный обод; 4 – промежуточный вал**

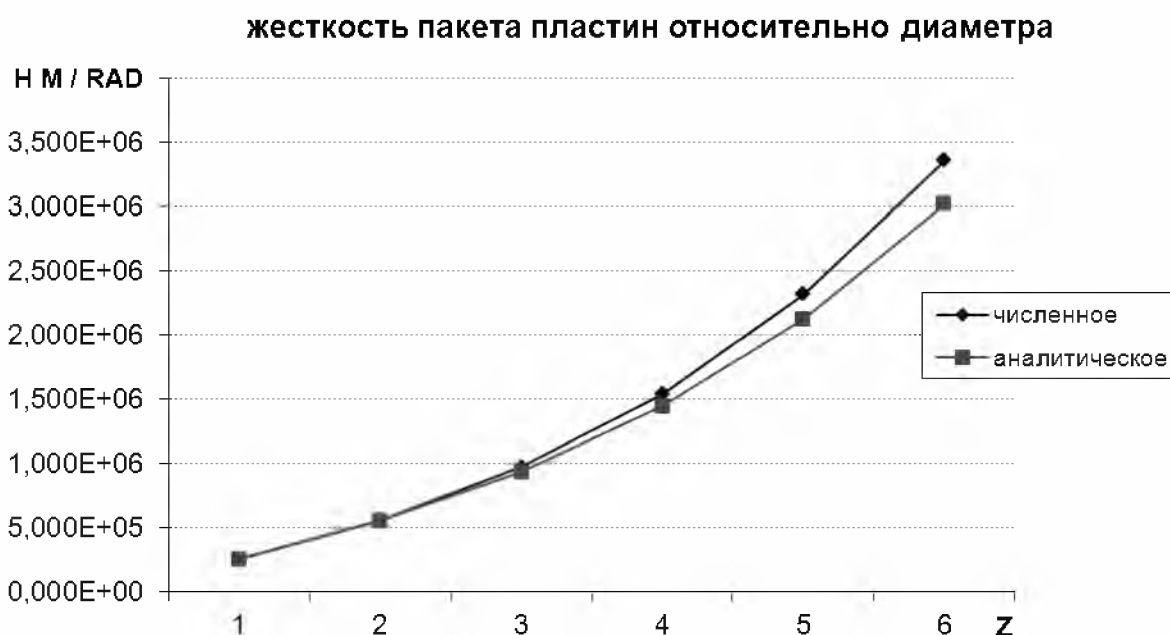
Для тестовых расчетов была разработана параметрическая модель муфты, используемой в стенде для испытания редукторов (рис. 2.29). В качестве параметров модели взяты внутренний и наружный диаметры пластин, число и толщина пластин, расстояния между соседними пластинами. Такой подход позволяет быстро перестроить модель, адаптируя ее к конкретной конструкции. Текст программы, написанной на языке параметрического моделирования APDL, приведен в приложении 8.

Модель состоит из короткого вала, к внешней поверхности которого жестко крепятся пластины. По внешней окружности пластины также жестко крепятся к ободу. Обод и вал считаются абсолютно жесткими, кроме того, обод считается неподвижным. К валу приклады-

вается единичное усилие в осевом или радиальном направлении. По реакции вала определяется жесткость пакета пластин (полумуфты) в осевом и радиальном направлениях. Аналогично, прикладывая к валу единичный момент относительно оси вращения или диаметра, определяется крутильная и изгибная жесткость полумуфты.

С целью оценки необходимой степени дискретизации модели были произведены несколько пробных расчетов одной пластины при различных конечноэлементных сетках. Анализ сходимости получаемых результатов показал, что вполне удовлетворительной точности можно добиться, используя около 350-ти оболочечных элементов типа shell63 (это около 3000 степеней свободы).

На рис. 2.30 показаны результаты, полученные с помощью ПК ANSYS, и результаты, полученные по приведенным формулам (помечены в легенде как аналитические, хотя корректнее было бы назвать их экспериментально-аналитическими, т.к. эти формулы эмпирические и получены на базе экспериментальных исследований на Калужском турбинном заводе.



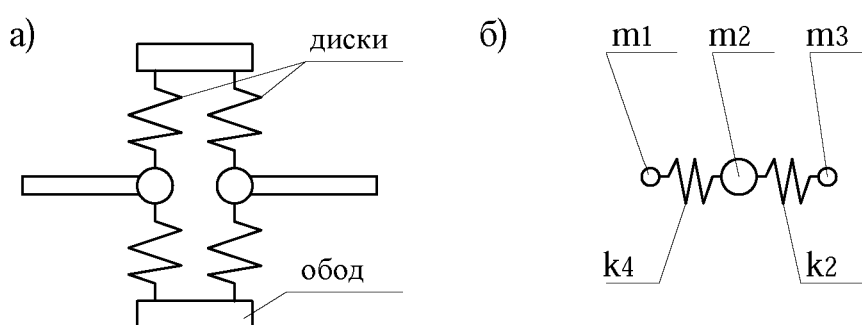
**Рис. 2.30. Зависимость изгибной жесткости полумуфты от числа пластин z**

Приведенные графики показывают совпадение изгибной жесткости для одной пластины и завышение результатов для пакетов, увеличивающееся с ростом числа пластин в пакете (при 6 пластинах разница составляет 11%). Это вполне можно объяснить тем, что крепление пластин не является абсолютно жестким, как в модели, следовательно эффект от вытяжки пластин в реальной конструкции снижается.

Снижение жесткости крепления пластин учитывается коэффициентом 0,643 в знаменателе формулы (2.1). Уменьшение значения коэффициента до 0,525 соответствует идеально жесткому креплению. В этом случае разница с численными расчетами не превышает 0,5 %.

Как было отмечено выше, для получения приемлемой точности конечноэлементного расчета требуется около 350 элементов на одну пластину. При расчете одной муфты, содержащей два пакета по 6 пластин, будет сгенерировано около 6000 узлов, что соответствует 36000 степеней свободы.

Если нас интересует динамика валопровода, а не колебательные процессы в самих пластинах, то конечноэлементное моделирование пластин чересчур расточительно. Поскольку ANSYS позволяет вводить свои КЭ путем определения их матриц масс, жесткости и демпфирования – [M], [K] и [C] соответственно, можно предложить более рациональную модель муфты, содержащую всего 5 КЭ (рис. 2.31).

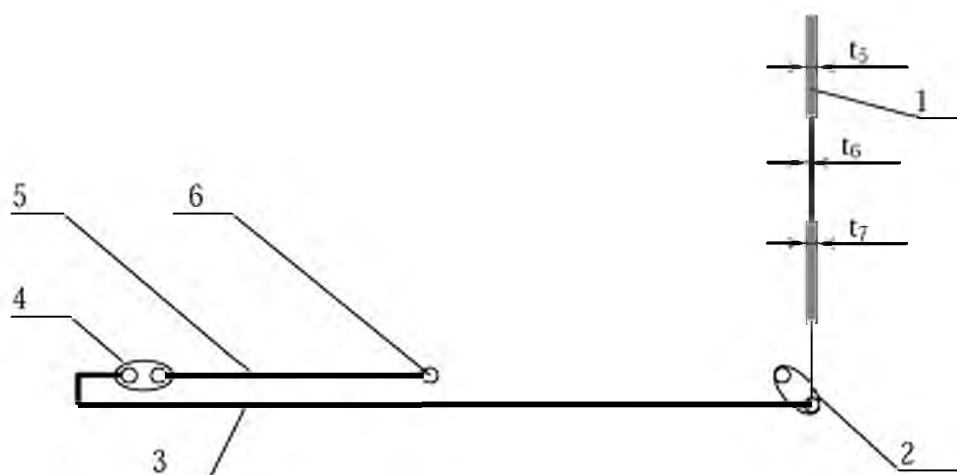


**Рис. 2.31. Упрощенная модель муфты: а – схема, б – конечноэлементная модель**

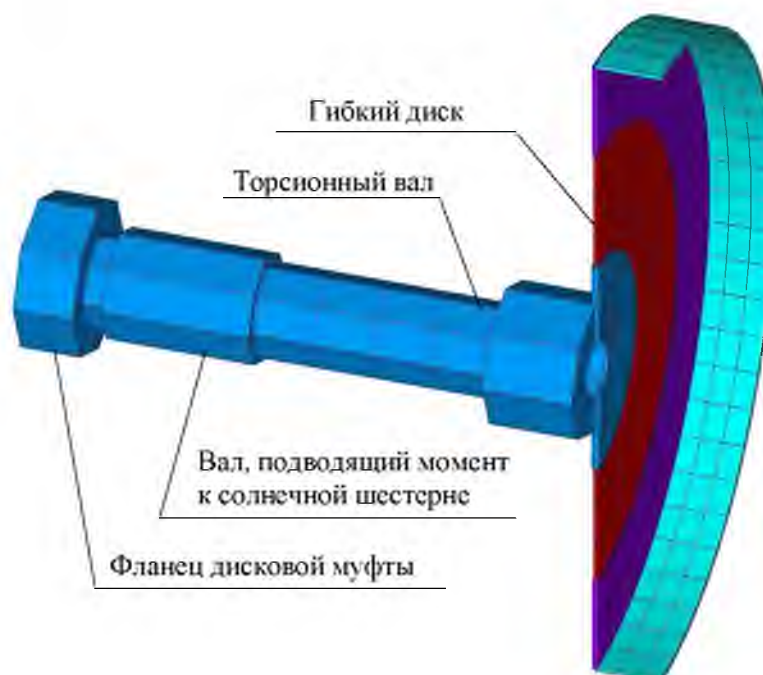
В упрощенной модели муфты ступицы дисков и внешний обод моделируются точечными массами с заданными инерционными свойствами, а диски аппроксимируются невесомыми пружинами. Масса дисков при этом распределяется на ступицу и обод. Жесткостные характеристики пружин определяются из предварительных расчетов, причем осевую, радиальную и крутильную жесткости можно взять из расчета конечноэлементной модели, а изгибную жесткость относительно диаметра предпочтительнее получить по приведенным формулам или ввести в конечноэлементный расчет поправочные коэффициенты, учитывающие снижение жесткости закрепления дисков, характерное для конкретного изготовителя.

Разработанные методики упрощенного моделирования роторов турбоагрегатов и дисковых муфт позволяют существенным образом снизить затраты на вычислительные ресурсы при моделировании динамических процессов в редукторе, работающем в составе турбозубчатого агрегата. При этом построенные модели достаточно адекватно отражают динамические свойства своих прототипов, а вносимые принятыми упрощениями погрешности могут быть вполне корректно оценены отдельными уточненными моделями.

На рис. 2.32 показана схема соединения 1-й и 2-й ступеней типовой конструкции планетарного редуктора ГТЗА, а на рис. 2.33 – конечноэлементная модель гибкого диска соединительной муфты и соответствующих этой схеме валов.



*Рис. 2.32. Кинематическая схема передачи момента с первой на вторую ступень. 1 – гибкий диск соединительной муфты 1-й ступени; 2 – элемент, моделирующий подшипник скольжения; 3 – торсионный вал, передающий момент с 1-й на 2-ю ступень; 4 – элементы, моделирующие пластинчатую муфту; 5 – вал, подводящий крутящий момент к центру солнечной шестерни 2-й ступени; 6 – узел связи с солнечной шестерней.*



*Рис. 2.33. Конечноэлементная модель валопровода, соединяющего 1-ю и 2-ю ступени*

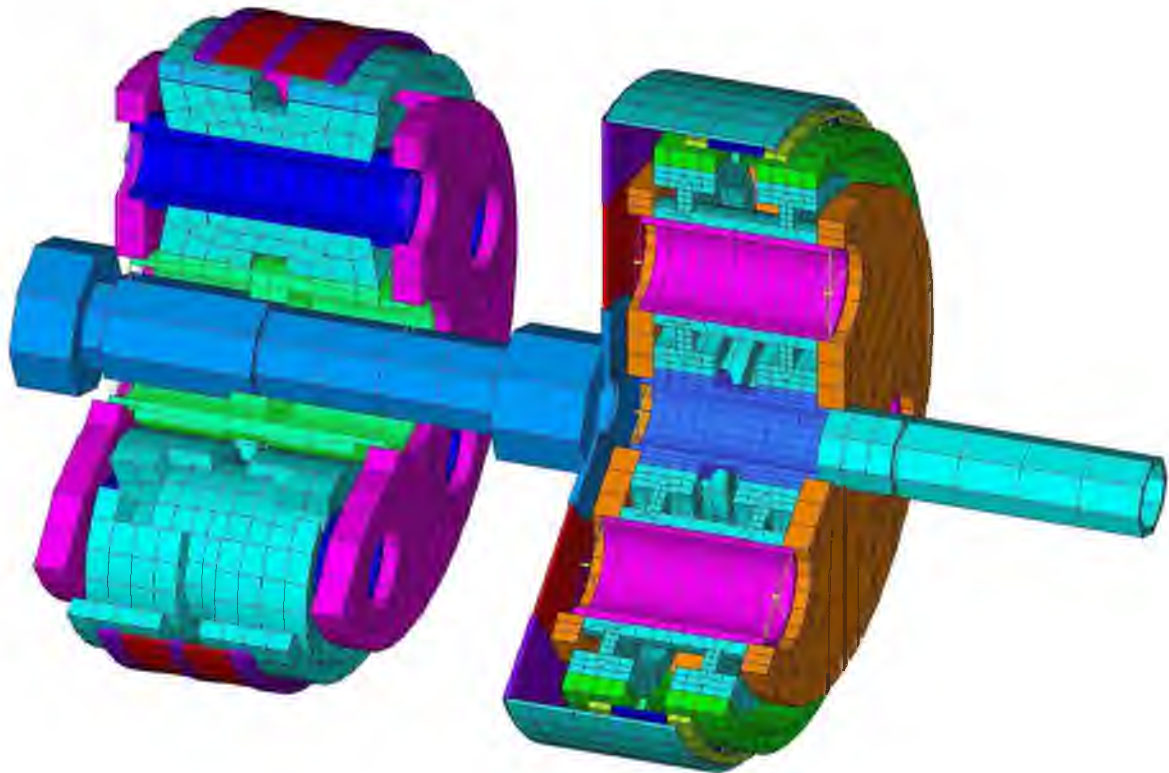


Гибкий диск и барабан соединительной муфты моделируются оболочечными элементами. Варьируя толщину центральной части гибкого диска (параметр  $t_6$  рис. 2.32), можно изменять изгибную жесткость соединительной муфты. Диск муфты соединяется с торцом торсионного вала невесомыми балочными элементами по методике, изложенной в разделе 2.3.4. Валы моделируются балочными элементами соответствующего сечения. Диск муфты, соединяющая торсионный и промежуточный валы, моделируется тремя невизуальными элементами, задаваемыми матрицами жесткости (пакеты пластин) и масс (внешняя обойма).

В конструкции исследуемого редуктора имеются две дисковые муфты: между торсионным и промежуточным валом 5 и между приводным валом и солнечной шестерней 1-й ступени 18 рис. 2.1.

В таблице 2.3 приведены значения жесткостей пакетов пластин: радиальная  $k_r$ , осевая  $k_x$ , поворотная относительно оси вращения  $k_{\phi x}$  и относительно диаметра  $k_{\phi r}$ , а также инерционно-массовые параметры пластин, частично приведенные к внешней обойме. Оставшаяся часть инерционно-массовых параметров учитывается увеличением геометрии фланцев полумуфт.

Вторая ступень редуктора строится по такой же методике, что и первая. Для завершения моделирования обеих ступеней необходимо определить жесткости всех зубчатых зацеплений и соединений. Введение в модель необходимых для этого элементов описано ранее, необходимые для расчетов характеристик этих элементов параметры, полученные из экспериментальных данных и статических расчетов, проведенных в ИМАШ РАН, приведены в таблице 2.4, а конечноэлементная модель обеих ступеней в сборе показана на рис. 2.34.



*Рис. 2.34. Фрагмент конечноэлементной модели 1-й и 2-й ступеней планетарного редуктора*

Таблица 2.3.

Инерционно-массовые и жесткостные характеристики элементов дисковых муфт

Наименование элемента	Характеристики
Муфта, соединяющая промежуточный и торсионный вал	
Пакет пластин	$k_r = 0,1e13;$ $k_x = 0,18e7;$ $k_{\varphi x} = 0,1e9;$ $k_{\varphi r} = 0,86e5;$
Внешняя обойма	$m = 103;$ $J_x = 0,87; J_v = J_z = 0,47$
Муфта приводного вала	
Пакет пластин	$k_r = 3,0e12;$ $k_x = 2,0e7;$ $k_{\varphi x} = 0,1e9;$ $k_{\varphi r} = 0,25e7;$
Внешняя обойма	$m = 68;$ $J_x = 7,5; J_v = J_z = 3,8$

Таблица 2.4.

## Жесткостные характеристики зубчатых зацеплений и соединений

Наименование зацепления (соединения)	Жесткостные характеристики (Н/М)
1 ступень	
Сателлит – солнечная шестерня, Сателлит – эпицикл.	$k_z = 0.3e10;$ $k_x = k_y = 0;$ $k_{\varphi x} = k_{\varphi y} = k_{\varphi z} = 0.$
Эпицикл (1 зубчатый венец) – блокирующая муфта*.	$k_x = 0.4e10/z;$ $k_z = 0.6e12/z;$ $k_{\varphi y} = 0.9e9/z;$ $k_y = 0; k_{\varphi x} = k_{\varphi z} = 0.$
Блокирующая муфта – барабан* .	$k_z = 1.02e11/z;$ $k_x = k_y = 0;$ $k_{\varphi x} = k_{\varphi y} = k_{\varphi z} = 0.$
2-я ступень.	
Сателлит – солнечная шестерня, Сателлит – эпицикл.	$k_z = 0.4e10;$ $k_x = k_y = 0;$ $k_{\varphi x} = k_{\varphi y} = k_{\varphi z} = 0.$
Эпицикл (1 зубчатый венец) – блокирующая муфта*.	$k_x = 0.4e10/z;$ $k_z = 0.6e12/z;$ $k_{\varphi y} = 0.9e9/z;$ $k_y = 0; k_{\varphi x} = k_{\varphi z} = 0.$
Блокирующая муфта – соединительная муфта*.	$k_z = 0.7e11/z;$ $k_x = 0,35e8; k_y = 0;$ $k_{\varphi x} = k_{\varphi y} = k_{\varphi z} = 0.$

\* – приведена суммарная жесткость соединения, отнесенная к числу зубьев  $z$ . Поскольку в программе построения конечноэлементной модели сами зубья не моделируются, то число связей – пружин равно числу конечных элементов в окружном направлении, т.е.  $z=60$  для первой ступени и  $z=50$  для второй.

#### 2.4. Учет контактных взаимодействий в сателлитных узлах

При исследовании динамики часто рассматриваются малые колебания системы вблизи некоторого равновесного состояния, занимаемого системой, в результате действия статических составляющих силового воздействия. Небольшая по отношению к статической нагрузке амплитуда динамических возмущений позволяет рассматривать

такие колебания в линейной постановке, что значительно упрощает задачу.

В то же время поиск равновесного состояния, относительно которого совершаются колебания, может представлять собой статическую задачу с учетом различного вида нелинейностей. В случае исследования колебаний лопаток турбины это может быть геометрическая нелинейность, а в случае исследования виброактивности редуктора – контактное взаимодействие сопрягаемых деталей.

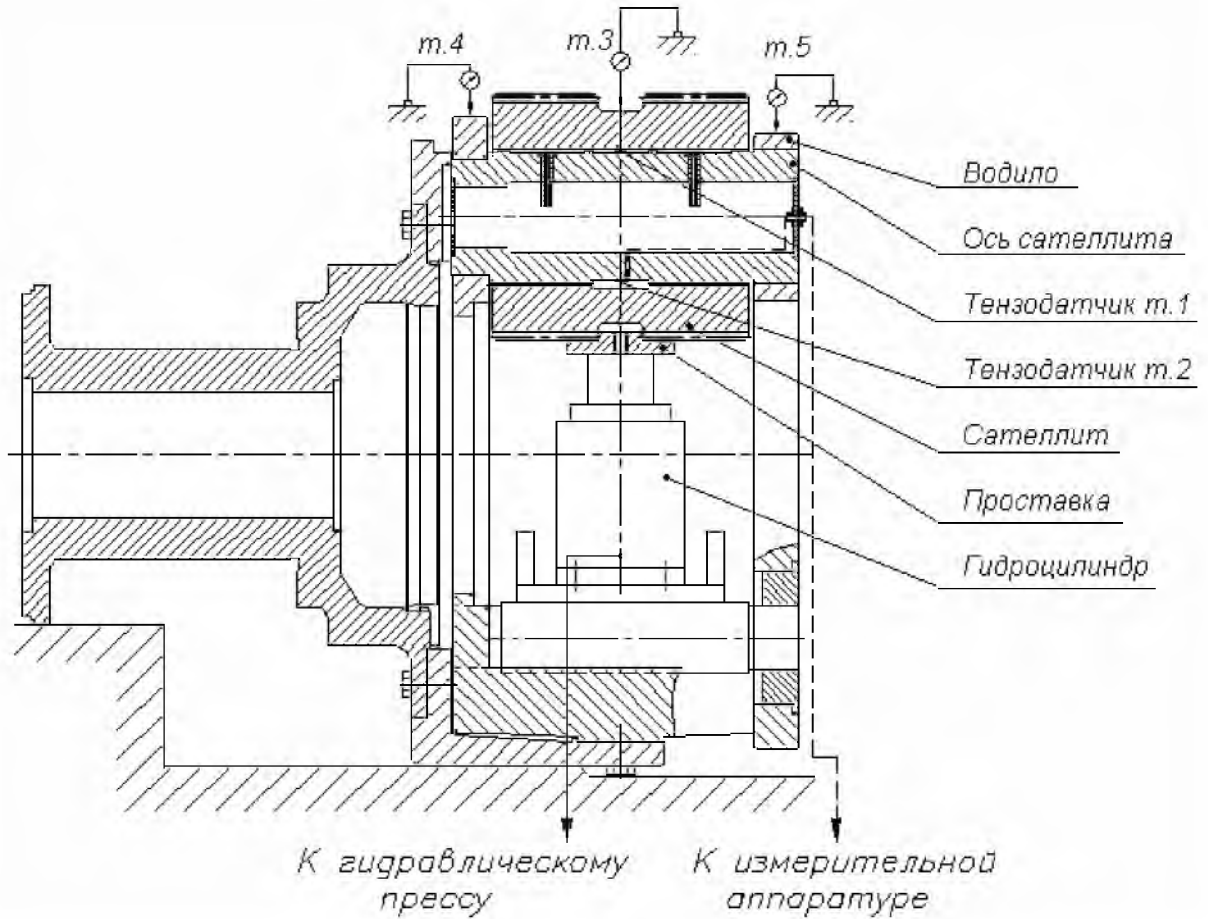
Решение подобных статических задач позволяет определить особенности динамических составляющих возмущающего воздействия, а также необходимые, учитывающие статическую деформацию, параметры математической модели, предназначенной для исследования динамики.

Еще одна важная роль статических расчетов – оценка адекватности математической модели или результатов экспериментальных исследований. Часто полученные результаты на первый взгляд кажутся абсурдными и вызывают сомнения в правильности проведения эксперимента или корректности модели. В таких случаях исследование НДС системы позволяет объяснить физику непонятных явлений или выявить некорректность модели.

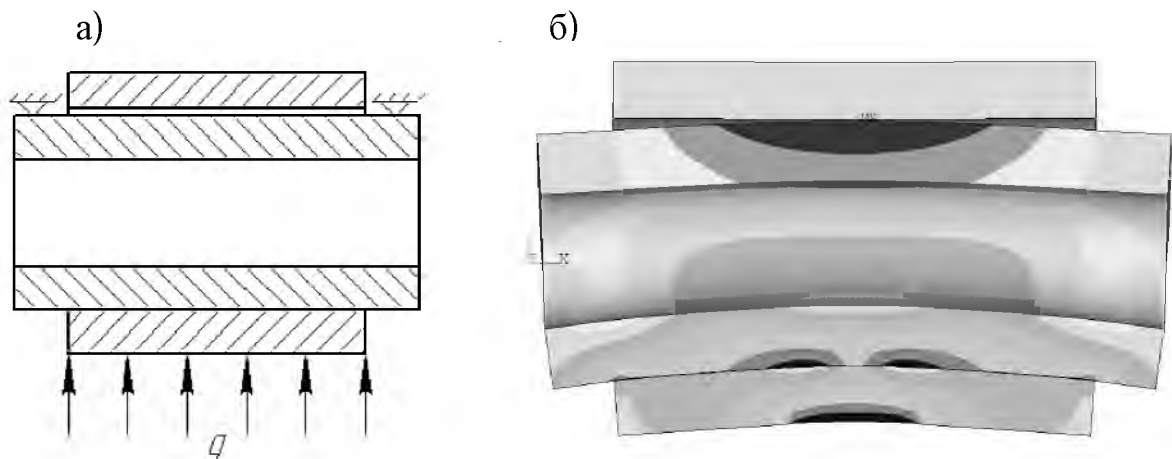
Так, в целях снижения неравномерности распределения нагрузки по сателлитам, на Калужском турбинном заводе была разработана конструкция осей сателлитов с повышенной податливостью. Поскольку реальные условия нагружения (тангенциальные силы) достаточно сложно воспроизвести на стенде, то податливость сателлитного узла экспериментально определялась путем приложения радиального усилия к зубчатому венцу согласно схеме стенда (рис. 2.35).

В результате проведения эксперимента были получены результаты, вызывающие некоторое недоумение: напряжения сжатия в направлении оси сателлита, показываемые тензодатчиком *m.2* по модулю по-

что вдвое меньше напряжений растяжения, показываемых тензодатчиком *m.1*.



**Рис. 2.35. Схема стенда для исследования податливости сателлитного узла планетарного редуктора**



**Рис. 2.36. Упрощенная модель оси, с надетым на неё сателлитом и схема её нагружения (а), распределение напряжений в модели с учетом контактного взаимодействия оси и сателлита (б)**

Для прояснения ситуации была построена упрощенная конечно-элементная модель сателлитного узла с соответствующими граничными условиями (рис. 2.36а). Анализ результатов расчета показал, что за счет радиального зазора между осью и сателлитом верхняя часть оси свободно деформируется, полностью воспринимая изгибную нагрузку, а нижняя, прилегающая к сателлиту – деформируется совместно с ним, что приводит к частичному перераспределению нагрузки на сателлит (рис. 2.36б). Эти результаты удалось получить только после того, как с помощью специальных элементов в модели было учтено контактное взаимодействие между сателлитом и осью.

Такое кардинальное изменение картины распределения напряжений и деформаций делает необходимым учет контактного взаимодействия и ставит задачу исследования напряженно-деформированного состояния сателлитного узла в ряд нелинейных трудно решаемых задач, что требует особого подхода к построению модели и настройке начальных параметров контакта.

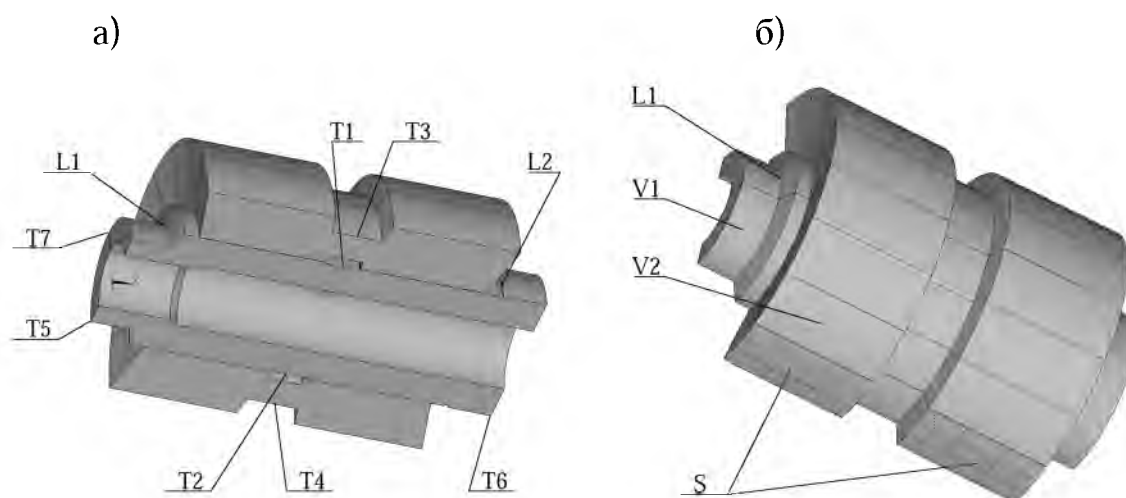
В рассматриваемой конструкции редуктора сателлитный узел содержит 4 пары контактирующих поверхностей. Это опорные шейки оси и контактирующие с ними поверхности проточек в водиле (две пары), а также поверхности оси и надетого на неё сателлита (2 пары, учитывая имеющиеся проточки для подвода масла). Контакты по зубьям зацепления сателлита с шестернёй и эпициклом в данном исследовании можно аппроксимировать фиктивными пружинами с заданными параметрами.

На начальном этапе исследования требуется определение минимальных требований к конечноэлементной модели. Цель этого этапа – получение модели с минимальным количеством конечных элементов, при адекватном отражении ею внутреннего НДС.

Тестовая модель представляет собой ось с наружным диаметром  $D$  и надетый на неё с зазором  $5 \cdot 10^{-4}D$  сателлит (рис. 2.37). Точность

модели оценивается путем сравнения результатов расчета с осредненными экспериментальными данными, полученными на стенде рис. 2.35.

Полученные экспериментально значения перемещений в точках T3, T4 в направлении, перпендикулярном оси, при нагрузке близкой к рабочим условиям и напряжения в осевом направлении в точках T1, T2, являются наиболее важными параметрами при данной постановке задачи и позволяют судить об адекватности модели. При обработке экспериментальных данных по перемещениям контрольных точек были учтены деформации щек водила, что позволило не моделировать само водило, а жестко закрепить ось по линиям L1, L2 (рис. 2.37).

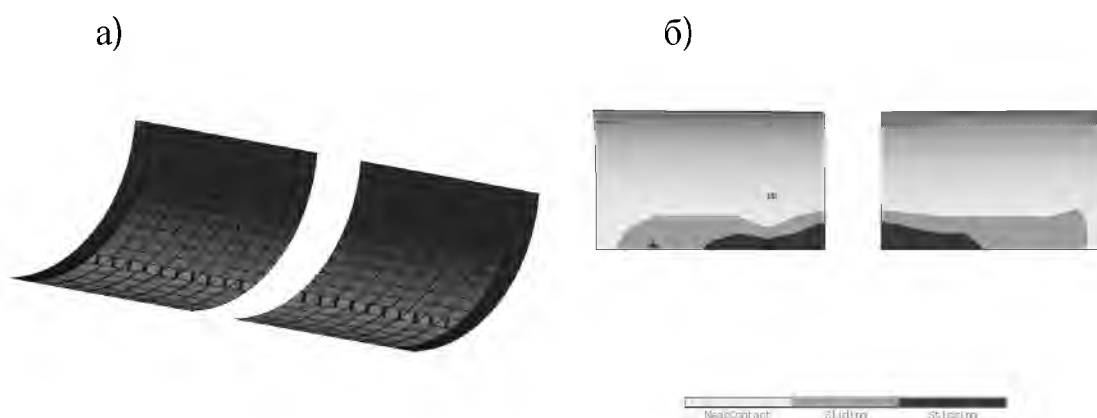


**Рис. 2.37. 3D модель сателлитного узла. V1 – ось сателлита; V2 – шевронный сателлит; L1,L2 – линии закрепления оси в щеках водила, T1-T6 – контрольные точки, S – поверхность приложения нагрузки**

В силу симметричности деталей, граничных условий и нагрузки строится только половина модели. Вертикальная нагрузка, прикладываемая по всей длине нижней кромки зубчатого венца в экспериментальных исследованиях, аппроксимируется приложенным к поверхности “s” давлением. В осевом направлении нагрузок не прикладывается, поэтому в этом направлении ось достаточно закрепить в любой точке.

Граничные условия, моделирующие крепление оси в щеках водила, являются приближенными, но для первого этапа приемлемыми. Контроль корректности таких граничных условий был проверен по радиальному перемещению точек T5, T6, T7 и T8. Точка T8 расположена на горизонтальной плоскости симметрии оси подобно T7, но на противоположном торце оси и на рисунке не показана. Перемещения этих точек в результате наклона и овализации оси под действием приложенной нагрузки во всех тестовых расчетах не превысили величину установочного при экспериментальных исследованиях зазора между шейкой оси и щекой водила. Следовательно, расточка в щеках водила не стесняет деформацию шеек оси, и использованные граничные условия для данного этапа могут быть признаны корректными.

Моделирование контактируемых поверхностей осуществляется элементами `conta174` и `targe170`. Учитывая наличие на контактируемых поверхностях канавки, предназначенной для подвода масла, мы получаем две области контакта (рис. 2.38а).



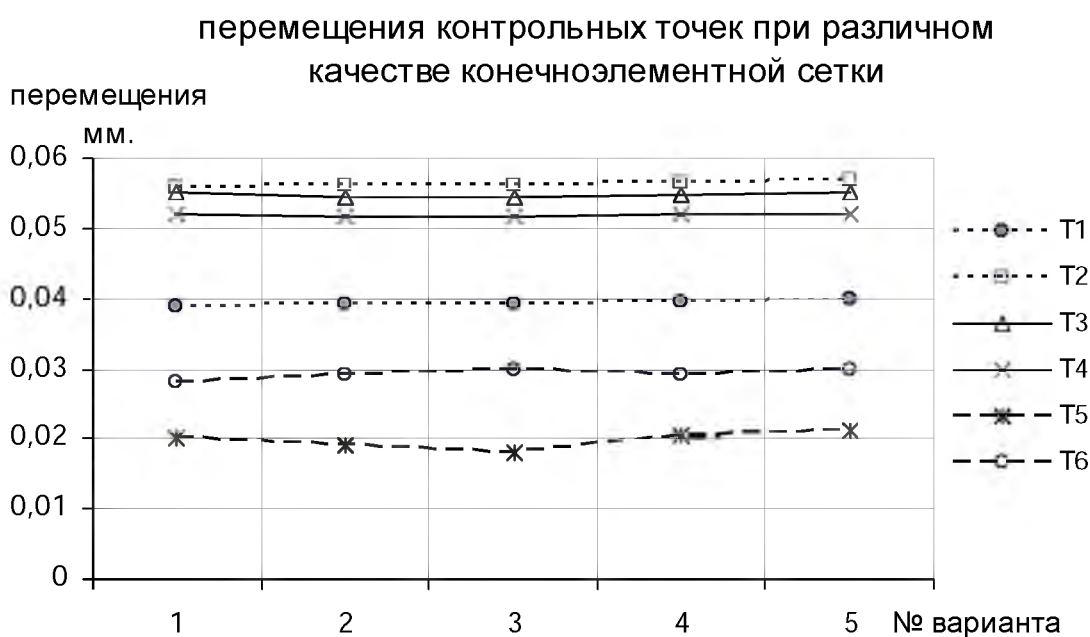
**Рис. 2.38. Контактная поверхность для моделирования взаимодействия оси и сателлита (а) и распределение пятна контакта по результатам расчета – вид сверху (б)**

В результате решения контактной задачи было получено распределение контактных напряжений и определена зона контакта (рис. 2.38б). Стало понятно, что под действием приложенной нагрузки происходит овализация оси сателлита. Нижняя часть оси и сателлита в ре-



зультате контактного взаимодействия совместно работают на изгиб, в то время как верхняя часть сателлита на изгиб практически не работает. Расчет подтвердил корректность результатов эксперимента, в которых напряжение растяжения в точке T1 вдвое больше напряжения сжатия в точке T2 (рис. 2.37).

На рис. 2.39 показаны результаты расчета перемещений контрольных точек для серии из пяти расчетов с различным качеством конечноэлементной сетки. В таблице 6.5 показаны основные характеристики сетки и требования к вычислительным ресурсам для каждого из этих вариантов.



**Рис. 2.39. Перемещения контрольных точек при различных вариантах расчетов (по осреднённым экспериментальным данным перемещения точек T3 и T4 составляют 0,052 мм и 0,05 мм соответственно)**

Оптимальным с точки зрения соотношения точности получаемых расчетов к требуемым вычислительным ресурсам можно считать первый вариант. Более грубая сетка не позволяет с достаточной точностью смоделировать пятно контакта, а измельчение сетки, как видно

из рис.2.39, не приводит к существенному уточнению контрольных результатов.

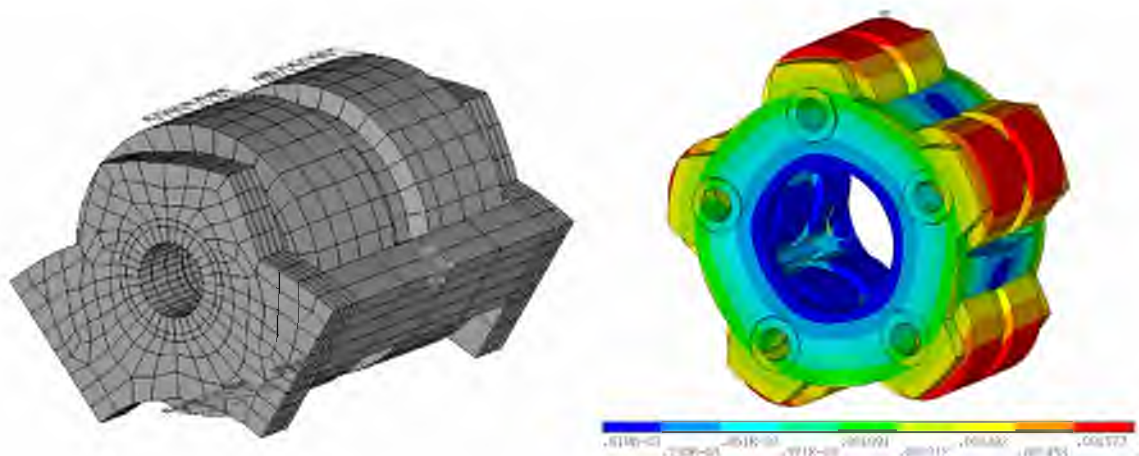
Таблица 2.5.

Характеристики конечноэлементной сетки

№ варианта	Число элементов	Объем требуемой памяти (Мб)	Число степеней свободы
1	1504	104	24621
2	1776	125	28520
3	1920	137	31589
4	4096	347	60883
5	8192	662	120851

Аналогичным способом определяются параметры сетки для моделирования контактного взаимодействия шеек оси сателлита со щеками водила.

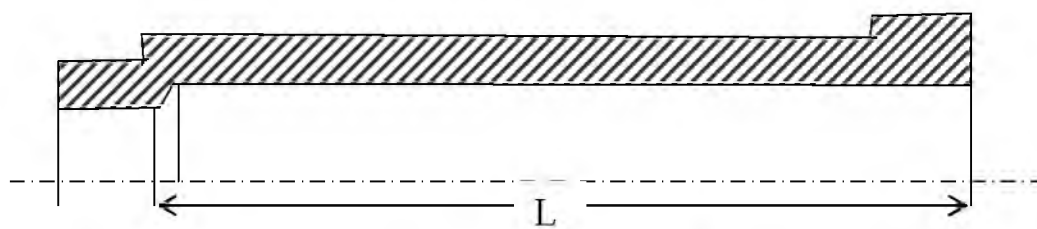
Учитывая циклическую симметрию исследуемой конструкции и реальные условия нагружения, для дальнейших исследований можно построить модель 1/5 водила с сателлитным узлом и соответствующими граничными условиями (рис. 2.40).



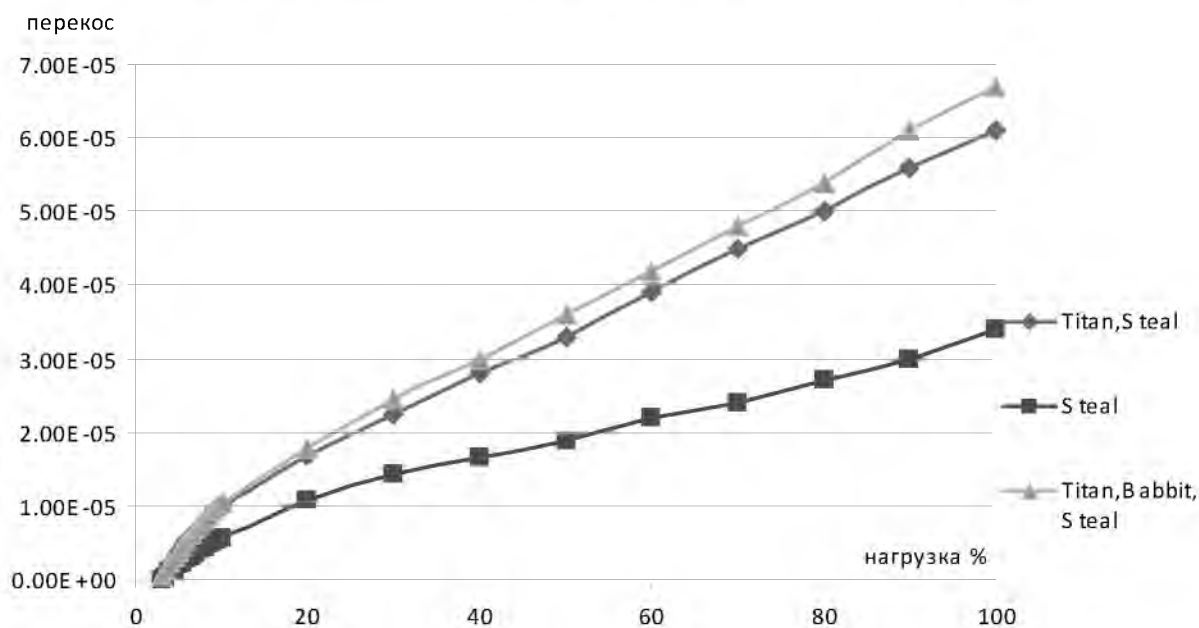
*Рис. 2.40. Модель водила с сателлитным узлом, построенная с учетом циклической симметрии 5-го порядка (слева) и «восстановленная» в соответствии со свойствами циклической симметрии после проведения расчетов (справа)*

Ценность этой модели заключается в том, что в отличие от экспериментального стенда она позволяет воспроизвести не только радиальную, но и тангенциальную нагрузку в соответствии с реальными условиями работы данного узла, причем адекватность этой модели уже подтверждена экспериментальными исследованиями при радиальной нагрузке.

С помощью разработанной модели было выполнено расчетное исследование напряженно-деформированного состояния сателлитных узлов, имеющих типовую конструкцию оси (рис.2.41). Исследование проводилось в предположении равномерного распределения нагрузки по сателлитам.



**Рис. 2.41. Упрощенная модель типовой оси сателлита**



**Рис. 2.42. Влияние нагрузки на переко зубчатых венцов сателлита при различных материалах элементов модели**

Результаты проведенных расчетов представлены на графиках рис. 2.42, где по оси абсцисс отложена относительная нагрузка, по оси ординат – разница перемещений точек, лежащих на противоположных торцах зубчатого венца сателлита (в метрах). Три линии графиков соответствуют вариантам математической модели. В первой модели водило, ось и сателлит стальные, во второй – водило из титана, в третьей – между осью и сателлитом моделируется баббитовый слой. Во всех трех случаях рассматривался идеально точно (без погрешностей) изготовленный сателлитный узел.

Из рисунка видно, что на режимах частичных нагрузок (до ~20% от номинальной) величина перекоса сателлита нелинейно зависит от крутящего момента, что обусловлено особенностями контактного взаимодействия между осью и сателлитом, а также опорными шейками оси и водилом. При нагрузках более 20% рассматриваемая зависимость становится практически линейной, что свидетельствует о достижении в соединениях полноты контакта. В реальном редукторе, при наличии неизбежных погрешностей изготовления элементов сателлитного узла, интервал режимов работы зацеплений с нелинейной зависимостью перекоса от нагрузки может расширяться.

Проведенные исследования показали, что одной из причин выявленных ранее перекосов в зубчатых зацеплениях сателлитов с центральными колесами, влияющих на виброактивность редуктора, является различие жесткостей правой и левой щек водила и несимметричная конструкция оси.

Как показали расчеты, геометрия оси, полученная в результате доводки типовой конструкции по результатам экспериментальных исследований, не идеальна. Изменив длину внутренней проточки оси (параметр  $L$  рис. 2.41), можно полностью скомпенсировать жесткостную диссиметрию сателлитного узла, повышая тем самым равномерность распределения нагрузки по зубчатому зацеплению. Равномерное

распределение нагрузки по зацеплению, особенно на режимах максимальных нагрузок, несомненно, снижает значение максимальных контактных напряжений и, следовательно, повышает надежность зубчатой передачи.

Перекося оси сателлита в тангенциальном направлении, выявленный в результате расчета модели сателлитного узла, приводит к отклонению значений контактных напряжений на торцах шестерен от их средней величины на 8%. Податливость ободьев эпицикла в значительной степени компенсирует эту неравномерность нагрузки по зацеплению сателлит – эпицикл, чего, к сожалению, нельзя сказать о зацеплении сателлита с солнечной шестерней.

Еще одной целью исследования напряженно-деформированного состояния сателлитного может быть построение альтернативной модели, не содержащей контактных поверхностей. Идея альтернативной модели заключается в том, что сопрягаемые модели объединяются (склеиваются) по поверхности предполагаемого контакта. Предварительный расчет геометрии контактных поверхностей при заданной нагрузке позволяет такую модель построить.

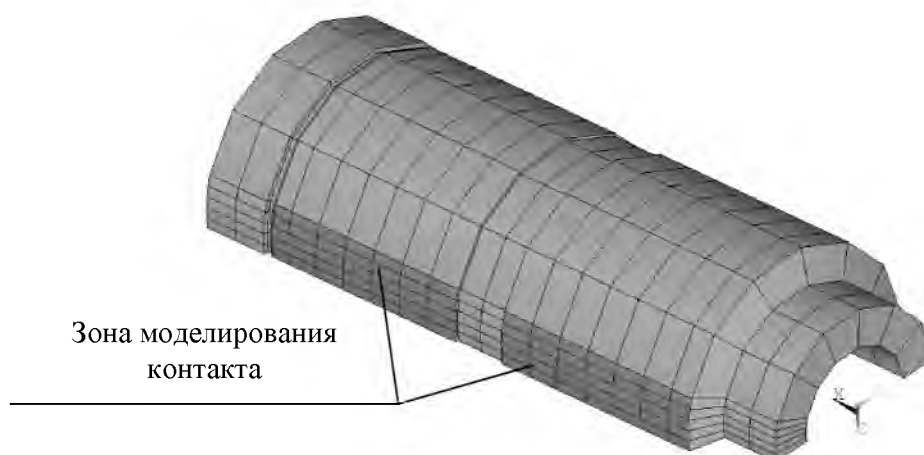
Наиболее привлекательной методикой построения альтернативной модели можно было бы считать следующую последовательность действий:

- 1) построение трехмерных моделей оси и сателлита;
- 2) смещение сателлита в направлении, перпендикулярном оси, на величину зазора, что приводит к касанию оси и сателлита;
- 3) дальнейшее смещение сателлита на расстояние, обеспечивающее внедрение оси и сателлита друг в друга по площади, равной пятну контакта;
- 4) объединение пересекающихся объемов с помощью логической операции;
- 5) генерация конечноэлементной сетки.

С теоретической точки зрения эта методика осуществима, и никаких причин, не позволяющих её реализовать, нет. Расчетная величина «внедрения» сателлита в ось в нашем случае составила 0,1 мм. Однако механизм генерации конечноэлементной сетки, реализованный в программном комплексе ANSYS, не позволяет создать её в автоматическом режиме (или автору не хватило мастерства задать нужные параметры и режимы генератора). Минимальная величина перекрытия оси и сателлита, при котором сетка генерируется в автоматическом режиме, составила 2 мм, но результат таких расчётов слишком далек от истины. При аналогичных исследованиях в программном комплексе NASTRAN величина минимального перекрытия составила 5мм. Таким образом, для построения корректной модели пришлось использовать другой, более трудоёмкий, механизм построения модели:

- 1) трёхмерные модели оси и сателлита строятся таким образом, чтобы обеспечить возможность построения упорядоченной конечноэлементной сетки;
- 2) перед генерацией сетки рассчитывается её шаг в тангенциальном и осевом направлении таким образом, чтобы узлы контактирующих поверхностей располагались друг напротив друга, т. е. расстояние между контактирующими узлами равнялось величине зазора;
- 3) после генерации сетки с помощью механизма селекции выделяются все пары узлов, которые должны контактировать друг с другом;
- 4) для выделенных узлов производится процедура объединения.

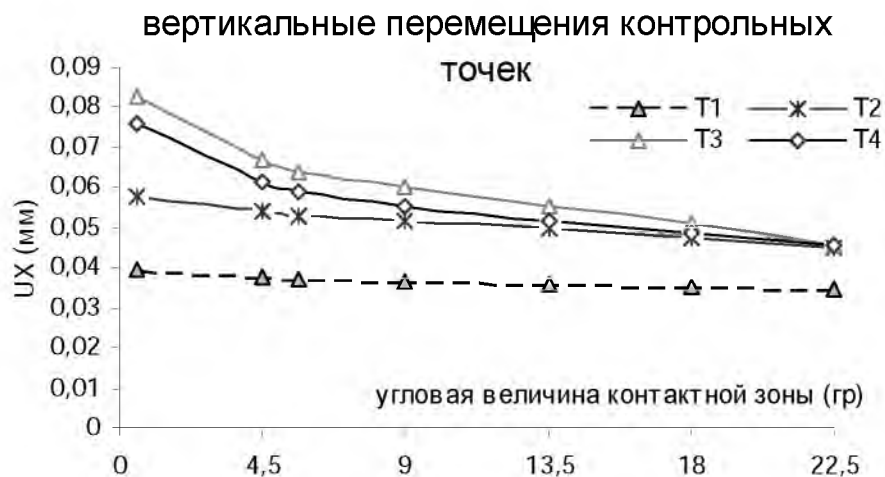
Аналогичные процедуры совершаются и в отношении поверхностей щек водила, контактирующих с осью сателлита.



***Рис. 2.43. Моделирование контактных узлов на поверхности оси сателлита***

На рис. 2.43 показана модель оси с упорядоченной конечноэлементной сеткой, пригодной для объединения узлов оси с узлами сателлита и водила. Поверхность потенциального контакта имеет пять конечных элементов в тангенциальном направлении, т.е. 6 пар узлов при использовании линейных элементов solid45 или 11 пар узлов при использовании квадратичных элементов solid95. Объединяя различное количество пар контактирующих узлов, можно смоделировать различную ширину контактной поверхности с шагом  $2,25^\circ$ .

Увеличение площади поверхности объединения оси и сателлита приводит к увеличению общей жесткости сателлитного узла. Этот факт отражен на графиках (рис.2.44) перемещений контрольных точек T1÷T4 (рис. 2.37) в зависимости от угловой величины зоны моделирования жесткого контакта. В результате проведенного анализа определена оптимальная угловая величина зоны моделирования контакта для альтернативной модели, которая составляет  $13,5^\circ$  при номинальной нагрузке. По предварительным оценкам, на основании исследования контактной модели эта величина составляла  $12^\circ$ .



**Рис. 2.44. Влияние ширины моделируемой контактной зоны на жесткость конструкции**

Изложенный подход позволяет снизить вычислительные ресурсы, требующиеся для расчета данного узла примерно в 150 раз. Требования по оперативной памяти, например, снижены с 622 мб до 4,7 мб по сравнению с контактной моделью.

Построенная по предложенной методике альтернативная модель сателлитного узла успешно заменила контактную модель при исследованиях динамики редуктора, как отдельного компонента силовой установки, так и в составе турбозубчатого агрегата.

## 2.5. Собственные колебания редуктора

### 2.5.1. Собственные колебания кинематической части редуктора

Для анализа взаимного влияния колебаний элементов кинематической части редуктора и корпуса проведен предварительный расчет собственных колебаний кинематической части без корпуса. Для этого водило первой ступени было жестко зафиксировано в точках крепления к обойме, соединяющей его с корпусом. Фиксируются и точки соединения блокирующей муфты 2-й ступени с корпусом, поскольку соединительную муфту 2-й ступени, жестко связанную с корпусом,



допустимо считать частью последнего. Кроме того, закрепляется конец приводного вала со стороны турбины.

Полученные в результате расчета собственные частоты приведены в таблице 2.6, номера парных частот отмечены звездочкой. Описание форм колебаний с некоторыми поясняющими рисунками дается после таблицы.

Таблица 2.6.  
Собственные колебания ходовой части редуктора

N	F (Гц)	N	F (Гц)	N	F (Гц)	N	F (Гц)
1	1,97	11*	70,803	21*	113,99	31*	154,94
2	9,3707	12	72,055	22*	116,57	32*	157,27
3	21,395	13*	83,074	23	122,89	33	161,96
4	23,369	14	88,209	24	129,85	34	165,1
5*	28,84	15*	96,235	25	131,37	35*	171,75
6	29,801	16	98,583	26*	133,03	36	174,37
7*	39,858	17*	100,16	27*	137,77	37*	179,8
8	41,68	18	106,36	28*	138,13	38*	189,4
9*	56,344	19	109,77	29*	150,22	39	195,15
10*	61,615	20*	112,75	30	151,91		

Анализ низкочастотной части спектра собственных колебаний кинематической части:

1 (1,97 Гц). Осевые колебания первой ступени как жесткого целого. Блокирующая муфта, эпицикл (оба венца), сателлиты, солнечная шестерня, вал солнечной шестерни до муфты колеблются на упругом подвесе. Роль подвеса играют подшипники солнечной шестерни, подшипники осей сателлитов, дисковая муфта приводного вала и элементы соединения между блокирующей и соединительной муфтами. С кинематической точки зрения сил, возбуждающих эту форму колебаний, быть не должно.

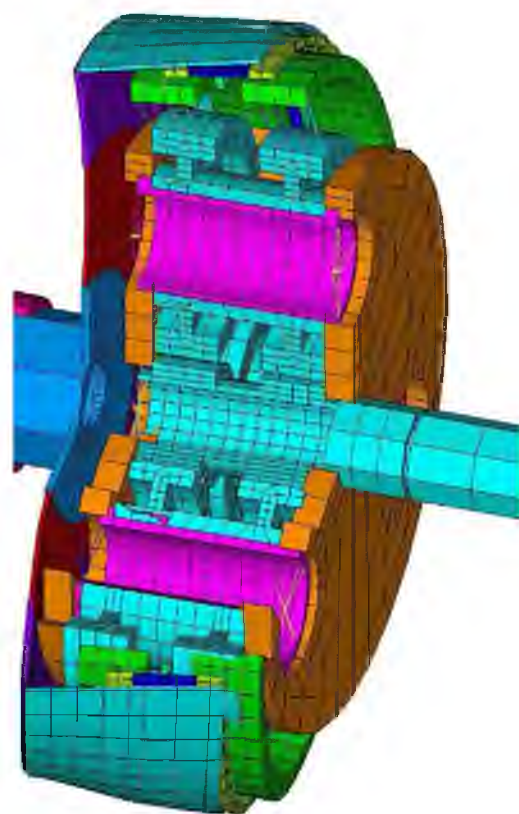
2 (9,37 Гц). Осевые колебания соединительной муфты 1-й ступени с частичной деформацией гибкого диска и торсионного вала на упругом подвесе. Роль подвеса играют пластины дисковой муфты, развязывающей 1-ю и 2-ю ступени, и осевая жесткость зубчатого со-

единения блокирующей и соединительной муфт. Возбуждающих эти колебания сил тоже не должно быть.

3 (21,4 Гц). Осевые колебания тех же элементов, что и в предыдущей форме (№2), но движения барабана и торсионного вала в противофазе. Возбуждающих эти колебания сил не должно быть.

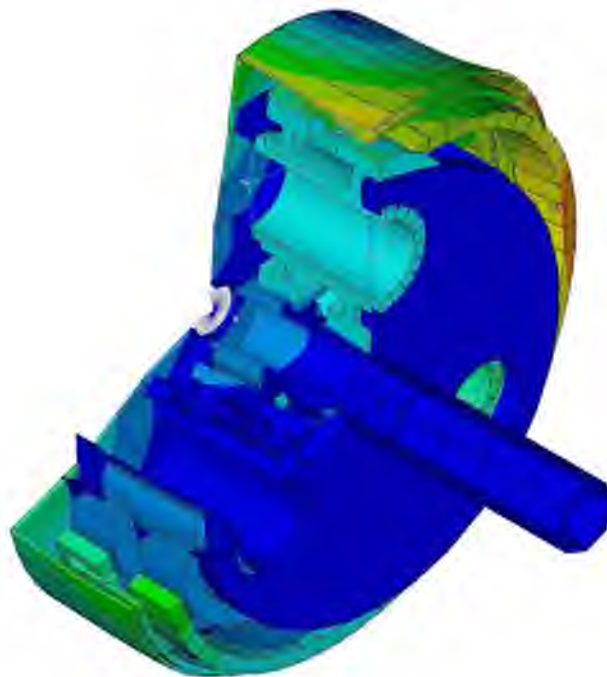
4 (23,37 Гц). Первая форма крутильных колебаний всех звеньев редуктора согласно его кинематике при закрепленном со стороны турбины конце приводного вала. Причинами возбуждения этой формы колебаний могут быть процессы пересопряжения зубьев в обеих ступенях, неуравновешенность весовых нагрузок из-за того, что суммарный момент, вызванный весом сателлитных узлов (при нечетном их количестве), то помогает, то препятствует вращению.

5 (28,8 Гц). 1-я форма деформации всей конструкции соединительной муфты 1-й ступени, сопровождающаяся изгибными колебаниями блокирующей муфты и венцов эпицикла. Эта форма вполне может возбуждаться динамическими силами, возникающими при пересопряжении зубьев. Основные колебательные движения замыкаются на 1-й ступени. Тем не менее, движение центра соединительной муфты связано с поперечными колебаниями торсионного вала. На вторую ступень эти колебания практически не передаются, поскольку гасятся дисковой муфтой. Небольшие колебания солнечной шестерни со стороны турбины гасятся дисковыми муфтами на приводном валу.



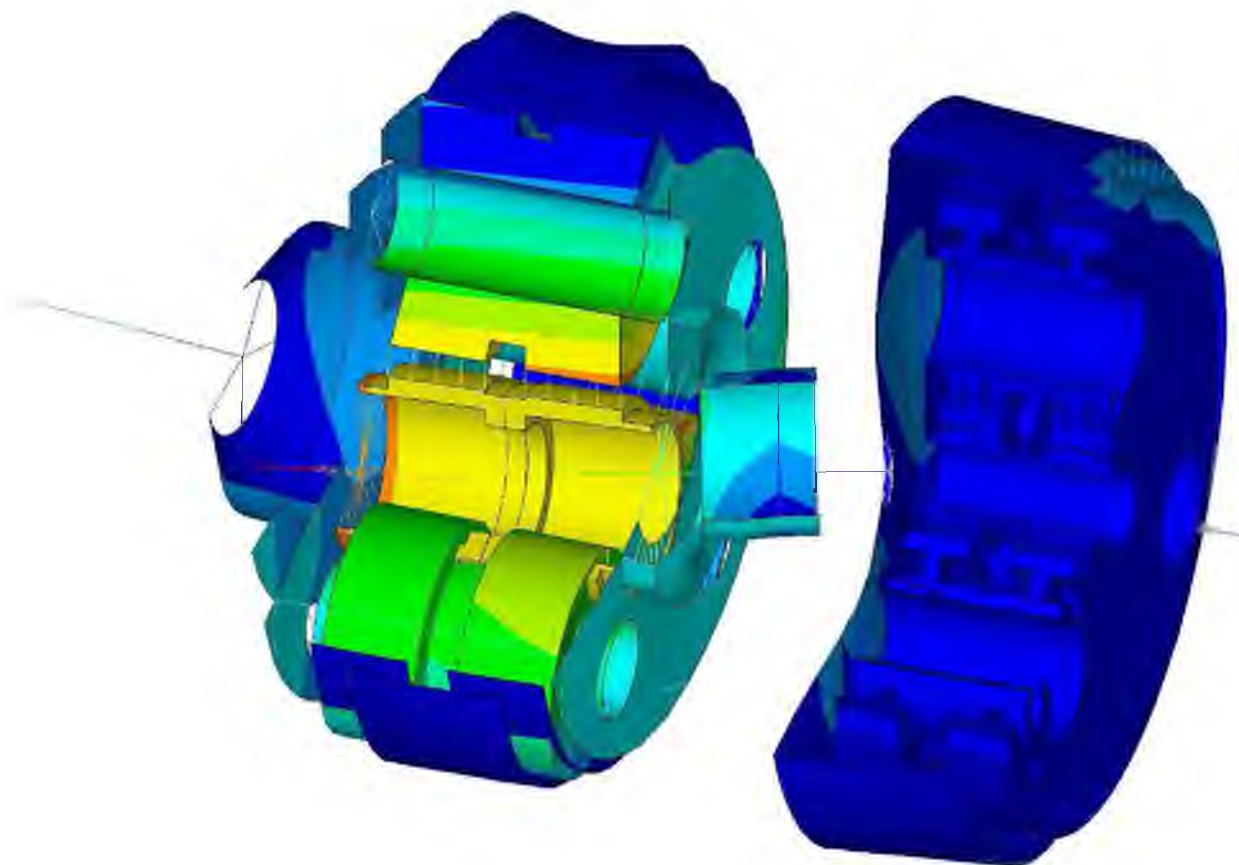
6 (29,8 Гц). Осевые колебания внешней обоймы дисковой муфты приводного вала.

7 (39,9 Гц). 2-я форма деформации всей конструкции соединительной муфты 1-й ступени, сопровождающаяся изгибными колебаниями блокирующей муфты и венцов эпицикла. Эта форма тоже может возбуждаться динамическими силами, возникающими при пересопряжении зубьев. Справедливо все сказанное для формы №5, однако при этой форме колебаний присутствуют осевые движе-



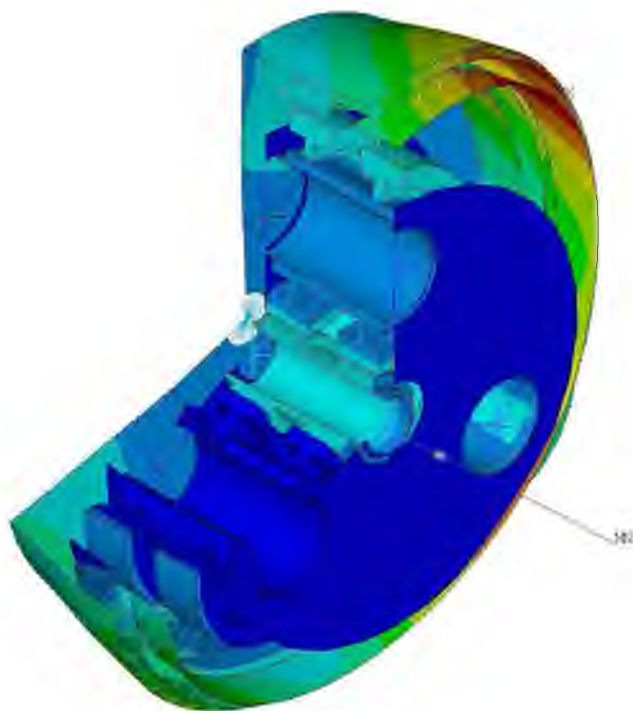
ния сателлитов, которые, возможно, будут блокироваться щеками водила. В таком случае частота этих колебаний будет несколько выше, что может быть уточнено при пересчете с повышенной осевой жесткостью подшипников водило – ось сателлитов.

8 (41,7 Гц). Вторая форма крутильных колебаний всех звеньев редуктора согласно его кинематике при закрепленном со стороны турбины конце приводного вала. Узловая зона находится на торсионном валу.



Колебания торсионного и промежуточного вала вместе с соединяющей их муфтой, сопровождающиеся смещением центра тяжести всей второй ступени, перекосом солнечной шестерни, деформацией носового фланца водила 2-й ступени и перекосом выходного вала. Причиной возбуждения этих колебаний может быть неуравновешенность валопровода, неравномерность распределения нагрузки по сателлитам, возможные перекосы в зубчатых зацеплениях. Эти колебания могут возбуждаться на частотах, кратных частоте вращения торсионного вала.

10 (61,6 Гц). 3-я форма деформации соединительной муфты 1-й ступени. Справедливо все сказанное для 1-й формы (собственная частота №5).

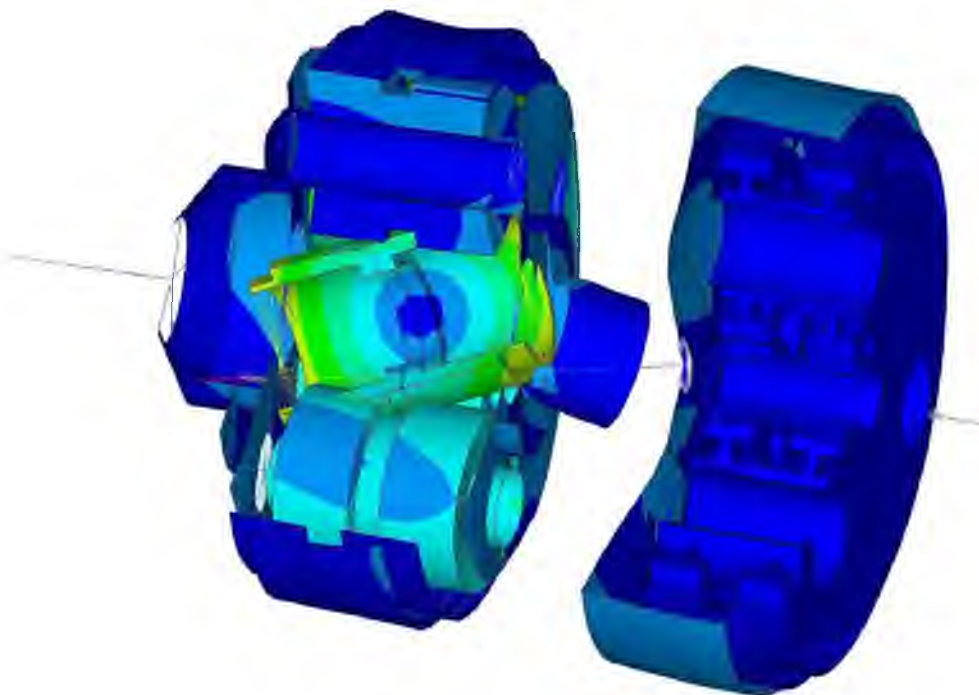


11 (70,8 Гц). 4-я форма деформации соединительной муфты 1-й ступени. В связи с осевыми колебаниями сателлитных узлов справедливо все сказанное для формы №7.

12 (72 Гц). Осевые колебания промежуточного валопровода. Солнечная шестерня 2-й ступени и промежуточный вал колеблются в противофазе по отношению к торсионному валу. Осевые движения солнечной шестерни приводят к перекосам и осевым колебаниям сателлитов. Осевые колебания сателлитных узлов в реальной модели, возможно, блокируются щеками водила, что говорит о необходимости повышения осевой жесткости подшипников осей сателлитов, однако силы, возбуждающие подобные формы колебаний, отсутствуют, и необходимость уточнения модели может быть выявлена после гармонического анализа.

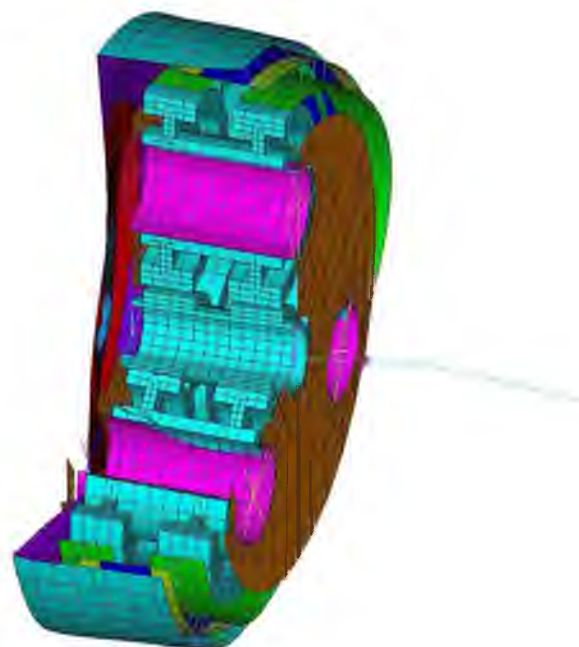
13 (83 Гц). Поворотные колебания солнечной шестерни 2-й ступени. Сопровождаются поворотными колебаниями торсионного и

промежуточного вала, деформацией носового фланца водила и пере-  
косом выходного вала. Силы, возбуждающие эти колебания, отсутст-  
вуют.



14 (88 Гц). 5-я форма деформации соединительной муфты 1-й ступени. По аналогии с дисковыми формами можно классифицировать как форму с 3-мя узловыми диаметрами. Колебания полностью замыкаются на первой ступени и не вызывают колебаний ни торсионного, ни приводного вала. Могут возбуждаться динамическими силами, возникающими при пересопряжении зубьев.

15 (96 Гц). 6-я форма деформации соединительной муфты 1-й ступени. Справедливо все сказанное для формы №5.



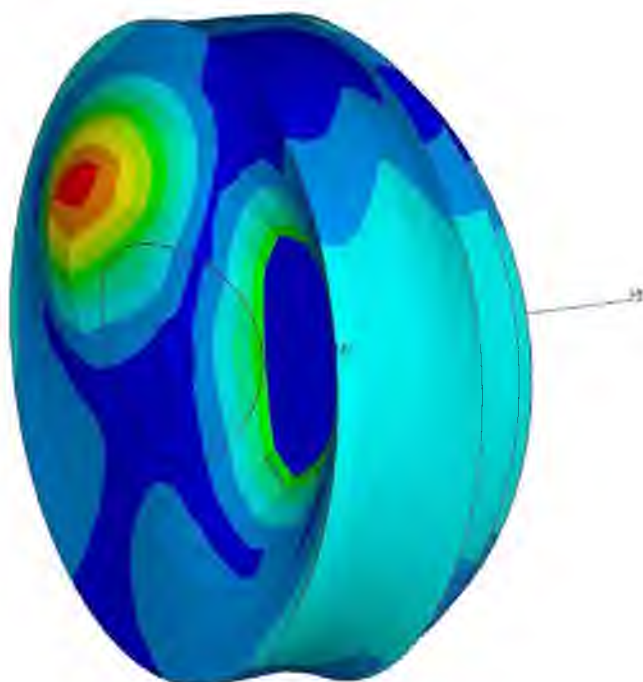
16 (98 Гц). 7-я форма деформации соединительной муфты 1-й ступени. Можно назвать парной 5-й форме с частотным расслоением. Колебания полностью замыкаются на первой ступени.

17 (100 Гц). Аксиальные колебания гибкого диска соединительной муфты 1-й ступени с одним узловым диаметром и одной узловой окружностью. Колебания не распространяются за пределы 1-й ступени.

18 (106 Гц). Аксиальные колебания гибкого диска соединительной муфты 1-й ступени без узловых диаметров и одной узловой окружностью у периферии диска (центр диска практически неподвижен). Следовательно, колебания не распространяются за пределы 1-й ступени.

19 (109,7 Гц). Колебания эпицикла, блокирующей муфты и барабана соединительной муфты 1-й ступени (3 узловых диаметра). Сопровождаются осевыми колебаниями сателлитных узлов и солнечной шестерни, могут возбуждаться пересопряжением зубьев. Возможно, распространяются на приводной вал.

20 (112,7 Гц). Колебания гибкого диска соединительной муфты с перекосом барабана. Возбуждение этих колебаний маловероятно, но возможно, – это может быть определено после гармонического анализа.



21 (114 Гц). Классическая форма колебания гибкого диска соединительной муфты с 2-мя узловыми диаметрами и узловой окружностью на периферии, центр неподвижен. Колебания замыкаются на диске. Возбуждающих их сил нет.

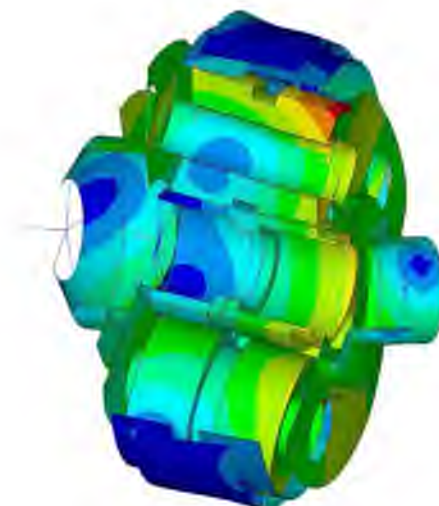
22 (116 Гц). Колебания гибкого диска соединительной муфты с одним узловым диаметром и двумя узловыми окружностями. Колебания связаны с поперечными или изгибными колебаниями торсионного вала. Возбуждение возможно со стороны торсионного вала. Имеет место перекося барабана, деформация блокирующей муфты и эпициклов. На солнечную шестерню практически не передается.

23 (123 Гц). Осевые колебания внешней обоймы дисковой муфты 2-й ступени с незначительными колебаниями торсионного вала.

24 (129,8 Гц). Осевые колебания сателлитов 2-й ступени, сопровождающиеся их перекося и деформацией венцов эпицикла и блокирующей муфты. Характер колебаний соединительной муфты следует уточнять на модели редуктора с корпусом. Колебания будут возбуждаться динамическими силами, возникающими при пересопрежении зубьев сателлитов.

25 (131 Гц). Крутильные колебания водила 2-й ступени с деформацией эпицикла и блокирующей муфты. Солнечная шестерня практически неподвижна. Максимальные амплитуды колебаний на сателлитах.

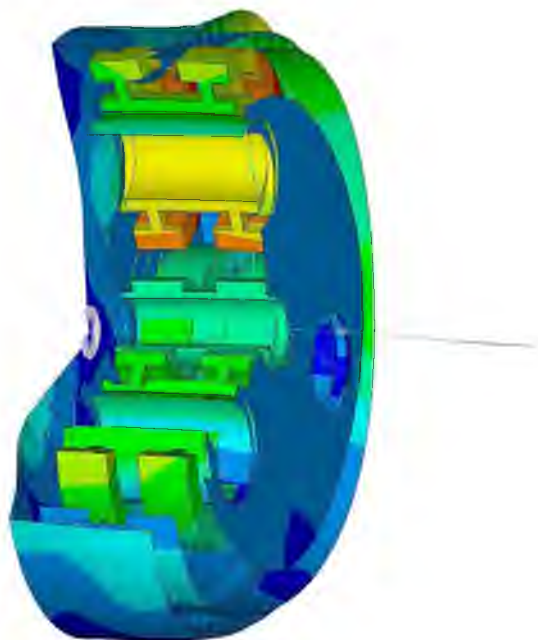
26 (133 Гц). Колебания с перекосям всех основных элементов 2-й ступени.





27 (137,8 Гц). Колебания сателлитов 2-й ступени как жестких тел без перекосов в плоскости перпендикулярной оси вращения.

28 (138 Гц). Колебания элементов 1-й ступени



29 (150 Гц). Колебания валопровода с перекосом солнечной шестерни.

Более высокочастотные формы достаточно сложны, и их описание на данном этапе теряет смысл. К их анализу можно вернуться после проведения гармонического анализа и построения интересующих нас АФЧХ редуктора.

### **2.5.2. Взаимное влияние колебаний кинематической части и корпуса**

Для анализа взаимовлияния кинематической части и корпуса в таблице 2.7 приведены значения собственных частот редуктора в сборе и для сравнения – частоты соответствующих форм колебаний одной кинематической части без корпуса. Редуктор моделировался на таком же, как при исследовании динамики корпуса, подвесе. Конец приводного вала со стороны турбины жестко зафиксирован. Номера парных

частот отмечены звездочкой. Поскольку формы колебаний кинематической части описаны выше, то после таблицы оговариваются только отличительные особенности колебательных процессов, вызванные влиянием корпуса.

Таблица 2.7.

Собственные частоты кинематической части и редуктора в сборе

№	х. часть	редуктор	№	х. часть	редуктор
1	1,97	1,97	13	29,801	29,8
2		6,8296	14*	39,858	36,163
3	9,3707	9,852	15	41,68	42,892
4		11,974	16*	56,344	52,5/53,3
5		12,386	17*	61,615	62,849
6		13,293	18*	70,803	68,187
7		16,999	19	72,055	78
8		18,598	20*	83,074	77,043
9		20,584	21	88,209	86,99
10	21,395	21,516	22*	96,235	94,349
11	23,369	28,045	23*	98,583	96,241
12*	28,84	28,741			

Визуальный анализ рассчитанных форм колебаний показал следующее:

формы №5-8 соответствуют движениям редуктора как жесткого целого на упругом подвесе;

форма №2 – осевые колебания корпуса, второй ступени и соединительной муфты 1-й ступени как жесткого целого, а фиктивные пружины, моделирующие соединение блокирующая – соединительная муфты 1-й ступени, играют роль элементов упругого подвеса;

форма №4 соответствует совместным колебаниям корпуса и всей 2-й ступени как жесткого целого на подвесе с деформацией соединительной муфты 1-й ступени и перекосам элементов 1-й ступени.

Исследование этих форм теряет смысл без моделирования реальных условий закрепления корпуса редуктора.

9-я форма колебаний соответствует колебаниям внутренней переборки корпуса, выявленной при исследовании динамики корпуса.

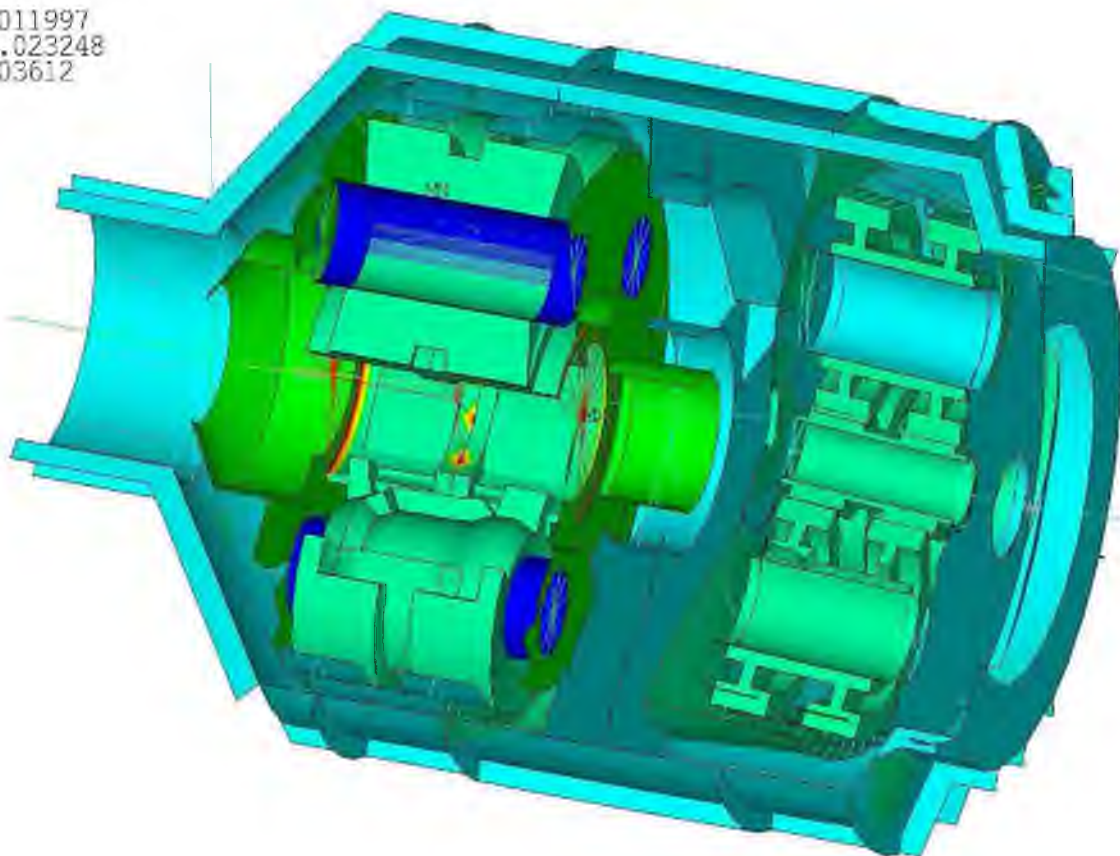
Для остальных, приведенных в таблице 2.7 собственных форм колебаний, частоты колебаний редуктора в сборе за редким исключением незначительно снизились по отношению к соответствующим колебаниям кинематической части, а формы практически осталась прежними.

Особое внимание следует обратить на форму взаимных колебаний №11. Теперь корпус синхронно вращается с блокирующей муфтой 2-й ступени. В отличие от прежней формы крутильных колебаний кинематической части в модели редуктора с корпусом наблюдаются существенные деформации соединительной муфты 1-й ступени (рис. 2.45). При фиксации в модели поверхностей корпуса форма колебаний нормализуется, а частота падает до 23 Гц.

Такое не характерное поведение конструкции можно объяснить следующим образом. Снятие ограничения на движение корпуса, во-первых, включает в состав колеблющейся системы дополнительную массу – корпус. Во-вторых, движение корпуса на вертикальном подвесе вызывает его угловое смещение относительно приводного вала, приводящее к перекосу солнечной шестерни и перераспределению усилий в зубчатых зацеплениях первой ступени. Это приводит к возникновению дополнительных сил, препятствующих вращению элементов редуктора.

Такое объяснение снимает возникающие подозрения о наличии ошибок моделирования и одновременно подчеркивает важность тщательного моделирования реального подвеса корпуса при исследовании динамики редуктора, по крайней мере, на частотах, близких к указанной.

FREQ=28.045  
ROTX (AVG)  
RSYS=0  
DMX =.011997  
SMN =.023248  
SMX =.03612



***Рис. 2.45. Перекосы соединительной муфты первой ступени при допускаемых кинематической схемой крутильных колебаниях элементов редуктора***

Частота второй формы крутильных колебаний – форма № 15 в таблице 2.7 – незначительно повысилась. Сама форма колебаний изменилась: появилась изгибная деформация соединительной муфты первой ступени.

Повысилась частота и формы №17. В связи с колебаниями корпуса как жесткого целого стали более значительными перекосы солнечной шестерни первой ступени.

Еще одно замечание следует сделать по форме № 20. Влияние корпуса сказывается на том, что теперь колебания носовой части корпуса приводят к колебаниям элементов 1-й ступени с перекосами сол-

нечной шестерни и вибрация может распространяться не только на тихоходный вал, но и в направлении турбины. Вывод о возможности возбуждения этих колебаний в результате пересопряжения зубьев можно сделать только после гармонического анализа.

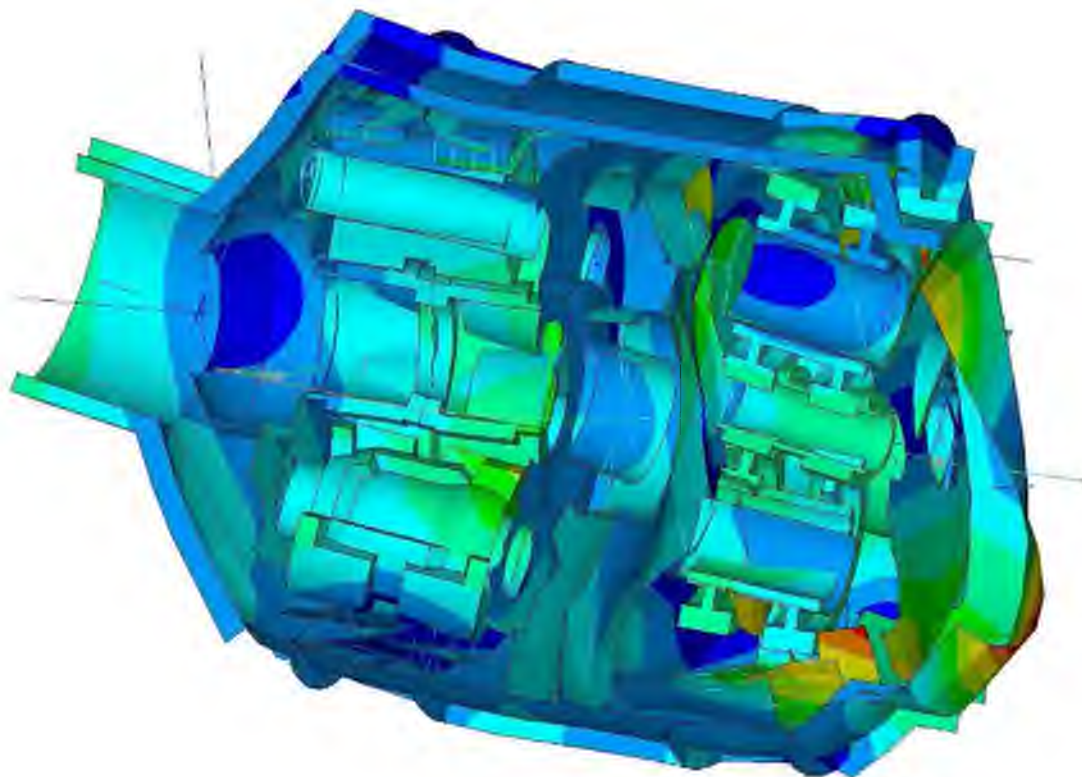
Более высокочастотные формы собственных колебаний кинематической части и редуктора в сборе тяжелее поддаются визуальному сравнению из-за их сложности. Поэтому в таблице 2.8 показаны частоты только редуктора в сборе и в колонке тип колебаний отмечено, является ли эта форма колебаний чисто внутренней – «вн» или это совместные колебания, т.е. колебания кинематической части, взаимодействующие с корпусом, – «совм».

Таблица 2.8.  
Высокочастотные формы колебаний редуктора

№	f	Тип	№	f	Тип	№	f	Тип
24	96,243	Вн	35	121,27	вн	46	141,91	совм
25*	99,595		36	123,15		47	142,54	
26	100,53		37*	123,76		48	143,77	
27	106,34		38	124,12		49	144,26	
28*	108,08		39	128,15		50	144,98	
29*	111,12		40*	130,03	51	151,95		
30	113,81		совм	41	132,29	52	152,33	
31*	115,94	Совм	42*	134,6	вн	53*	154,94	вн
32*	116,07		43	136,7		54	155,11	
33*	120,38		44	138,17		55*	155,33	
34*	121,22	вн	45*	140,56		56	156,24	
					совм			

Приводить и анализировать формы собственных колебаний, частота которых выше 160 Гц, на данном этапе не имеет смысла, поскольку начинают играть роль принятые на этапе моделирования кор-

пуга допущения. Так, на частоте 161 Гц (рис. 2.46) мы имеем форму со значительной деформацией носовой крышки, которая моделировалась упрощенно, без имеющегося в реальности оребрения (рис. 6.5). Решение о необходимости уточнения модели может быть принято только после проведения расчета вынужденных колебаний.



*Рис. 2.46. Одна из высокочастотных (161 Гц) форм колебаний редуктора*

Сравнение результатов, полученных при расчете собственных колебаний кинематической части и редуктора в сборе, позволяет сделать вывод о необходимости более тщательного моделирования реального подвеса корпуса.

Но даже на данном этапе можно с уверенностью сказать, что моделирование реальных условий закрепления корпуса не повлияет на формы чисто внутренних колебаний. Частоты совместных колебаний в диапазоне до 200 Гц практически не изменятся, кроме формы №11. Собственная частота №11 будет лежать в диапазоне 23–28 Гц.

### 2.5.3. Учет особенностей системы подвеса и амортизации редуктора

В реальных условиях эксплуатации корпус крепится согласно схеме, приведенной на рис. 2.47, 2.48. Вес редуктора воспринимается двумя вертикальными подвесами Г и Д, опирающимися на раму через блоки амортизаторов, конструкция которых детально показана на рис. 2.49.

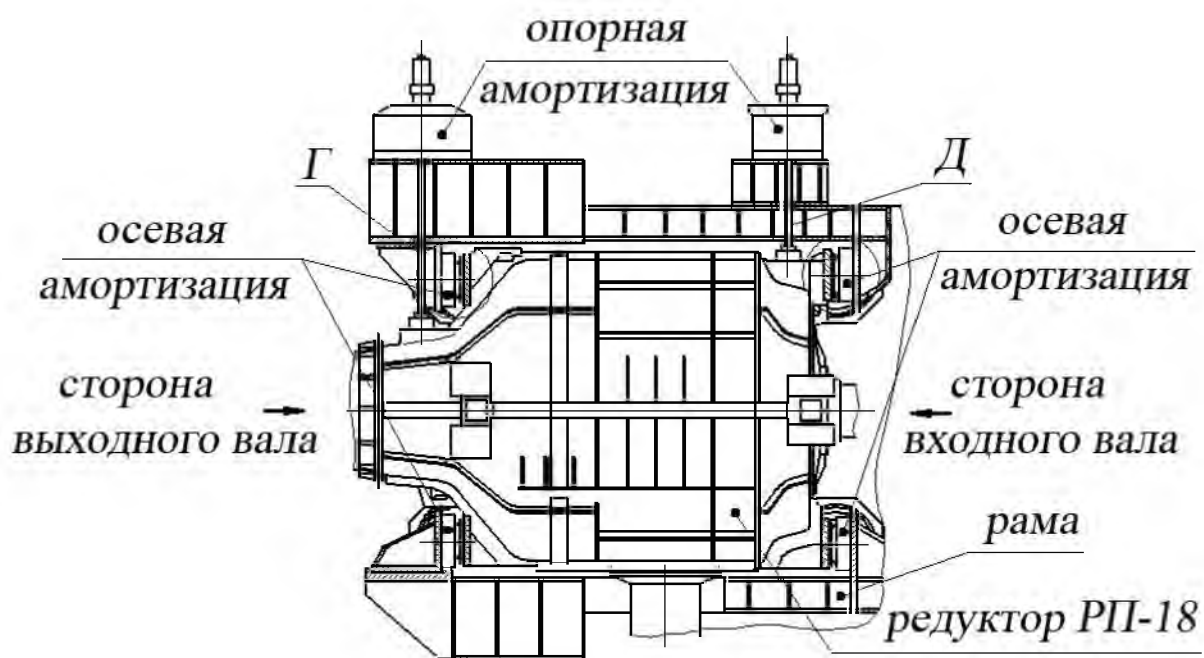


Рис. 2.47. Схема крепления и амортизации редуктора (вид сбоку)

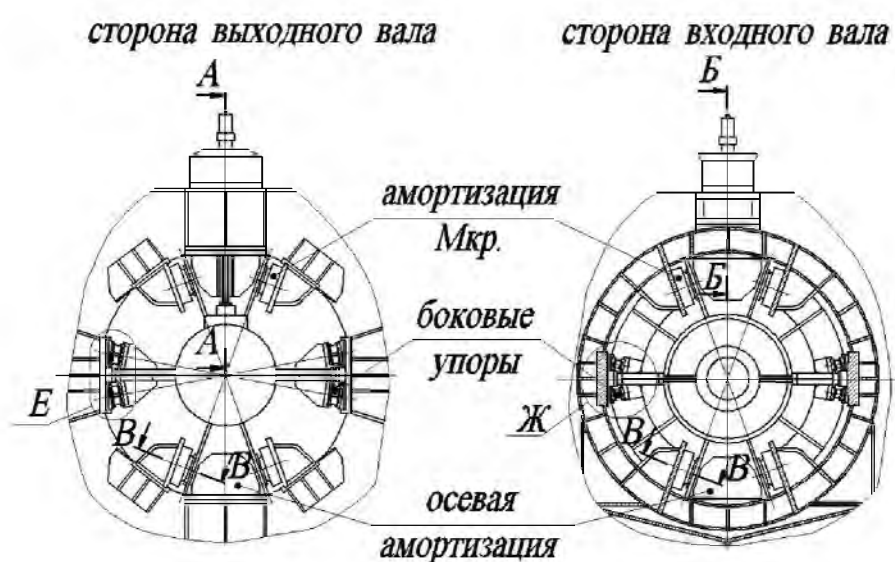
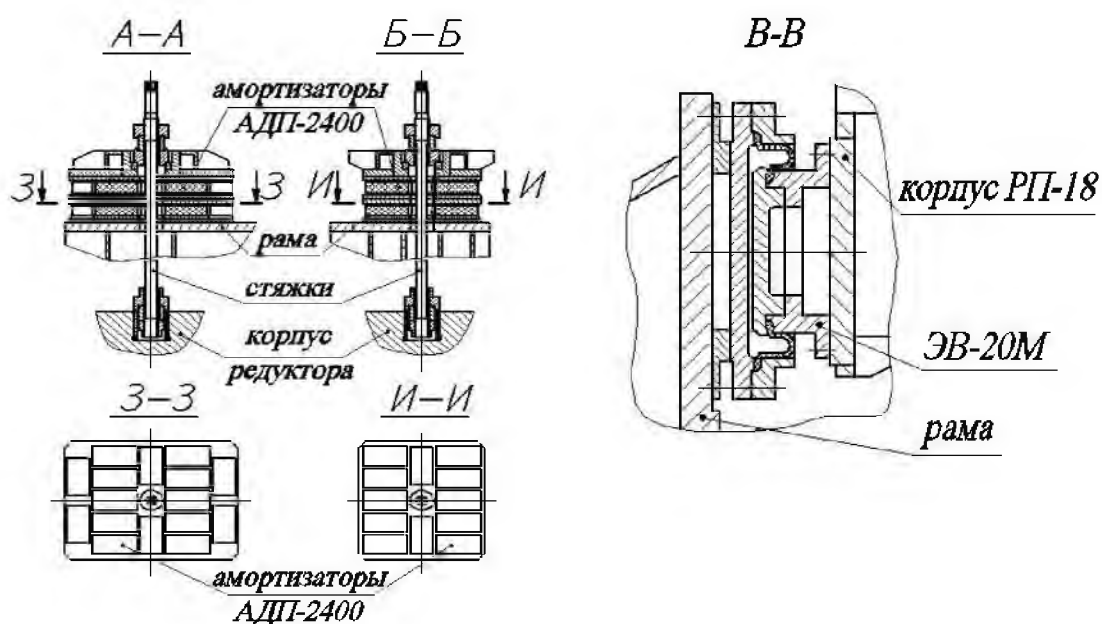


Рис. 2.48. Схема крепления и амортизации редуктора (вид со стороны входного и выходного валов)

Кормовой блок (Г) содержит 2 пакета по 8 амортизирующих элементов АДП-2400 в каждом. Носовой блок комплектуется двенадцатью аналогичными элементами. Такими же амортизаторами корпус удерживается от боковых движений. Комплекты кормовых (Е) и носовых (Ж) амортизаторов состоят из 8-ми и 4-х элементов соответственно (рис. 2.50). От осевых перемещений корпус удерживается 4-мя виброизолирующими элементами ЭВ-20, роль упругого элемента в которых играет закаченный под давлением во внутреннюю полость воздух (рис. 2.49). Эти элементы обладают достаточно мягкой жестко-стойкой характеристикой. Комплекты из 4-х таких элементов в кормовой и носовой частях воспринимают крутящий момент редуктора.



**Рис. 2.49. Конструкция амортизации вертикальных подвесов (сечения А-А, Б-Б, В-В, см. рис. 2.48)**



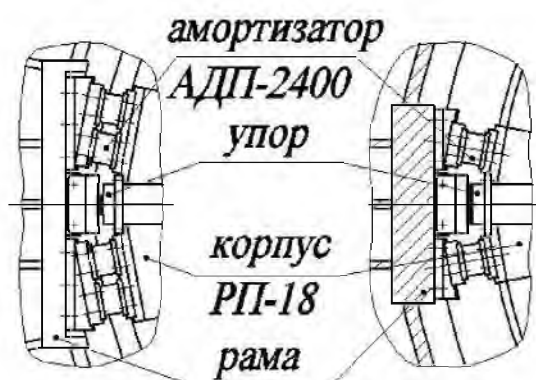


Рис. 2.50. Элементы Е и Ж (см. рис.2.48)

В результате заводских экспериментальных исследований были получены характеристики демпфирующих и виброизолирующих элементов. Статическая (вибрационная) жесткость одного элемента АДП-2400 [кг/см]:

$$k_x = 1700 (3400); k_y = 1375 (2700); k_z = 7300 (15200),$$

коэффициент демпфирования  $c_z = 0,23$  кг/с.

Вибрационная жесткость элементов (ЭВ-20):

$$k_z = 7043 \text{ кН/м}; k_x = k_y = 220 \text{ кН/м}; \text{ коэффициент демпфирования } c_z = 0,23$$

кг/с.

Таблица 2.9.

Жесткостные и демпфирующие характеристики системы крепления корпуса редуктора

опора	Вибрационная жесткость Н/м	Коэффициент демпфирования Кг/с.
Кормовой подвес.	$k_y = 1,19E8$	$c_y = 1.84$
Носовой подвес.	$k_y = 0,9E8$	$c_y = 1.38$
Верхние и нижние кормовые и носовые опоры.	$k_x = 1.E7$ $k_y = 0.5E7$ $k_z = 1.5E7$	$c_x = 0.005$ $c_z = 0.01$
Боковые кормовые опоры.	$k_z = 0.59E8$ $k_y = 0.1E8$	$c_y = 0.16$ $c_z = 0,905$
Боковые носовые опоры.	$k_z = 0.29E8$ $k_y = 0.5E7$	$c_y = 0.08$ $c_z = 0,452$

Согласно принятой при моделировании системе координат и конструкции подвесов редуктора, вычисленные характеристики элементов крепления модели приведены в таблице 2.9.

Таблица 2.10.

Низкочастотные формы собственных колебаний редуктора с учетом системы подвеса и амортизации

№	f	ОПИСАНИЕ
1	1,97	Без изменений
2	6,17	Без изменений
3	8,75	Крутильные колебания всего редуктора как жесткого целого на подвесе
4	9,65	Без изменений
5	12,35	Боковые колебания редуктора на подвесе с поворотом в горизонтальной плоскости и перекосом с.ш. 1-й степени и осевой деформацией гибкого диска соединительной муфты 1-й ступени.
6	12,74	Вертикальные колебания редуктора как жесткого целого с перекосом элементов 1-й ступени
7	17,17	Повороты корпуса вокруг центра масс в горизонтальной плоскости с перекосом элементов 1-й ступени
8	18,27	Повороты корпуса вокруг центра масс в вертикальной плоскости с перекосом элементов 1-й ступени
9	20,55	Без изменений
10	21,5	Без изменений
11	27,18	Вторая форма крутильных колебаний согласно кинематике, узел в районе торсионного вала

Введение в математическую модель характеристик системы крепления редуктора и перерасчет его собственных колебаний позволяют констатировать существенное влияние жесткости крепления на некоторые формы собственных колебаний редуктора в нижней части спектра. Номера этих форм и их описание приведены в таблице 2.10. Особо следует обратить внимание на «нормализацию» крутильных колебаний. Появилась первая форма крутильных колебаний (форма №3 по таблице): весь корпус совершает крутильные колебания вокруг оси OX как жесткое целое, а роль упругого подвеса играет приводной вал и пружины, моделирующие зубчатое зацепление солнечной шес-

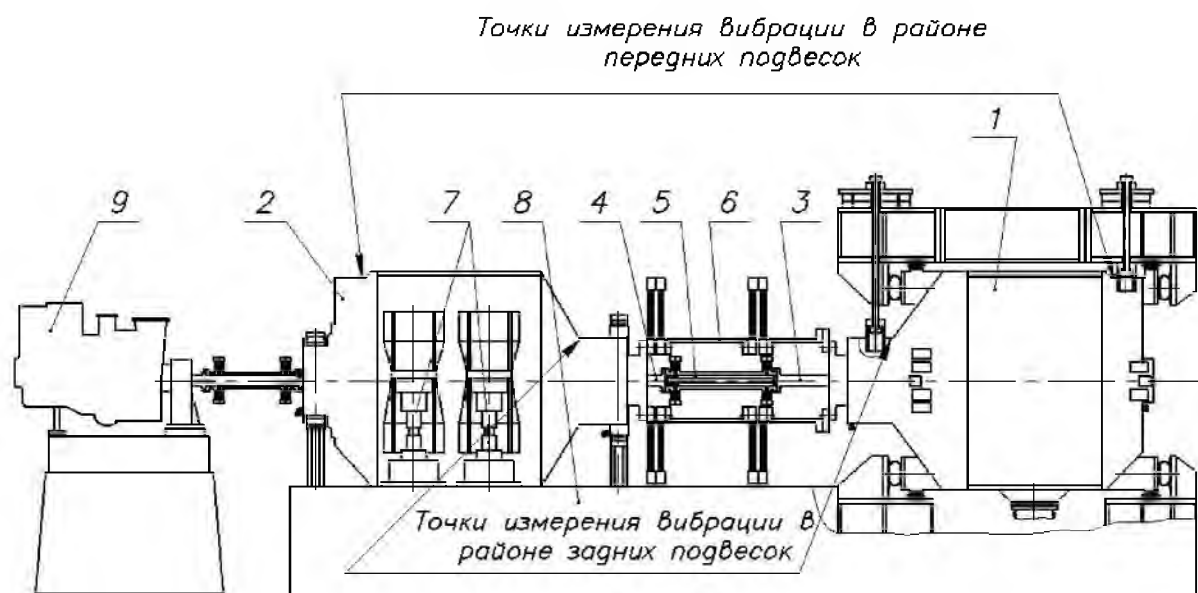
терни 1-й ступени. Вторая форма крутильных колебаний (форма №11 по таблице) стала похожа на крутильные колебания кинематической части без корпуса. Исчезли крайне нежелательные деформации соединительной муфты первой ступени, проявившиеся при недостаточной жесткости креплений корпуса.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что жесткость штатного подвеса близка к оптимальной. Снижение жесткости приведет к изменению формы колебаний №11, появлению деформаций соединительной муфты 1-й ступени на этой резонансной частоте и, следовательно, повышению вибрации, вызванной этой деформацией. Повышение жесткости креплений приведет к повышению уровня вибрации, передаваемой на раму.

## **2.6. Верификация**

Для апробации разработанной методики моделирования и проверки адекватности разработанной модели планетарного редуктора проведены расчеты динамики редуктора в составе испытательного стенда. Выбор испытательного стенда в качестве объекта моделирования обусловлен наличием экспериментальных данных, полученных на Калужском турбинном заводе, а также результатов расчетов стендовых редукторов с помощью более простых моделей в ИМАШ РАН.

Схема расположения основных узлов стенда с точками установки вибродатчиков показана на рис. 2.51. Приводом стенда служит паровая турбина (9). Отличительной особенностью испытательного стенда собранного по принципу замкнутого силового контура является отсутствие нагрузочных устройств (например, тормозной муфты). В связи с этим подводимая энергия тратится только на преодоление сил сопротивления внутри редуктора, что позволяет использовать приводную турбину малой мощности для испытания редукторов на номинальных режимах.

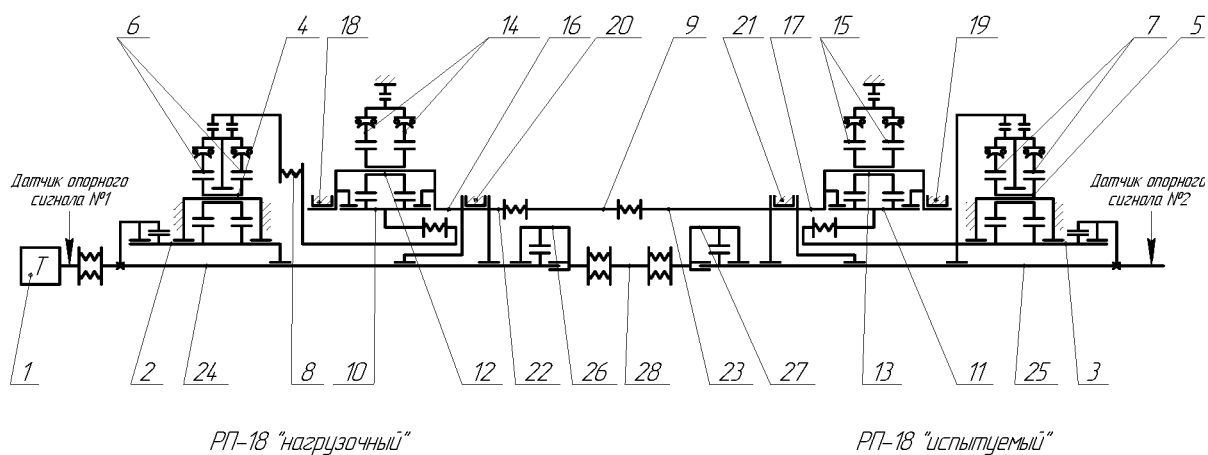


**Рис. 2.51. Схема стенда для испытаний РП-18**

В состав стенда входят два идентичных редуктора: испытуемый (1) и нагрузочный (2). Входные валы обоих редукторов связаны торсионами (3,4), проходящими внутри редукторов и замкнутыми на высокооборотную муфту (5), расположенную внутри низкооборотной муфты (6), соединяющей выходные валы. Нагружение осуществляется сервомоторами (7), разворачивающими относительно рамы (8) корпус нагрузочного редуктора вокруг центральной оси стенда. Нагрузка в зубчатых зацеплениях редукторов зависит от угла взаимного разворота их корпусов.

Для измерения вибрации опытных образцов редукторов использовались пьезоэлектрические акселерометры, устанавливаемые на корпусах обоих редукторов в районе крепления к корпусу штоков передней и задней подвесок. В каждой точке крепилось по три датчика для измерения вибрации в трех взаимно перпендикулярных направлениях (X – вдоль оси вращения, Y – вертикально, Z – перпендикулярно осям X и Y).

Кинематическая схема стенда для испытания редукторов, отражающая основные моделируемые элементы, изображена на рис. 2.52.



**Рис. 2.52. Кинематическая схема испытательного стенда. 1 – турбопривод; 2,3 – солнечные шестерни 1-й ступени; 4,5 – сателлиты 1-й ступени; 6,7 – вены 1-й ступени; 8 – гибкий диск колпаковой муфты; 9 – главная муфта; 10,11 – солнечные шестерни 2-й ступени; 12,13 – сателлиты 2-й ступени; 14,15 – вены 2-й ступени; 16,17 – водила 2-й ступени; 18,19 – опорные подшипники водил 2-й ступени; 20,21 – опорно-упорные подшипники водил 2-й ступени; 22,23 – выходные валы; 24 – торсион левый; 25 – торсион правый; 26,27 – шлицевые муфты торсиона; 28 – гибкая муфта торсиона**

Для контроля текущего значения нагружающего момента в зацеплении использовались индуктивные датчики частоты вращения, расположенные на противоположных концах стендового валопровода. Нагружающий момент определялся по изменениям фазы взаимного спектра сигналов от этих датчиков, характеризующим угол скручивания стендового валопровода.

Из рис. 2.51 видно, что схемы крепления редукторов на стенде различны. Крепление нагрузочного редуктора отличается от штатного ввиду наличия сервомоторов. Испытуемый редуктор крепится согласно схеме, соответствующей условиям его эксплуатации. При моделировании стенда в данной работе было принято решение испытуемый редуктор моделировать с учетом системы подвеса и амортизации кор-

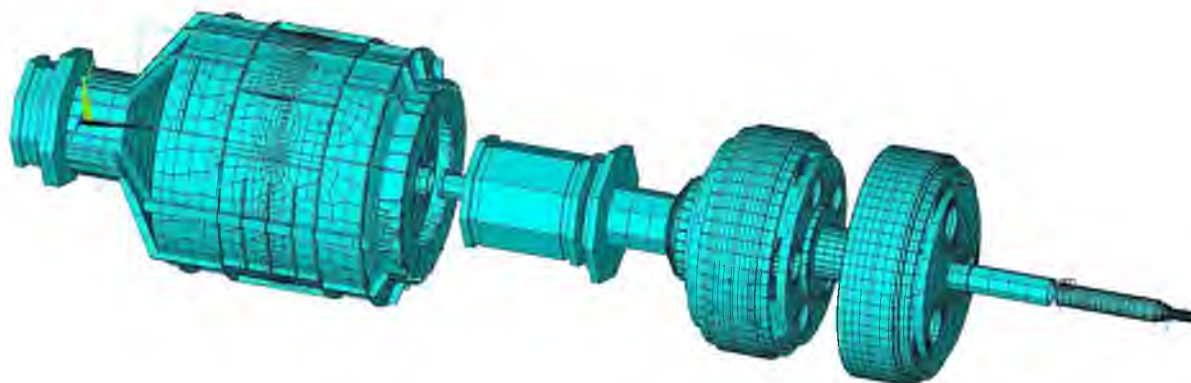
пуса, а нагрузочный – упрощенно. У нагрузочного редуктора моделируется только кинематическая часть, как это было рассмотрено в разделе 6.3. Такое решение было принято в предположении, что взаимовлияние колебаний редукторов незначительно и отсутствие корпуса у нагрузочного редуктора не окажет ощутимого влияния на расчетные характеристики испытуемого, что подтверждается расчетами с помощью более простых моделей, проведенными в ИМАШ РАН.

Поскольку кинематические части моделируемых нагрузочного и испытуемого редукторов идентичны, то построение второго редуктора осуществляется путем копирования отвечающей за построение необходимого фрагмента системы программы. Однако при такой методике моделирования исследуемый редуктор оказывается развернутым на  $180^\circ$  относительно оси Y.

Исправить ситуацию, не переделывая программу построения модели, можно, откорректировав матрицы жесткости гибких дисков тихоходной и быстроходной полумуфт, соединяющих валопроводы обоих редукторов. При развороте одного из редукторов величины коэффициентов жесткости не изменятся, но изменится знак направления движений по степеням свободы, соответствующим линейным и угловым движениям относительно осей X и Z. Соответствующие коэффициенты матриц жесткости меняют знак:

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\varphi x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{\varphi y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi z} \\ k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\varphi x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{\varphi y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi z} \end{bmatrix}.$$

Так незначительные изменения кода программы позволяют использовать его повторно. На рис. 2.53 показана модель испытательного стенда, часть компонентов которой определяется не визуальными элементами и поэтому не отображена на рисунке. К таким компонентам относятся дисковые муфты, рабочие диски ротора турбины, элементы подвеса и амортизации корпуса.



*Рис. 2.53. Конечноэлементная модель испытательного стенда*

При исследовании виброактивности редуктора на частоте пересопрежения зубьев к пружинам – связям, моделирующим зубчатые зацепления солнечная шестерня – сателлит и сателлит – эпицикл соответствующих ступеней, прикладывается гармоническое силовое воздействие. В программе это делается непосредственно при моделировании пружины, после того как определены оба узла нового упругого элемента. Усилие  $f'_z$  прикладывается к обоим узлам элемента, но в противоположных направлениях вдоль локальной оси  $Z'$ :

$$\{F'\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f'_z \end{Bmatrix} = [a]^{-1} \{F\}.$$

С учетом матрицы преобразования пространства  $[a]$  для глобальной системы координат силовое воздействие можно записать следующим образом:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_z \cos(a) \sin(b) \\ -f'_z (\cos(al) \sin(a) + \cos(a) \cos(\beta) \sin(al)) \\ f'_z (\cos(a) \cos(al) \cos(b) - \sin(a) \sin(al)) \end{Bmatrix},$$

где угловые величины те же, что и при определении матрицы жесткости пружины (табл. 2.1). Амплитуды возмущающих воздействий получены методом идентификации в ИМАШ РАН. Четное количество зубьев сателлитов обеих ступеней позволяет реализовать противофазное возбуждение сателлитов. Нечетное, - синфазное. Более подробно о фазовых смещениях возбуждающих сил говорится в разделе 4.1

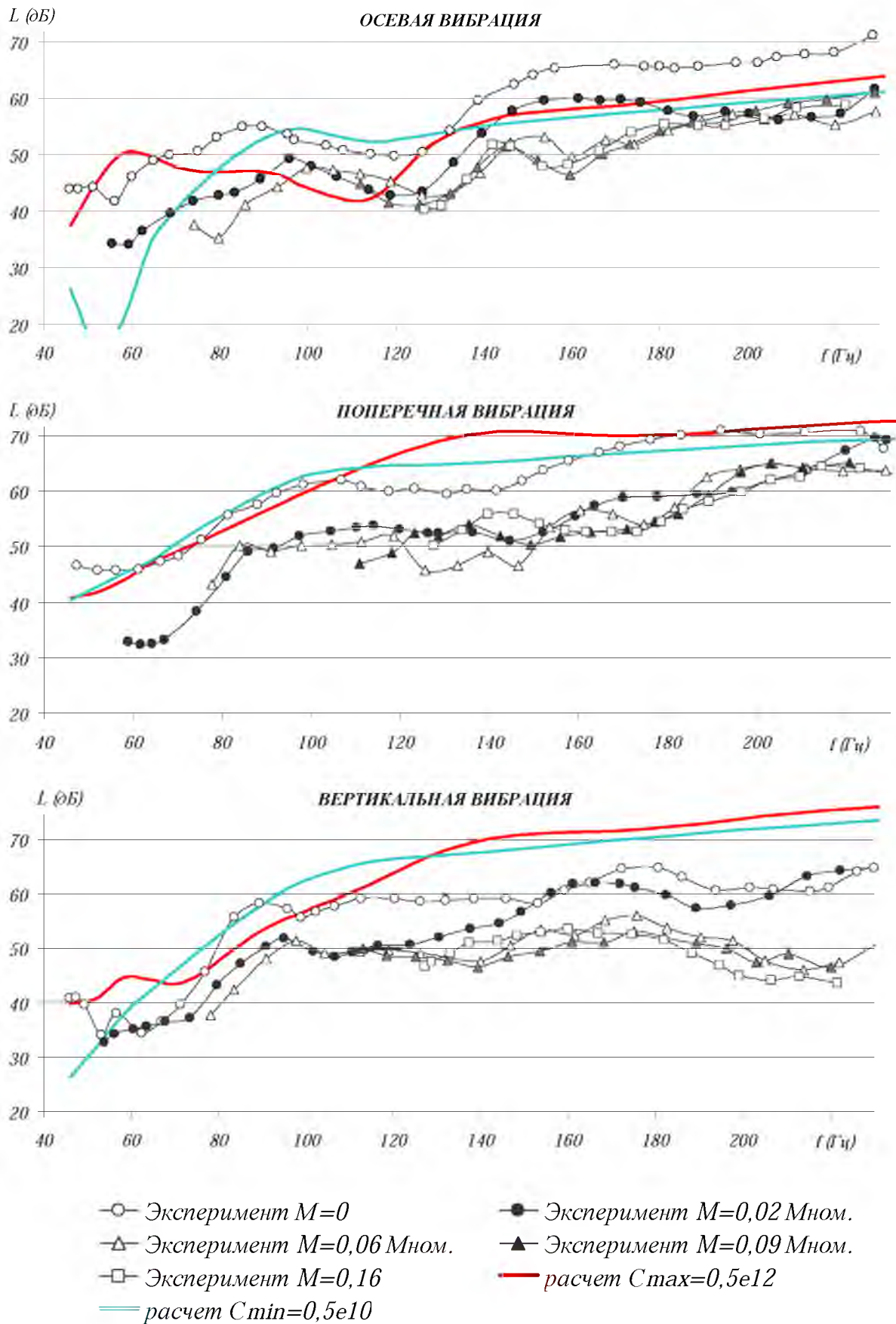
В результате расчетов были получены отклики системы в контрольных точках на гармоническое возбуждение, аппроксимирующее процесс пересопряжения зубьев 2-й ступени испытуемого и нагрузочного редукторов.

В качестве контрольных точек взяты места крепления вибродатчиков у испытуемого редуктора, указанные на рис.2.51.

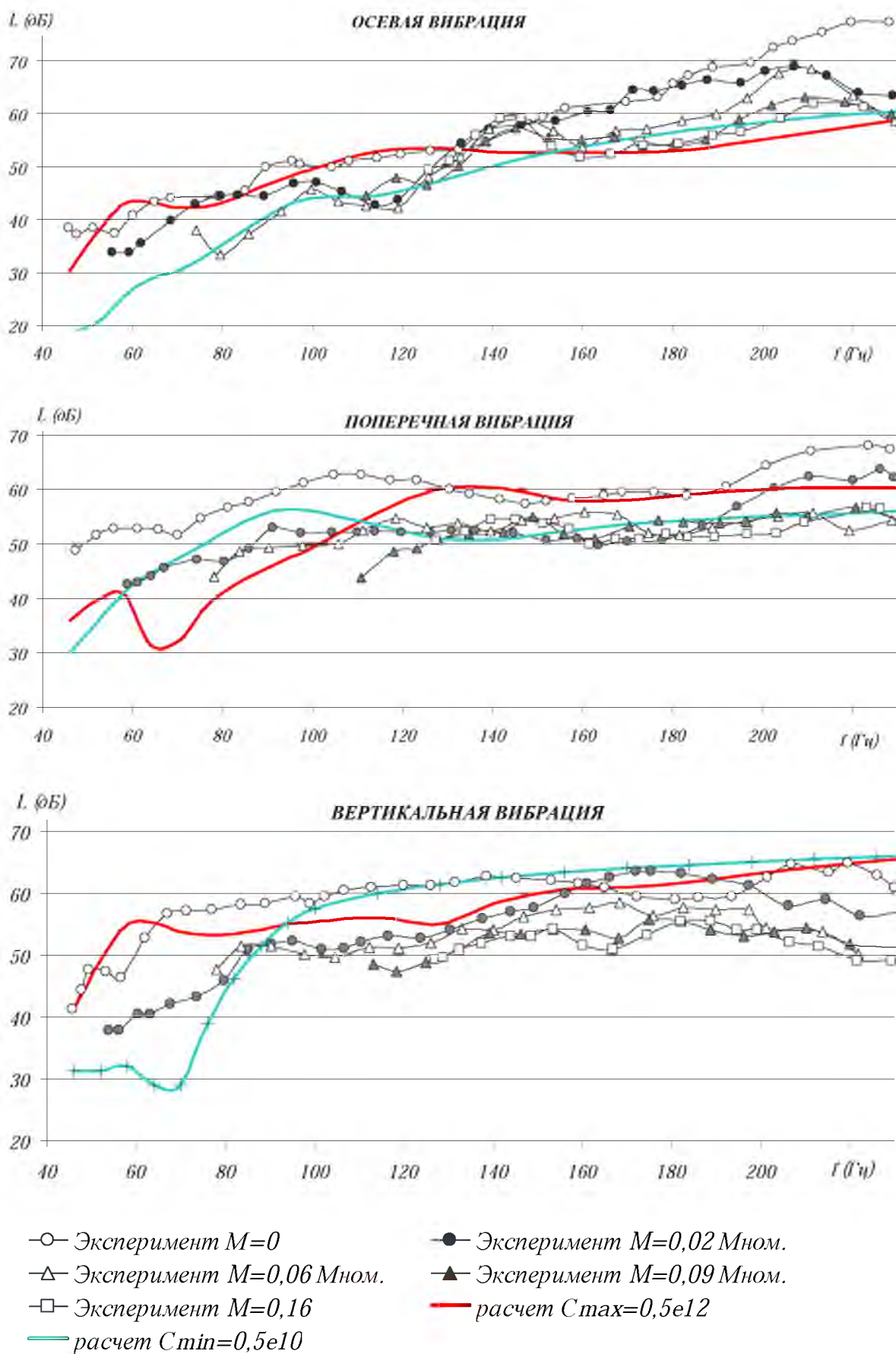
Предварительная оценка результатов показала, что амплитуда отклика на корпусе испытуемого редуктора при его возбуждении на 3-4 порядка больше, чем при возбуждении в нагрузочном редукторе. Это подтверждает справедливость допущения о слабом влиянии корпуса нагрузочного редуктора на динамику испытуемого редуктора. Следовательно, отсутствие корпуса нагрузочного редуктора при исследовании динамики испытуемого редуктора в составе испытательного стенда можно считать вполне корректным.

В результате сравнения расчетов отклика в контрольных точках с результатами эксперимента были подобраны параметры жесткости и демпфирования опорного (носового) и опорно-упорного (кормового) подшипников водила 2-й ступени. Таким образом, было достигнуто максимальное приближение математической модели к реальному объекту (рис. 2.54, 2.55).





**Рис.2.54. Виброускорение в точке крепления носового вертикально-го подвеса**



**Рис.2.55. Виброускорение в точке крепления кормового вертикального подвеса**

Анализ полученных результатов, точнее их сходства с экспериментальными данными, позволяет говорить о достаточно высокой степени их достоверности и признать математическую модель испытательного стенда и, в частности модель редуктора, адекватно отражающими динамические свойства моделируемых объектов в исследуемом диапазоне частот.

## **2.6. Выводы**

В результате проведенных исследований разработаны методики построения математических моделей планетарных редукторов и их отдельных узлов, а именно – корпусных конструкций, систем подвеса и амортизации, элементов кинематической части, упрощенных математических моделей зубчатых зацеплений и соединений, дисковых муфт для исследования динамических характеристик планетарных редукторов.

Построена нового поколения математическая модель планетарного редуктора на базе МКЭ. В отличие от предыдущих, данная модель позволяет учитывать податливость всех узлов кинематической части. Кроме того все компоненты редуктора и системы его подвеса моделируются более точно.

Методика моделирования предусматривает нахождение параметров модели, при которых соотношение точности расчета к требуемым вычислительным ресурсам оптимально.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБОАГРЕГАТОВ В СОСТАВЕ ГТЗА

#### 3.1. постановка задачи.

Приобретенный автором опыт численных исследований показал, что при расчете сложных систем, когда размерность матриц становится столь большая, что возникает желание воспользоваться многопроцессорной или кластерной системой распределенных вычислений, возникает еще одна серьезная проблема – погрешности вычислений. Чем больше матрица системы, тем больше накопленные погрешности. Особенно чувствительны к погрешностям вычислений процессы решения нелинейных задач. Так, например, при расчете динамики рабочего колеса турбоагрегата в поле центробежных сил с учетом геометрической нелинейности ограничений по вычислительным ресурсам не возникало: вполне хватало 256 мб оперативной памяти. Однако при использовании 32-х битных вещественных переменных из-за накопленных погрешностей округления вычислительный процесс переставал быть сходящимся. 64-х битные переменные решали проблему, но использование обычного и оптимизирующего компиляторов давало результаты, отличающиеся на  $1\div 2\%$ .

Подобное расхождение результатов можно объяснить следующим образом. Оптимизирующий компилятор объявляет наиболее интенсивно используемые переменные регистровыми и строит программу так, чтобы эти переменные как можно дольше находились в регистрах процессора, а не выгружались в оперативную память. Поскольку регистры, предназначенные для работы с вещественными данными, у использованного в данной работе процессора INTEL PENTIUM содержат 80 бит, то каждый раз при переносе информации из регистров в ОЗУ происходит ее усечение до 64 бит, т.е. потеря информации, свойственная округлению.

Таким образом, полученная разница в результатах позволяет косвенно оценить степень влияния ошибок округления и обосновать следующее предположение. Если с целью повышения точности расчета чрезмерно перегрузить модель мелкими деталями, а это приводит к локальному измельчению КЭ-сетки и существенному росту числа степеней свободы, то из-за накопленных ошибок округления, вызванных резко возросшим объемом вычислений, ожидаемого повышения точности может не произойти. Мало того, в некоторых случаях при таком подходе можно вообще поставить под сомнение возможность получения результатов (как в случае с 32-х битными переменными).

Сказанное выше, а также имеющиеся ограничения на вычислительные ресурсы делают более предпочтительным построение упрощенных математических моделей элементов силовых судовых установок со строгой оценкой адекватности моделей, чем детальную их проработку с последующим поиском суперкомпьютера для расчета всей системы.

Следовательно, одной из важнейших задач при моделировании турбоагрегата является анализ всех его компонентов, выявление их наиболее значимых динамических свойств и построение в разумной степени упрощенной математической модели, адекватно отражающей эти свойства.

Как говорилось в первой главе задачи динамики, рассматриваемые в данной работе, делятся на задачи связанные с обеспечением требуемых виброшумовых параметров и задачи, связанные с проблемами прочности. В обоих случаях нет необходимости моделировать корпус турбины.

В первом случае, - потому, что основным источником вибрации является редуктор, и достаточно учесть влияние ротора на характер вибраций. В этом случае можно строить упрощенную модель ротора и его опор, передающих вибрацию на раму.

Во втором случае основная проблема связана с колебательными процессами в лопаточном венце. В этом случае требуется с высокой степенью точности определение собственных форм и частот колебаний, как отдельных лопаток, так и всего лопаточного аппарата. В этом случае необходимо с максимальной степенью детализации моделировать рабочее колесо, причем можно обойтись без моделирования самого ротора. Этим задачам уделяется внимание в пятой главе.

Моделирование отдельных узлов силовой судовой установки предполагает дальнейшее использование этих моделей при моделировании всей установки с целью исследования её вибрационных характеристик. Поэтому одним из важных требований, предъявляемых к моделям, является экономия вычислительных ресурсов. В то же время при разработке математических моделей необходимо обеспечить возможность адекватного воспроизведения различных источников вибрации и исследования распространения этой вибрации от источников до контрольных точек.

Данная глава посвящается построению упрощенной модели ротора турбоагрегата, адекватно отражающего его динамические свойства для исследования динамики ГТЗА.

### **3.2. Разработка методик моделирования динамики роторных систем, оценка качества модели**

Поскольку вопросы прочности при моделировании ротора турбоагрегата в данном случае не рассматриваются, сама модель может быть существенно упрощена. Нет смысла, например, моделировать отдельные лопатки, так как их колебания практически не оказывают серьезного влияния на колебания вала, а распространение вибрации, вызванной колебаниями отдельных лопаток, можно исследовать на более грубой модели, прикладывая в местах их крепления эквивалент-

ные возмущающие силы, полученные в результате исследования более точных моделей.

Для оценки точности вычисления и требуемых ресурсов при использовании различных КЭ из библиотеки ANSYS были проведены тестовые расчеты стального диска диаметром 1366 мм, толщиной 50 мм, жестко закрепленного на ступице диаметром 110 мм, при различной конечноэлементной сетке. Тестировались 3D элементы 1-го порядка Solid185 и 2-го порядка Solid186, а также оболочечные элементы 2-го порядка SHELL93. Результаты тестовых расчетов первых 10 собственных частот диска приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Собственные частоты диска, закрепленного на жесткой ступице

Форма колебаний (n,m), где n – число узловых диаметров, m – число узловых окружностей	Solid185 2850 КЭ	Solid185 25926 КЭ	Solid186 2093 КЭ	Sshell93 73 КЭ
аксиальные (1,0)	122,63	94,456	81.513	80,214
	123,67	94,686	81.559	80,235
аксиальные (0,0)	172,38	146,87	106.74	106,15
кручение (0,0)	180,79	168,91	142.28	168,16
аксиальные (2,0)	287,69	251,91	142.30	142,09
	293,93	253,97	168.56	142,11
аксиальные (3,0)	672,36	618,73	320.66	321,77
	682,55	626,15	320.70	322,06
радиальные	891,04	870,58	558.61	565,15
	891,55	884,8	558.66	565,5
Размер файла с результатами расчетов (МБ)	150	1368	130	5
Время счета (с)	5	45	11с	1

Кроме результатов расчетов в таблице приведены такие показатели, как размеры файлов с результатами расчетов и время счета (рас-

считывалась нижняя часть спектра, содержащая 20 собственных частот, процессор ATLON64X2 2.1 гГц).

Из таблицы видно, что использование трехмерных элементов 1-го порядка Solid185 неэффективно при моделировании дисков турбоагрегатов. Для расчета модели одного диска потребовался персональный компьютер с 2-мя гигабайтами оперативной памяти. При меньшем объеме оперативной памяти будет задействован файл «подкачки» и время счета увеличивается на порядок. Точность вычислений при этом оставляет желать лучшего.

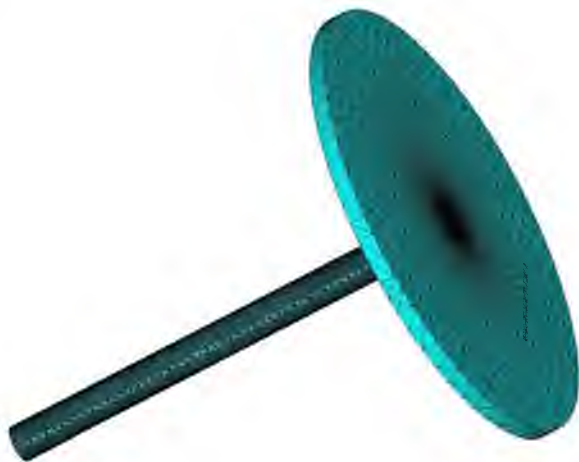
Модель, построенная на базе квадратичных трехмерных элементов Solid186, обеспечивает вполне приемлемую точность и на порядок менее требовательна к оперативной памяти. Еще на порядок снизить требования к вычислительным ресурсам при моделировании диска позволяет использование квадратичных оболочечных элементов SHELL93. Для исследования высших форм колебаний (с числом узловых диаметров больше 5 или узловых окружностей более 1) число конечных элементов придется увеличивать.

Проведенные расчеты заставляют сделать выбор в пользу оболочечных элементов при моделировании рабочих колес турбоагрегатов в виде дисков.

Моделирование вала ротора, как, впрочем, и других участков валопровода, наиболее оптимальным представляется с помощью балочных элементов, например, BEAM44. Эти элементы позволяют задавать поперечное сечение произвольной формы, учитывать свойства материала и способны работать как стержень (растяжение, сжатие), балка (изгиб) и торсион (кручение) одновременно. Тестовые программы подтверждают высокую достоверность расчетов, выполненных с помощью элементов данного типа для систем, подобных рассматриваемым в данной работе.



Однако первые же тестовые расчеты выявили серьезные расхождения в результатах расчетов модели вала с диском (рис. 3.1) на базе балочных и оболочечных конечных элементов и модели на базе трехмерных элементов SOLID186.

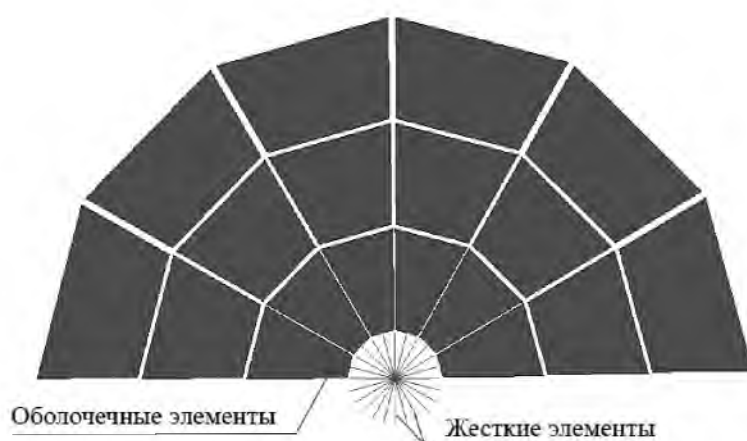


*Рис. 3.1. Конечноэлементная модель консольно-закрепленного вала с диском на свободном конце, построенная на базе трехмерных элементов*

Наибольшие различия были получены в значениях собственных частот крутильных колебаний диска. Анализ деформированного состояния диска при таких формах колебаний выявил причину расхождения результатов: несовершенство модели, построенной с помощью балочных и оболочечных элементов.

Дело в том, что при моделировании трехмерными элементами диск и вал представляют единое целое, что соответствует реальности и никаких дополнительных действий для соединения этих объектов производить не приходится. Балочные же элементы моделируют участок вала, соединяя всего две центральные точки торцевых сечений моделируемого участка, т.е. поверхность вала отсутствует, и моделируемый оболочечными элементами диск соединяется с валом в одной единственной точке – центре диска. Градиент напряжений при крутильных колебаниях вблизи этой точки теоретически стремится к бесконечности, что делает такую модель некорректной.

Для исправления указанного дефекта внутренняя зона диска, принадлежащая одновременно диску и валу, должна иметь повышенную по отношению к внешней части диска жесткость для отражения связи диска с соседними участками вала. Эффект от повышения на  $2\div 3$  порядка жесткости элементов, моделирующих эту зону, оказался недостаточным. Больше повышение жесткости нецелесообразно, поскольку чрезмерное повышение жесткости отдельных элементов ухудшает обусловленность матрицы жесткости всей системы.



***Рис. 3.2. Конечноэлементная модель диска, закрепляемая на валу с помощью жестких элементов***

Выходом из создавшегося положения стало введение жестких связей между центром диска – точкой крепления к балочному элементу – и точками диска, лежащими на окружности с радиусом, равным радиусу вала. На рис. 3.2 показана половина такой модели диска. Данный подход дополнительно экономит вычислительные ресурсы за счет отсутствия узловых точек во внутренней зоне диска. Однако корректность моделирования абсолютно жесткого сечения вала в плоскости диска следует проверять на тестовых примерах по следующим причинам. Во-первых, абсолютно жестких креплений в природе не бывает, и, следовательно, необходимо оценить необходимое количество вводимых жестких связей, во-вторых, такое крепление уже теоретически

исключает взаимную связь колебаний вала и диска при дисковых формах колебаний с числом узловых диаметров, большим одного.

В таблице 3.2 представлены результаты расчетов первых 20-ти собственных частот модели вала с диском (рис. 3.1). Длина вала 1500 мм, диаметр 110 мм, диаметр диска 1366 мм, толщина 50 мм, материал – сталь. Ось моделировалась 5-ю балочными, а диск – 101-м оболочечным элементами второго порядка. Предметом исследования стало выяснение необходимого количества жестких элементов – связей, моделирующих сечение вала в месте крепления диска.

Таблица 3.2.  
Собственные частоты модели вала с диском при различном количестве жестких связей

№	Форма колебаний	Solid186 4800 КЭ	Shell 93 +Beam44			
			4 св.	8 св.	16 св.	32 св.
1,2	и1 + (1,0)	7,15	6,97	6,969	6,97	6,97
3	кручение	11,96	11,74	11,776	11,789	11,792
4,5	и2 + (1,0)	35,902	32,99	34,154	34,865	35,417
6	осевые + (0,0)	95,174	89,37	92,131	94,711	97,746
7,8	вал неподвижен + (2,0)	140,09	139,22	139,84	140,8	141,8
9,10	и2 + (1,1)	209,58	191,90	196,34	199,27	201,67
11,12	вал неподвижен + (3,0)	320,64	321,17	321,19	321,22	321,24
13	осевые + (0,1)	425,19	416,83	421,92	425,44	429,35
14,15	и3 +(1,1) синфазно	511,26	499,87	501,87	503,22	504,25
16,17	вал неподвижен + (4,0)	558,66	564,3	564,3	564,3	564,3
18,19	и3 +(1,1) в противо- фазе (антирезонанс в точке крепления вала с дис- ком)	625,27	594,00	604,42	611,02	616,39
20,21	вал неподвижен + (5,0)	849,96	874,07	874,07	874,07	874,07

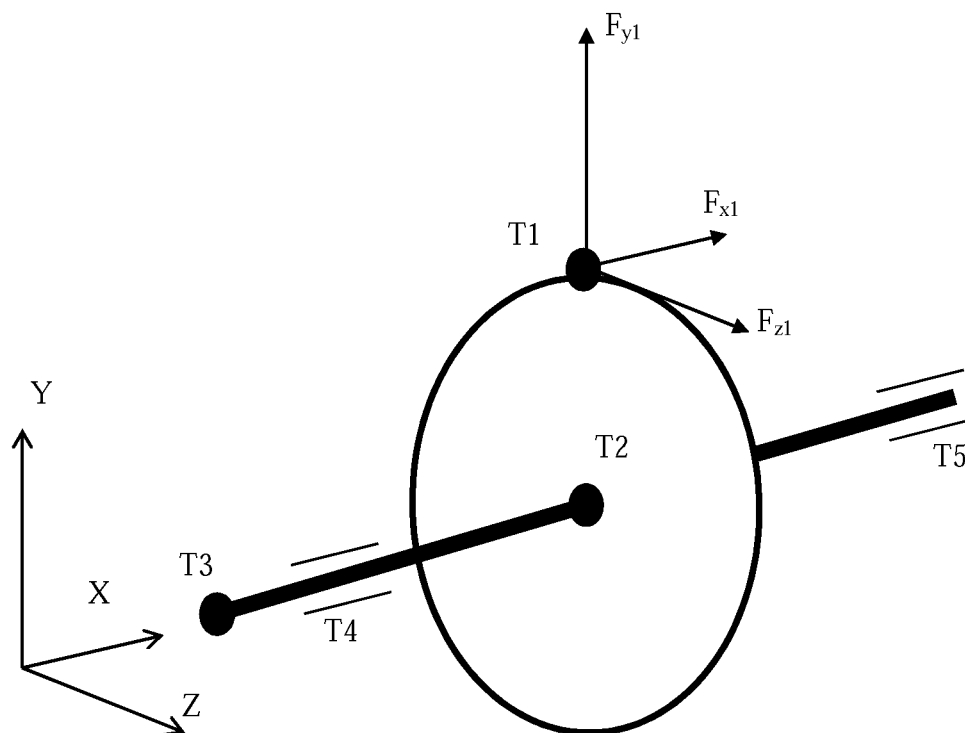
В процессе численных исследований с центральным узлом (узел балочного элемента) связывались равномерно расположенные на внутреннем ободе диска 4, 8, 16 и все имеющиеся 32 узла. Для сравне-

ния в таблице 3.2 приведены также результаты расчетов модели, построенной с помощью трехмерных элементов Solid186. Изгибные формы колебаний вала обозначены как «и1, и2, и3», в скобках, как и в таблице 3.1, маркируется форма колебаний диска (число узловых диаметров, число узловых окружностей).

Анализ проведенных исследований показывает, что при формах собственных колебаний с числом узловых диаметров на диске более 1-го расчетная частота слабо зависит от числа жестких элементов. Действительно, совместные колебания вала с диском наблюдаются именно на тех резонансных частотах, на которых форма колебаний диска имеет не более 1-го узлового диаметра, и отсутствие жестких связей можно интерпретировать как разрыв целостности системы. Следовательно, при исследовании совместных колебаний системы вал–диск желательно ввести большее количество жестких элементов. При исследовании высших форм колебаний дисковых систем, по крайней мере для определения собственных частот, можно обойтись 4-мя жесткими элементами, причем вал можно не моделировать, поскольку он не оказывает влияния на эти формы колебаний диска.

Корректность введения жесткого сечения с точки зрения взаимного влияния высших форм дисковых колебаний и колебаний вала проверялась путем анализа результатов расчета модели простейшего однодискового ротора, схема которого представлена на рис. 3.3, построенной на базе трехмерных элементов. С этой целью жесткость элементов сечения вала в месте крепления диска увеличивалась на 7–10 порядков. Выяснилось, что увеличение жесткости сечения практически не оказывает влияния на колебания с числом узловых диаметров диска, большим 2-х (повышение собственных частот при увеличении жесткости не более чем 0,01%). Повышение частоты собственных колебаний для форм с 2-мя узловыми диаметрами более ощутимо (около

1%) и объясняется скорее увеличением жесткости центральной части диска, а не влиянием вала.



**Рис. 3.3. Модель однодискового ротора и схема расположения контрольных точек**

Эта же модель ротора использовалась для разработки методики моделирования многодисковых систем. Основным источником колебаний таких систем является неуравновешенность ротора.

Немалый интерес представляют и колебания, вызываемые возмущением со стороны консольной части вала, например, динамическими силами, возникающими в муфте при наличии остаточной расцентровки соединяемых валов.

Кроме того, разрабатываемая методика моделирования должна позволять исследовать распространение вибрации, вызываемой колебаниями лопаточного аппарата.

Этими соображениями продиктован выбор контрольных точек T1÷T5, показанных на рисунке. Контрольные точки T4 и T5 соответ-

ствуют опорно-упорному и опорному подшипникам соответственно и предназначены для определения реакций опор.

В качестве возмущающего воздействия со стороны лопаточного аппарата используется гармоническое силовое воздействие в точке Т1 по трем направлениям ( $F_{x1}$ ,  $F_{y1}$ ,  $F_{z1}$ ).

Неуравновешенность ротора приводит к парным ортогональным формам колебаний вала с фазовым сдвигом  $\pi/2$  в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через ось вращения. Поскольку рассматриваемая система осесимметрична (жесткость опор в направлении Y и Z принималась одинаковой), то указанные парные формы колебаний идентичны и для их исследования достаточно рассмотрения колебаний в одной из указанных плоскостей, например, в плоскости XY. Для их возбуждения можно использовать гармоническое воздействие  $F_{y2}$  (вертикальная сила в точке Т2).

Для тестирования расчетной методики проведено исследование отклика системы на возмущение со стороны соединительной муфты: в контрольной точке Т3 прикладывалось гармоническое силовое воздействие в радиальном и осевом направлениях ( $F_{y3}$ ,  $F_{x3}$ ), а также крутящий момент ( $M_{x3}$ ).

Геометрические характеристики модели следующие. Диаметр вала 110 мм, диаметр диска 1366 мм, длина консольной части вала 500 мм, расстояние от упорного подшипника до диска (Т4 – Т2 по рисунку) 350 мм, расстояние от диска до опорного подшипника (Т2 – Т5 по рисунку) 650 мм. Толщина диска 70 мм. Материал – сталь. Демпфирующие свойства подшипников не учитывались.

В процессе численных исследований сравнивались и анализировались результаты, полученные с помощью трех различных моделей. Модель №1 построена на базе 3D элементов, сетка сгенерирована в автоматическом режиме и не обладает свойствами симметрии.

Модель №2 отличается от первой тем, что после построения четверти модели вторая четверть, а затем и недостающая половина были получены зеркальным отображением. Таким образом, получилась модель с конечноэлементной сеткой, симметричной относительно проходящих через ось вращения вертикальной и горизонтальной плоскостей.

Модель №3 – балочно-оболочечная. Вал моделируется балочными элементами, диск – оболочечными. Сетка симметрична относительно вертикальной и горизонтальной плоскостей. Центральная часть диска, соответствующая сечению вала, моделируется жесткими элементами.

Частоты собственных колебаний ротора приведены в таблице 3.3, символом «\*» отмечены парные частоты. Для пояснения некоторых форм на рис. 3.4 представлены их эскизы. Так, например, 9-я и 11-я формы колебаний отличаются тем, что в первом случае диск и вал колеблются синфазно, а во втором – в противофазе (рис.3.4е и 3.4ж). Классификация форм колебаний проведена на основании визуального анализа. Расслоение парных частот (форма №17) говорит о необходимости измельчения КЭ-сетки для исследования этих форм. Собственные частоты первых двух моделей практически не отличаются.

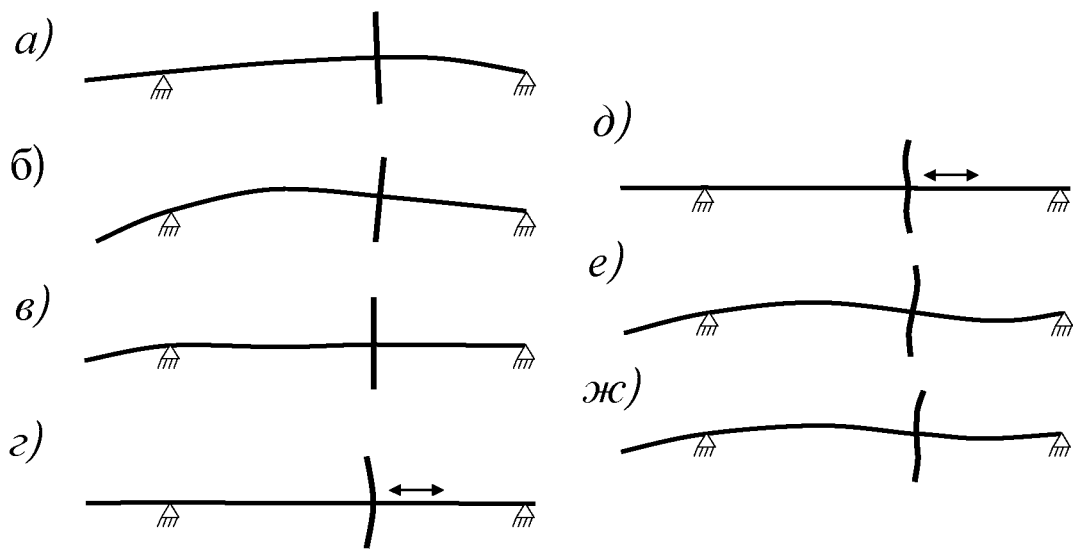
У балочно-оболочечной модели в области высших частот наблюдается перераспределение форм собственных колебаний по отношению к другим моделям ( $f_{14} > f_{15}$ ), что объясняется не совсем корректным моделированием упорного подшипника в 3D модели. В балочной модели фиксация в осевом направлении единственного узла приводит к фиксации всего сечения, а в 3D модели зафиксирован только центральный узел сечения и за счет деформации сечения осевые колебания могут распространяться за подшипник, что приводит к снижению частоты осевых колебаний. Фиксация в осевом направлении большего количества узлов в сечении вала, соответствующем упорному под-

шипнику, нежелательна, поскольку это приводит к ограничению изгибных колебаний.

Таблица 3.3.  
Собственные колебания однодискового ротора (Гц)

№	Форма колебаний	модель 1,2	модель 3
1	кручение	14,16	13
2*	и1+(1,0) пучность справа от диска рис.5.4а	43	41
3*	и1+(1,0) пучность слева от диска рис.5.4б	71	67
4	осевые (0,0) рис.5.4г	132	139
5*	вал неподв + (2,0)	195	198
6*	изг консоли, диск неподвижен рис.5.4в	230	231
7*	вал неподв + (3,0)	444	449
8	осевые (0,1) рис.5.4д	572	651
9*	изг ротора + (1,1) рис.5.4е	687	677
10*	вал неподв + (4,0)	770	793
11*	изг ротора + (1,1) в противофазе рис.5.4ж	837	821
12	кр. не консольной части диск неподв	945	1202
13*	вал неподв + (5,0)	1164	1252
14	осевые (0,2)	1197	1333
15*	вал неподв + (2,1)	1237	1256
16*	и3 консоли диск неподв	1371	1408
17*	вал неподв + (6,0)	1622	1865, 1897
18*	вал неподв + радиальные (2,0)	1723	1749
19*	вал неподв + (3,1)	1807	1832

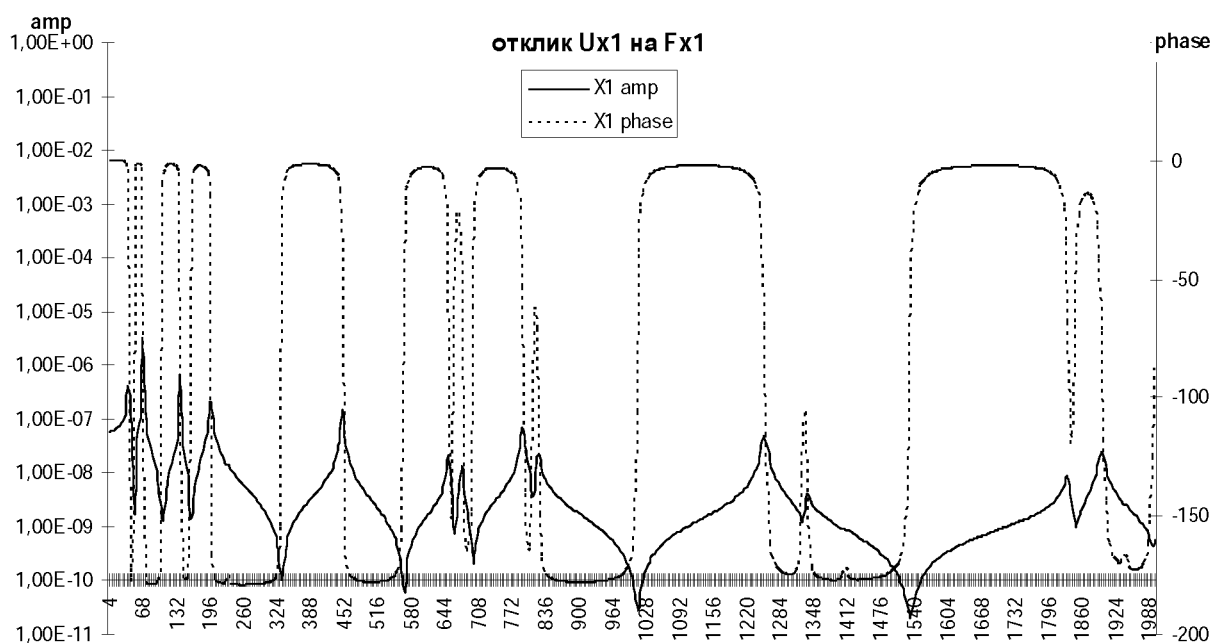




**Рис. 3.4. Некоторые формы собственных колебаний системы диск–вал**

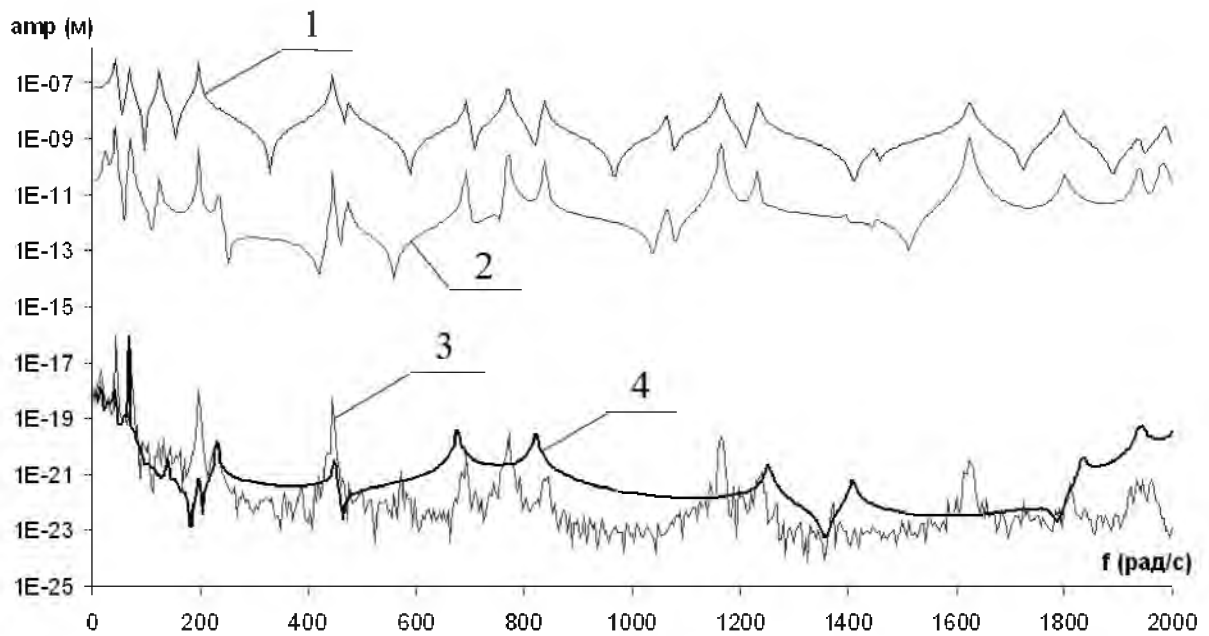
В дальнейших исследованиях проанализированы отклики системы на гармоническое воздействие (т.е. вынужденные колебания). В качестве контрольных точек для анализа результатов выбраны точки Т1, Т2 и Т3 (рис. 3.3), линейные и угловые перемещения которых позволяют судить о динамических деформациях системы и распространении колебаний. На рис. 3.5 приведена амплитудно- фазо- частотная характеристика (АФЧХ) отклика системы в точке Т1 в направлении X ( $U_x$ ) в ответ на воздействие гармонической силы в этой же точке в том же направлении ( $F_{x1}$ ) для модели №3.

По оси абсцисс откладывается частота единичной возмущающей силы (Гц), по левой оси ординат – амплитуда колебаний в контрольной точке (м), по правой – фазовый сдвиг (град).



**Рис. 3.5. АФЧХ перемещений контрольной точки  $T1$  в направлении оси  $X$  ( $U_{x1}$ ) в ответ на действие силы  $F_{x1}$**

Данная диаграмма показывает, что в системе возбуждаются 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15 и 18-я формы колебаний согласно таблице 3.3. Анализ движений по другим степеням свободы всех выбранных контрольных точек в ответ на действие силы  $F_{x1}$  говорит о том, что в исследуемом диапазоне частот данное возмущение приводит к возбуждению всех собственных форм колебаний, кроме крутильных и радиальных. Отклик  $U_{x1}$  на  $F_{x1}$  для моделей №2 и №3 практически идентичен, а для модели №1 наблюдается всплеск на 12-ой частоте – это крутильные колебания. Согласно физической природе, таких колебаний в ответ на действие силы  $F_{x1}$  возникать не должно, и объяснить их появление можно только несовершенством модели (влияние несимметричности сетки). Очень показательным в этом плане сравнение амплитудных характеристик АЧХ, отклика  $U_{z1}$  на  $F_{x1}$  для разных моделей (рис. 3.6).



**Рис. 3.6. Отклик системы на гармоническое воздействие  $F_{x1}$ .**

**1 –  $U_{x1}$ , 2,3,4, –  $U_{z1}$  для разных КЭ-моделей**

АЧХ №1 (отклик  $U_{x1}$ ) приведена для сравнительной оценки получаемых характеристик.

АЧХ №2 – это отклик  $U_{z1}$ , полученный с помощью модели №1 на базе трехмерных элементов. Сетка в этой модели строилась в автоматическом режиме. Данная характеристика не вполне соответствует ожиданиям. При возбуждении силой  $F_{x1}$  в идеальной математической модели колебаний контрольных точек в направлении  $Z$  быть не должно, а судя по графику, имеют место колебания с амплитудой, всего на три порядка меньшей, чем колебания в направлении  $X$ . Столь сильное отличие результатов от «идеальных» можно объяснить тем, что МКЭ, как любой численный метод, дает приближенное (т.е. слегка искаженное) решение. КЭ-сетка, построенная в автоматическом режиме, приводит к несимметричному искажению жесткостных характеристик модели. Поэтому силовое воздействие  $F_{x1}$  приводит к возникновению неуравновешенных внутренних сил в направлении оси  $Z$ , вследствие чего и возникают колебания контрольных точек в направлении  $Z$ . Бу-

дем называть такие колебания «наведенными» (возникающими из-за несовершенства математической модели).

Характеристика №3 соответствует конечноэлементной модели на базе тех же трехмерных элементов, но с сеткой, симметричной относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось вращения. На ней наблюдаются колебания с амплитудой в диапазоне  $10^{-23} \div 10^{-17}$ .

Многочисленные хаотичные всплески амплитуд, незначительно увеличивающиеся вблизи резонансных частот, в сочетании с таким же хаотическим поведением фазовой кривой (на данной АЧХ не показана) ставят под сомнение достоверность этой диаграммы. Вероятней всего, это результат накопленных в процессе вычислений погрешностей, возникающих при операциях с вещественными числами. Если вспомнить, что при хранении вещественных чисел в памяти компьютера используется «примерно» (если переходить к десятичной системе исчисления) пятнадцатизначная мантисса, то соотношение результатов для  $U_{x1}$  и  $U_{z1}$ , составляющее  $10^{-14} \div 10^{-16}$ , подтверждает такое предположение. Таким образом, данную характеристику можно рассматривать как «шум», обусловленный погрешностями вычислений.

Характеристика №4 построена по расчетам балочно-оболочечной модели. Общий уровень амплитуд колебаний такой же, как на характеристике №3, т.е. соответствует «шуму», но форма зависимости более гладкая, если можно так сказать, более «качественная». Это можно объяснить меньшими вычислительными погрешностями, поскольку число степеней свободы в данной модели значительно меньше, чем в моделях, построенных с помощью трехмерных элементов.

### **3.3. Особенности колебаний роторных систем**

Колебательные процессы вращающихся роторных систем обладают определенными свойствами, которые необходимо учитывать при построении упрощенных моделей. В данном разделе рассматриваются

особенности взаимных колебаний вала и закрепленного на нем диска. Динамика системы показана на примере однодискового ротора, рассмотренного в предыдущем разделе.

В таблице 3.4 приведены результаты анализа отклика некоторых параметров в контрольных точках Т2, Т3, Т4, Т5 на возмущение  $F_{x1}$ . Обозначение параметров следующее:  $U_{y3}$  – перемещение в направлении оси Y в точке Т3,  $F_{x4}$  – реакция опоры в направлении оси X в Т4,  $R_{z2}$  – вращение вокруг оси параллельной OZ, проходящей через Т2.

Таблица 3.4

Форма	Параметр	Модель		
		№1	№2	№3
№5 (2,0)	$U_{y3}$	–	–	–
	$U_{z3}$	!	X	X
	$F_{x4}$	–	–	–
	$F_{y4}$	–	–	–
	$F_{z4}$	–	–	–
	$F_{y5}$	–	X	X
	$F_{z5}$	!	X	X
	$R_{y2}$			–
	$R_{z2}$			X
№7 (3,0)	$U_{y3}$	–	–	–
	$U_{z3}$	!	X	X
	$F_{x4}$	–	–	–
	$F_{y4}$	–	–	–
	$F_{z4}$	–	X	X
	$F_{y4}$	–	–	–
	$F_{z5}$	!	X	X
	$R_{y2}$			–
	$R_{z2}$			X
10 (4,0)	$U_{y3}$	–	–	–
	$U_{z3}$	!	X	X
	$F_{x4}$	–	–	–
	$F_{y4}$	–	–	–
	$F_{z4}$	!	X	X

Форма	Параметр	Модель		
		№1	№2	№3
№10 (4,0)	$F_{y4}$	–	–	–
	$F_{z5}$	!	X	X
	$R_{y2}$			–
	$R_{z2}$			X
№13 (5,0)	$U_{y3}$	–	–	–
	$U_{z3}$	!	X	X
	$F_{x4}$	–	–	–
	$F_{y4}$	–	–	–
	$F_{z4}$	–	X	X
	$F_{y4}$	–	–	–
	$F_{z5}$	!	X	X
$R_{y2}$			–	
№14 (2,1)	$R_{z2}$			X
	$U_{y3}$	–	–	–
	$U_{z3}$	!	X	X
	$F_{x4}$	–	–	–
	$F_{y4}$	–	–	–
	$F_{z4}$	!	X	X
	$F_{y4}$	!	–	–
	$F_{z5}$	!	X	X
	$R_{y2}$			–
	$R_{z2}$			X

Символом «-» в таблице отмечено отсутствие или пренебрежимо малый всплеск амплитуды колебаний контролируемого параметра на данной резонансной частоте. Символом «!» отмечены всплески резонансных колебаний, амплитуды которых соответствуют «наведенным» формам. Символ «Х» указывает, что вся АФЧХ по данному параметру для данного возмущения соответствует уровню «шума».

Полученные результаты подтверждают предположение о том, что возбуждаемые со стороны лопаточного аппарата высшие формы дисковых колебаний (с числом узловых диаметров более одного) не взаимодействуют с валом, поскольку в контрольных точках вала соответствующих откликов (модели №2 и 3) не обнаружено.

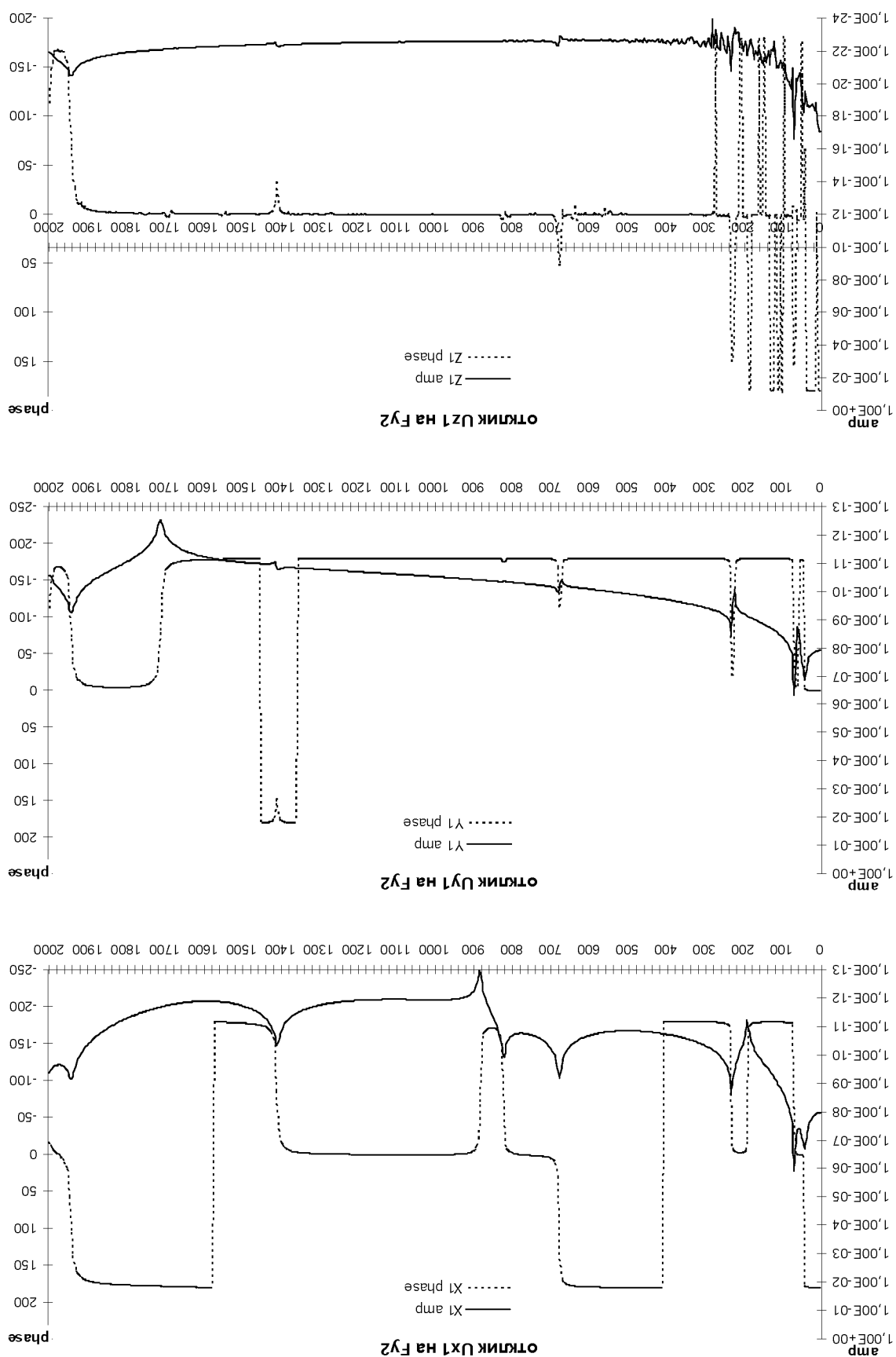
Имеющиеся некоторые резонансные всплески, полученные при расчете математической модели №1, объясняются ее несовершенством.

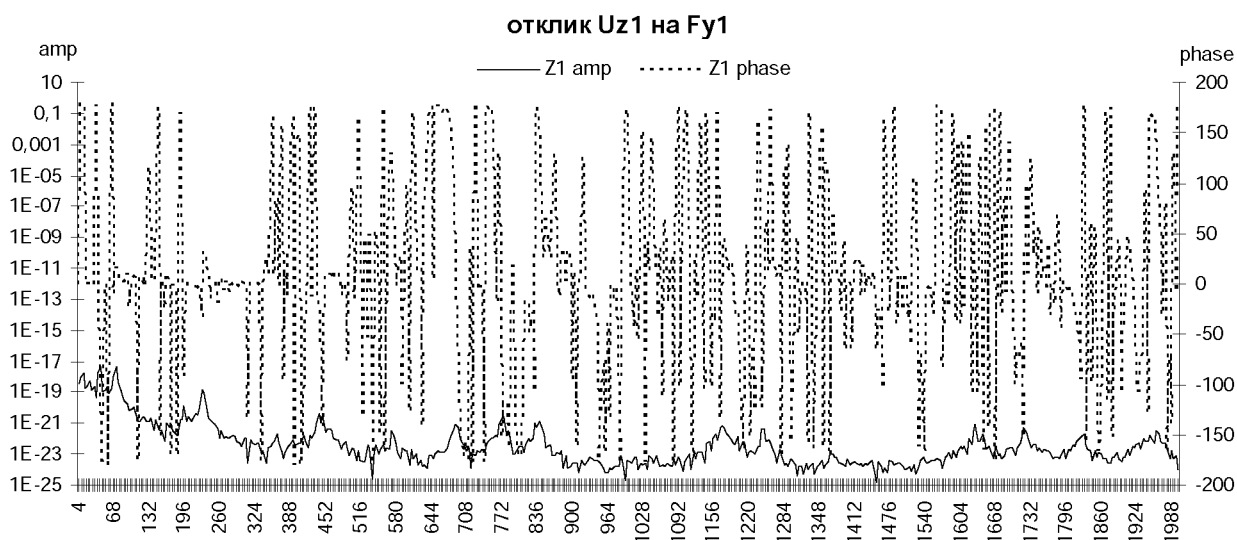
На рис. 3.7 показаны АФЧХ откликов на периферийной точке диска Т1 при возбуждении силой  $F_{y2}$ , моделирующей неуравновешенность ротора. Хотя скорость вращения ротора редко превышает 100 об/с., АФЧХ построены для интересующего нас частотного диапазона 0–2000 Гц.

Приведенные диаграммы показывают, что неуравновешенность ротора способна вызвать формы колебаний № 2, 3, 6, 9, 11 и 16 согласно таблице 3.3. Среди них нет форм дисковых колебаний с числом узловых диаметров более одного.

## модели №3

Рис. 3.7. АФЧХ отклика в точке Т1 на возмущение силой Fy2 для





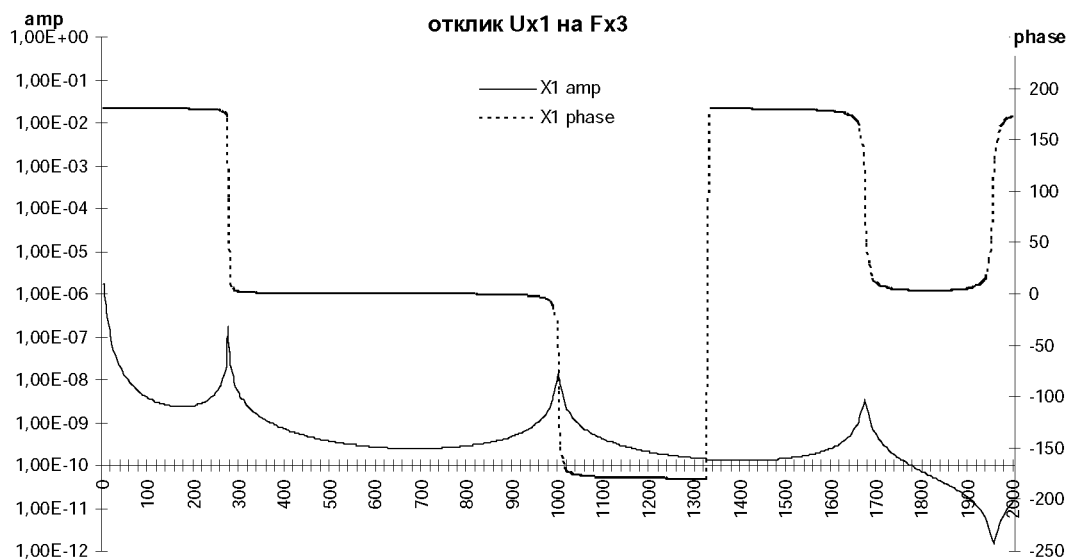
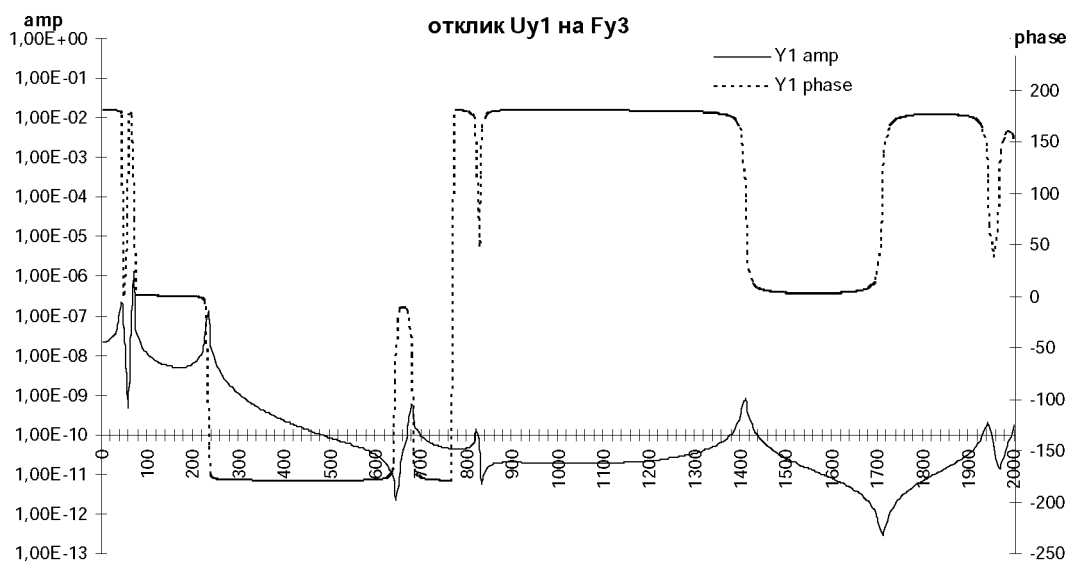
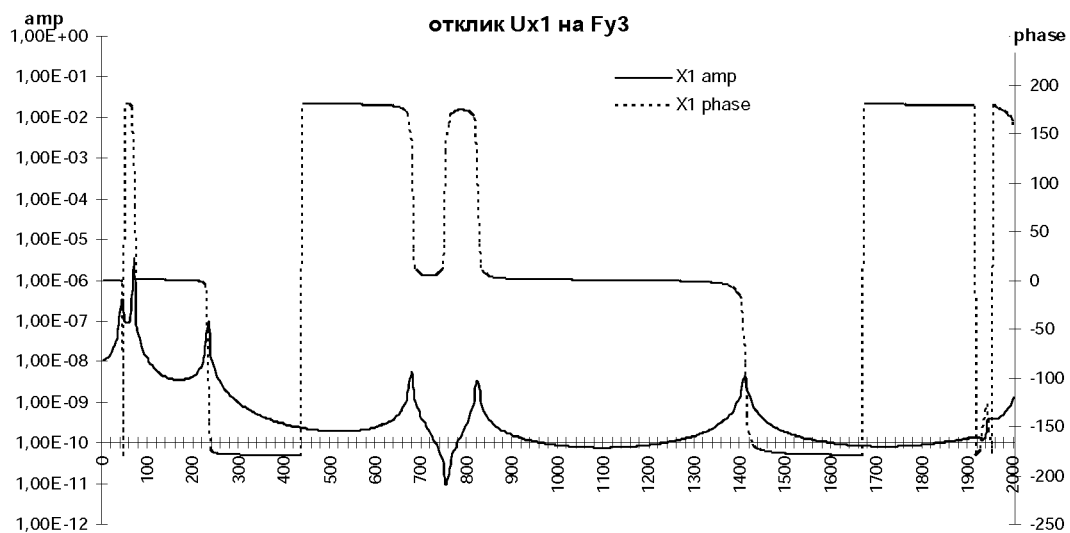
**Рис. 3.8. АФЧХ отклика в точке T1 на возмущение силой  $F_{y2}$  для модели №2**

Показанные на рисунке АФЧХ построены по результатам расчета балочно-оболочечной модели №3. Отклики  $U_{x1}$  и  $U_{y1}$  для модели №2 практически идентичны, а отклик  $U_{z1}$  более «зашумлен» из-за погрешностей вычислений (рис. 3.8).

Для исследования отклика ротора в ответ на воздействие со стороны муфты используются возмущающие силы  $F_{y3}$  и  $F_{x3}$ , а также момент  $M_{x3}$ . При этом из математической модели было удалено ограничение на вращение вала в муфте, а опорный и опорно-упорный подшипники были поменяны местами. Это приводит к изменению некоторых собственных частот, связанных с крутильными и осевыми колебаниями вала.

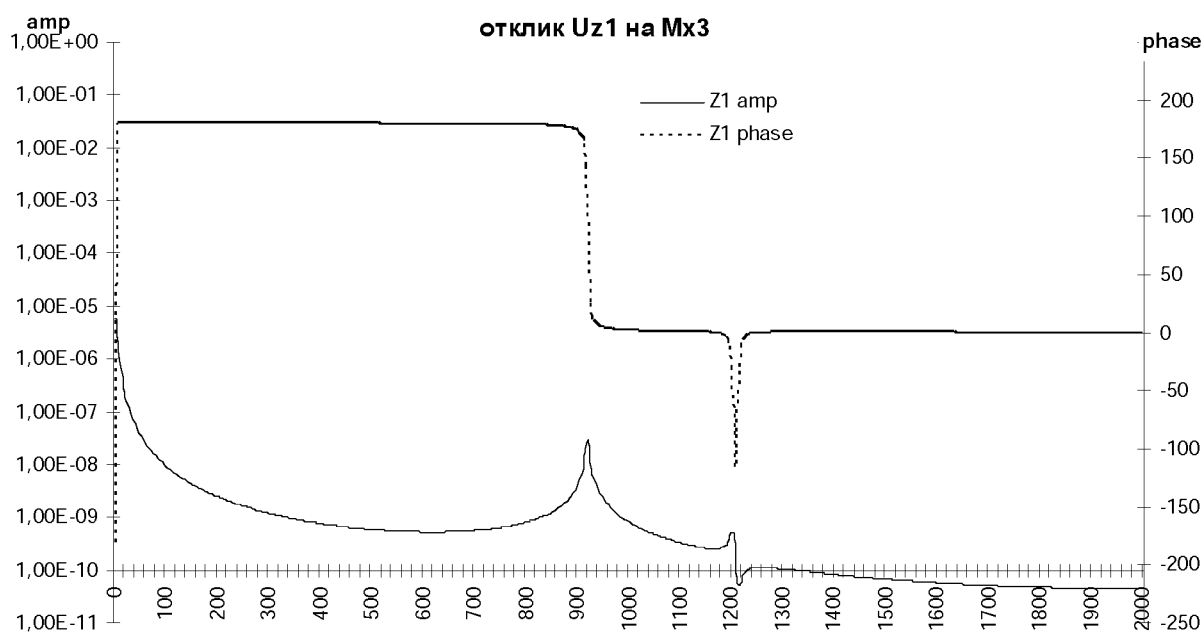
Наиболее показательные АФЧХ, демонстрирующие дисковые формы колебаний, возбуждаемые воздействием со стороны муфты, показаны на рис. 3.9, 3.10, а изменившиеся частоты собственных колебаний в таблице 3.5





**Рис. 3.9. АФЧХ отклика в точке T1 на вертикальные и осевые возмущения со стороны муфты**

Наиболее показательные АФЧХ, демонстрирующие дисковые формы колебаний, возбуждаемые воздействием со стороны муфты, показаны на рис. 3.9, 3.10.



**Рис. 3.10. АФЧХ отклика в точке T1 на крутильные возмущения со стороны муфты**

Таблица 5.5

Формы с изменившимися частотами колебаний

№	форма	частота
1	Кручение (0,0)	0
4	осевые (0,0)	267
8	осевые (0,1)	1000
12а	кр. консольной части +кр(0,1)	919
12б	кр. не консольной части +кр(0,1)	1203
15	осевые 1 узел на валу +(0,1)	1672

Из приведенных графиков видно, что силовое воздействие со стороны муфты возбуждает формы колебаний № 2, 3, 6, 9, 11, 16, кроме того, момент относительно оси вращения ротора со стороны муфты возбуждает формы колебаний №1, 12а и 12б (табл. 3.5). Резонансных

форм дисковых колебаний с числом узловых диаметров более одного не наблюдается в результатах расчетов как балочно-оболочечной модели, так и модели, построенной на базе 3D элементов.

Анализ результатов многочисленных тестовых расчетов подтверждает: а) корректность использования жесткого сечения вала в месте его крепления с диском в балочно-оболочечной модели ротора турбоагрегата; б) корректность предложенной методики моделирования для исследования динамических характеристик многодисковых роторных систем.

Проведенные анализы всех полученных АФЧХ для контрольных точек исследуемой системы позволяют сформулировать важные выводы о характере совместных колебаний системы вал–диск:

1. Возмущения в лопаточном аппарате возбуждают аксиальные и тангенциальные формы колебаний рабочего колеса с различным числом узловых диаметров и окружностей. Однако *на вал передаются*, во-первых, *аксиальные колебания диска без узловых диаметров*, вызывая осевые колебания вала, во-вторых, *веерные (аксиальные) колебания с одним узловым диаметром*, вызывая изгибные колебания вала, в-третьих, *тангенциальные колебания без узловых диаметров*, вызывая крутильные колебания вала. Высшие формы колебаний – при наличии более одного узлового диаметра у аксиальных форм и хотя бы одного узлового диаметра у тангенциальных – замыкаются на диске и на вал не распространяются.
2. Радиальные силы, возникающие в результате нарушения балансировки ротора или расцентровки соединяемых валов, приводят к возбуждению изгибных резонансных колебаний вала и соответствующих им веерных колебаний диска с одним узловым диаметром.

3. В результате действия крутящего момента или осевой силы со стороны муфты возбуждаются крутильные колебания вала и диска без узловых диаметров или аксиальные колебания вала и диска без узловых диаметров.

*Таким образом, высшие формы дисковых колебаний не взаимодействуют с валом, а силовое воздействие со стороны вала также не способно возбудить эти формы колебаний диска.*

#### **3.4. Построение расчетной модели ротора приводной турбины**

Ниже рассматривается пример моделирования ротора турбины производства Калужского турбинного завода, используемой в испытательном стенде для исследования вибрационных характеристик редукторов. И хотя в предыдущем разделе при исследовании динамики однодискового ротора была разработана достаточно эффективная с точки зрения экономии вычислительных ресурсов методика моделирования многодисковых роторов, имеет смысл рассмотреть возможность дальнейшего упрощения модели. Это можно сделать путем замены диска точечной массой с соответствующими инерционными характеристиками, как это часто делают при оценке динамических характеристик роторных систем.

Поскольку модель с точечной массой дисковые формы колебаний не воспроизводит, то для анализа правомерности такого упрощения были проведены тестовые расчеты балочно-оболочечной модели однодискового ротора, в которой поэтапно увеличивалась жесткость элементов, моделирующих диск. В процессе увеличения жесткости диска собственные частоты всех форм колебаний диска с числом узловых диаметров больше одного возросли настолько, что оказались далеко за границами исследуемого частотного диапазона. Идентичные результаты были получены и при тестовых расчетах модели, на базе 3D элементов.

Как показали проведенные ранее исследования, все эти формы замыкаются на диске, с валом не взаимодействуют и внешними по отношению к диску источниками не возбуждаются, следовательно, исчезновение из спектра собственных частот упрощенной модели этих форм колебаний при исследовании динамики ротора вполне допустимо.

Увеличение жесткости элементов, моделирующих диск, в  $100 \div 1000$  раз приводит к получению таких же результатов, как и с помощью модели, в которой диск аппроксимируется точечной массой с такими же, как у недеформируемого диска, инерционными свойствами. Результаты расчетов собственных частот однодискового ротора с помощью балочно-оболочечной модели и модели, в которой диск аппроксимировался матрицей масс, приведены в таблице 3.6.

Анализируя данные, приведенные в таблице, можно сделать следующие выводы. Если исследуется только динамика ротора, то рассматриваемое упрощение модели вполне допустимо, поскольку скорость вращения ротора, как правило, не превышает 100 об/с, а основным возбуждающим фактором является его неуравновешенность. Следовательно, в рабочем диапазоне находятся только три собственных частоты. При кручении и при первой изгибной форме колебаний диск ведет себя как жесткое недеформируемое тело, а на второй частоте изгибных колебаний замена гибкого диска жестким телом приводит к повышению резонансной частоты на 13%, и это надо учитывать при анализе динамических характеристик.

Если исследуется динамика всей силовой установки и необходимо учесть влияние ротора на распространение вибрации по системе в более широком частотном диапазоне, то наличие аксиального возбуждения ротора на частоте, близкой к 4-й форме собственных колебаний, делает эту модель некорректной. Анализ влияния ротора на остальных частотах с помощью упрощенной модели нареканий не вызывает.

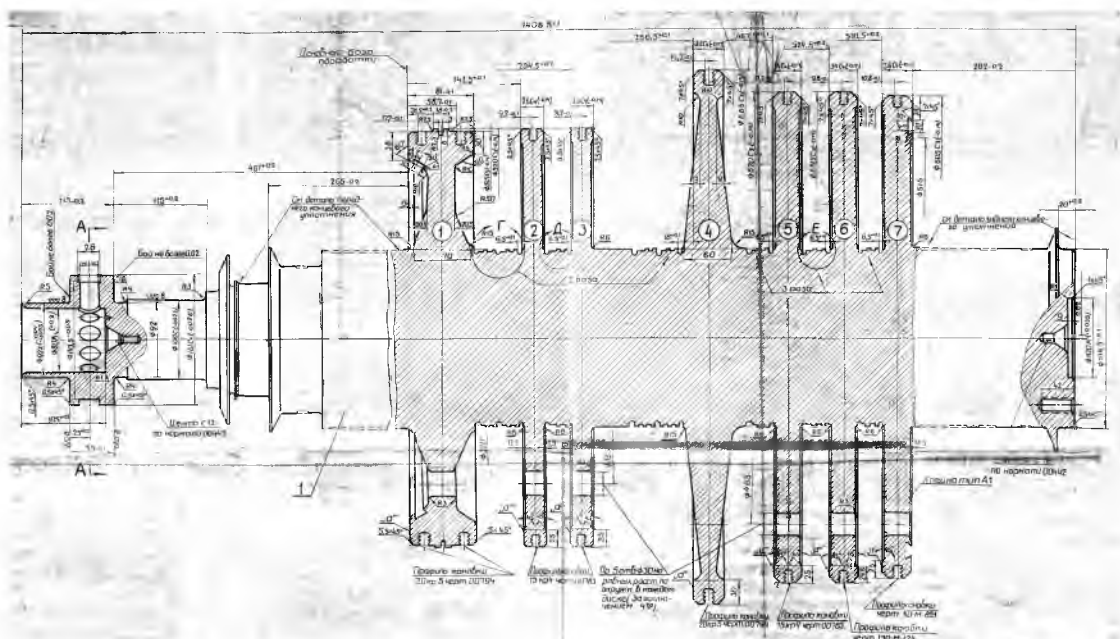
Таблица 3.6

Собственные частоты модели однодискового ротора при различных вариантах моделирования диска

№	форма	Вал-балка+ гибкий диск	Вал- балка+ Матрица масс	погреш- ность
1	кручение	13,232	13,284	0,39%
2*	и1 (1,0) пучность справа	41,82	42,826	2,35%
3*	и1 (1,0) пучность слева	68,131	78,42	13,12%
4	осевые (0,0)	139,92	290,75	51,88%
5*	вал неподв (2,0)	198		
6*	и1 консоли диск неподвижен	232,45	235,11	1,13%
7*	вал неподв (3,0)	449,13		
8	осевые (0,1)	651,47		
9*	и1 пучность справа (1,1) (ан- тирезонанс)	702,34	756,01	7,10%
10*	вал неподв (4,0)	793,45		
11*	и1 пучность справа+(1,1) в противофазе	842,72		
12*	вал неподв (5,0)	1172,2		
13	осевые (0,2)	1186,1		
14	кр правой части вала диск не- подв	1202,9	1208	0,42%
15*	кр прав части вала+(2,1)	1246,5		

Таким образом, при исследовании вибрационных характеристик силовой установки можно воспользоваться упрощенной моделью ротора, в которой диски аппроксимируются точечными массами с одной оговоркой. Если в результате анализа выявится наличие аксиального возбуждения ротора на частоте соответствующего аксиальной форме резонанса или ниже, то для анализа данного частотного диапазона не-

обходимо уточнение модели путем включения в нее деформируемых ДИСКОВ.



**Рис.3.11. Фрагмент чертежа ротора приводной турбины**

При конечноэлементном моделировании ротор приводной турбины, изображенный на рис. 3.11, разбивается на 14 участков. Геометрические характеристики всех участков и соответствующих им сечений приведены в табл. 3.7, 3.8, текст программы для исследования динамических характеристик ротора приведен в приложении 7.

Таблица 3.7

Геометрические характеристики участков ротора

№ участка	1	2	3	Опора 1	4	5	6	диск 1	7	диск 2	8
длина (мм)	115	115	53		28	61	245		113		73
№ сечения	1	2	3		3	4	5		5		5

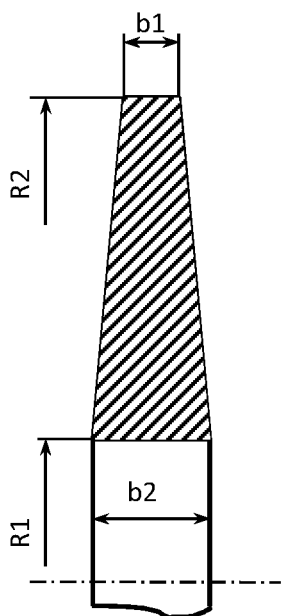
№ участка	диск 3	9	диск 4	10	диск 5	11	диск 6	12	диск 7	13	Опора 2	14
длина (мм)		157		90		68		68		209		10
№ сечения		5		5		5		5		5		5

Таблица 3.8

Геометрические характеристики сечений ротора (мм)

№ сечения	1	2	3	4	5
d (отверстие)	80				
D (наружный)	100	100	140	180	218

Для построения упрощенной модели ротора были определены и



**Рис. 3.12** Геометрические характеристики рабочих дисков

сведены в таблицу 5.9 все инерционно-массовые характеристики рабочих колес ротора ( $m$  – масса,  $I_p$  – полярный момент инерции,  $I_x$  – момент инерции относительно диаметра). В таблице также приведены геометрические характеристики дисков и колец, на которые для удобства расчета разбивались диски 1÷4 в соответствии с обозначением рис. 3.12.

Таблица 5.9

Инерционно-массовые характеристики рабочих колес ротора

	Диск 1					Диск 2			Диск 3		
	1	2	3	4	$\Sigma$	1	2	$\Sigma$	1	2	$\Sigma$
b1 м	0,07	0,039	0,037	0,081		0,025	0,026		0,024	0,025	
b2 м	0,039	0,037	0,081	0,081		0,025	0,026		0,024	0,025	
R1 м	0,107	0,156	0,2	0,23		0,107	0,235		0,107	0,235	
R2 м	0,156	0,2	0,23	0,265		0,235	0,265		0,235	0,265	
m	16,8	14,6	18,8	34,4	84,5	26,7	9,56	36,3	25,7	9,2	34,9
$I_p$	0,29	0,47	0,89	2,12	3,8	0,89	0,60	1,49	0,86	0,58	1,43
$I_x$	0,15	0,23	0,44	1,06	1,9	0,45	0,30	0,75	0,43	0,29	0,72

	Диск 4			Диски 5,6	Диск 7
	1	2	□		
b1 м	0,06	0,02		0,033	0,035
b2 м	0,02	0,038		0,033	0,035
R1 м	0,1075	0,3025		0,1075	0,1075
R2 м	0,3025	0,337		0,315	0,315
m	72,15	15,77	87,92	70,89	75,19
$I_p$	3,22	1,63	4,85	3,93	4,16
$I_x$	1,61	0,82	2,43	1,96	2,08



При оценке адекватности отражения осевых колебаний рассматриваются два вида граничных условий. Если в результате гидродинамической разгрузки ротор занимает некоторое промежуточное положение в упорном подшипнике, то становится возможным движение ротора в пределах осевого зазора. В этом случае ограничение на осевые перемещения участка ротора, соответствующего опорному подшипнику, в математической модели отсутствует. Если в результате динамических сил ротор прижат к одной из опорных поверхностей упорного подшипника, то в математической модели присутствуют соответствующие ограничения на осевые перемещения ( $U_x$ ). Результаты расчетов собственных частот обеих моделей приведены в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Собственные частоты ротора приводной турбины

№	форма	Ограничения	
		нет	$U_x$
1	Кр. (вал как жесткое недеформируемое тело)	0	0
2	Осевые (вал как жесткое недеформируемое тело)	0	---
3*	Вал как жесткое недеформируемое тело на гибких опорах	1,44	1,44
4*		3,05	3,05
5*	И1	450	450
6*	кр 1 узел между 3 и 4 дисками	495	495
7	Осевые 1 – узел на левой опоре	---	513
	Осевые 1 – узел между 3 и 4 дисками	1655	---
8*	И2 узел в районе 6-го диска	924	924
9	кр2 узлы в районе 2-го и 7-го дисков	997	997
10*	И3	1393	1393
11	кр3	1570	1570
12	кр3 узел между 1-м и 2-м дисками, между 3 и 4 и в районе 5-го диска	1814	1814
	Осевые 2		1963

Как видно из таблицы 3.10, при отсутствии ограничений на осевые перемещения первая форма осевых колебаний соответствует движению ротора как жесткого тела и интереса не представляет, а второй форме соответствует частота 1655 Гц. Эта частота даже при двукратном снижении за счет введения гибкости дисков останется за границей интересующего нас частотного диапазона. У модели с ограничением осевых перемещений ротора в районе упорного подшипника седьмая форма собственных колебаний соответствует осевым колебаниям ротора с узлом на указанном подшипнике и частоте 513 Гц. Следовательно, при численных исследованиях динамических характеристик редукторов на испытательном стенде следует обратить особое внимание на наличие возбуждения осевых колебаний ротора на частотах ниже 513 Гц и, возможно, принять решение об уточнении математической модели ротора. Для предварительных (оценочных) расчетов предлагаемая методика моделирования ротора вполне приемлема.

### **3.5. Выводы**

1. На базе численных исследований сформулированы особенности колебаний роторных систем.
2. Разработана методика построения упрощенных с учетом сформулированных выше особенностей моделей роторов турбоагрегатов для исследования динамики ГТЗА.

#### **4. ДИНАМИКА ПЛАНЕТАРНЫХ РЕДУКТОРОВ В СОСТАВЕ ТУРБОЗУБЧАТЫХ АГРЕГАТОВ**

При численном исследовании виброшумовых характеристик кораблей или подводных лодок, безусловно, необходимо моделирование корпуса корабля и гребного винта, но эти вопросы выходят за рамки данной работы. Кроме того, компоновка и конструкция рамы, на которой собирается ГТЗА носит закрытый характер. Поэтому в данной работе моделирование ГТЗА носит условный характер в силу моделирования некоторой абстрактной рамы, на которой крепятся турбина и редуктор. Валопровод к гребному винту и сам винт тоже не моделируются. Тем не менее, полученные выводы могут быть распространены на большинство турбозубчатых агрегатов, а рекомендации справедливы для реальных ГТЗА.

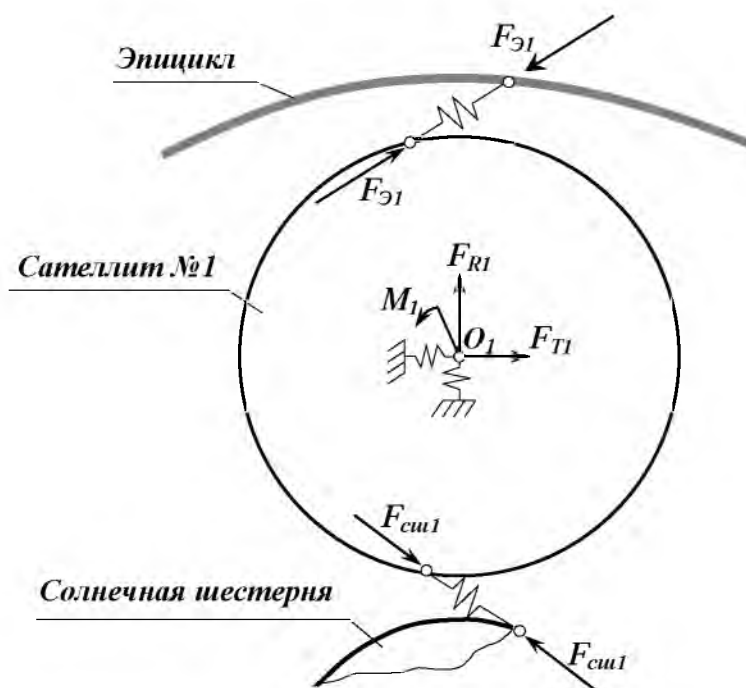
Задачи, рассматриваемые в данной главе, продиктованы ужесточением требований по снижению виброактивности турбозубчатого агрегата, в состав которого входит планетарный редуктор производства Калужского турбинного завода. Как показала практика эксплуатации данных механизмов, наиболее весомая составляющая в спектре распространяемой турбозубчатым агрегатом вибрации соответствует процессу пересопряжения зубьев 2-й ступени. Поэтому цель проводимых и рассматриваемых здесь исследований – поиск путей снижения уровня вибрации планетарного редуктора на частоте пересопряжения зубьев 2-й ступени.

##### **4.1. Взаимная компенсация возмущающих сил в зацеплениях сателлитов с центральными колесами**

Один из известных способов снижения вибрации механических систем при наличии нескольких источников возбуждения, действующих на одной частоте, заключается в подборе параметров конструкции, приводящих к полной или частичной взаимной компенсации этих

возбуждений. При соответствующих численных или экспериментальных исследованиях этот подход весьма эффективен, хотя добиться полной взаимной компенсации возмущающего воздействия на практике удастся редко.

Одна из основных причин возникновения динамических сил в зубчатом зацеплении – это изменяющаяся в процессе пересопряжения зубьев жесткость зацепления. В рассматриваемой конструкции, в зависимости от фазы зацепления, в контакте находятся четыре или пять пар зубьев. Построенная модель позволяет воспроизводить не только не равномерную по контактирующим зубьям нагрузку в плоскости зацепления, но и любые фазовые соотношения динамических сил в зацеплениях солнечная шестерня – сателлит и сателлит – эпицикл.



**Рис. 4.1. Точки приложения и направления динамических составляющих сил, действующих в зубчатых зацеплениях в плоскости поперечного сечения 1-го сателлита**

Рассмотрим динамические компоненты сил, действующих на первый (верхний) сателлит 2-й ступени. Обозначим их  $F_{Э1}$  и  $F_{су1}$  в соответствии с рис. 4.1. При четном количестве зубьев у сателлита динамическое воздействие на него со стороны эпицикла  $F_{Э}$  и солнечной

шестерни  $F_{cш}$  синхронно, при нечетном – в противофазе (т.е. в то время когда  $F_э$  стремится сжать пружину, аппроксимирующую зубчатое зацепление,  $F_{cш}$  стремится пружину растянуть).

Если указанные силы привести к центру оси сателлита, через которую они воздействуют на водило, и далее на выходной вал, то получим суммарную силу и момент. Момент приводит к крутильным колебаниям сателлита и не оказывает (теоретически) влияния на водило. Поэтому он пока не рассматривается. Суммарную силу разложим на тангенциальную  $F_R$  и радиальную  $F_T$  составляющие по отношению к оси водила. При синхронном и равном по амплитуде силовом воздействии на сателлит  $F_э$  и  $F_{cш}$  радиальная составляющая окажется равной нулю, а тангенциальная составляющая удвоится, т.е. будет максимальной. Если возмущающие силы действуют синхронно еще и по всем сателлитам, то суммарное воздействие тангенциальных составляющих приведет к максимальным крутильным колебаниям водила и выходного вала.

При противофазном воздействии  $F_э$  и  $F_{cш}$  тангенциальная составляющая равна нулю, а радиальная – максимальна. Циклическая симметрия водила при синхронном по сателлитам действии сил обеспечивает компенсацию радиального воздействия на водило со стороны осей сателлитов. Следовательно, на выходном валу не должно наблюдаться ни крутильных, ни поперечных (перпендикулярных оси вращения) колебаний.

Вышесказанные умозаключения справедливы для идеализированной модели редуктора с недеформируемыми узлами (сателлиты, оси сателлитов, эпицикл, солнечная шестерня). Наличие деформаций указанных узлов искажает описанную выше картину. Для уточнения реальной ситуации и оценки эффективности используемой методики снижения вибрации проведены исследования динамики двух моделей.

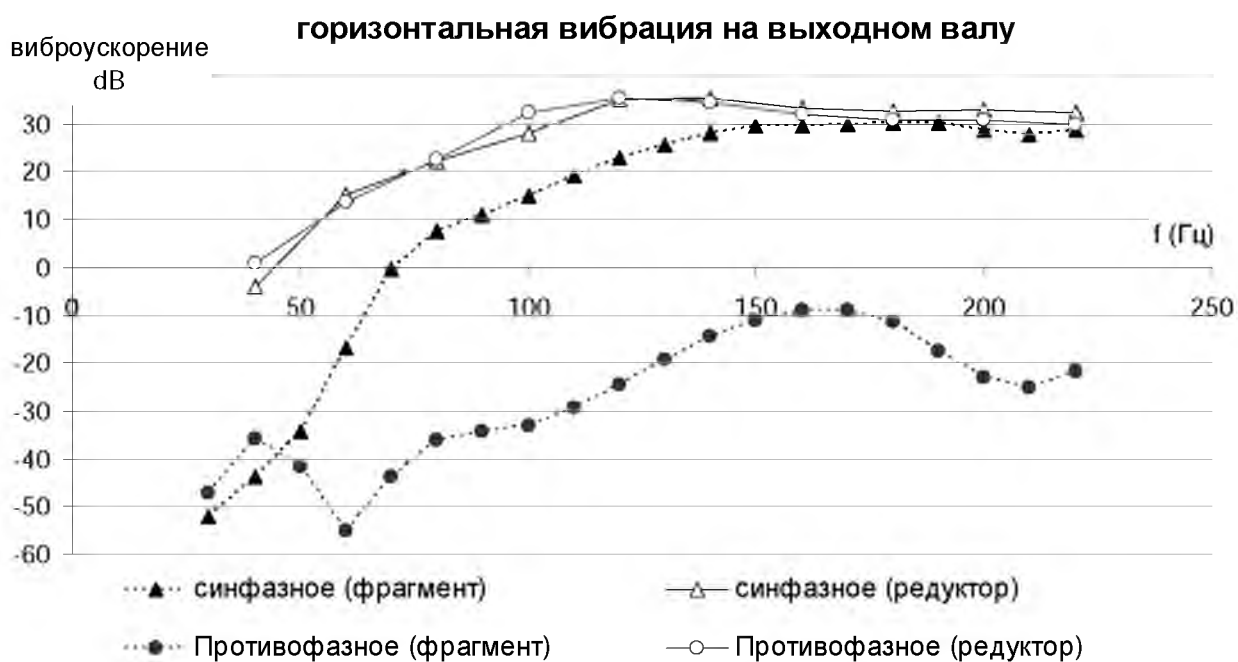
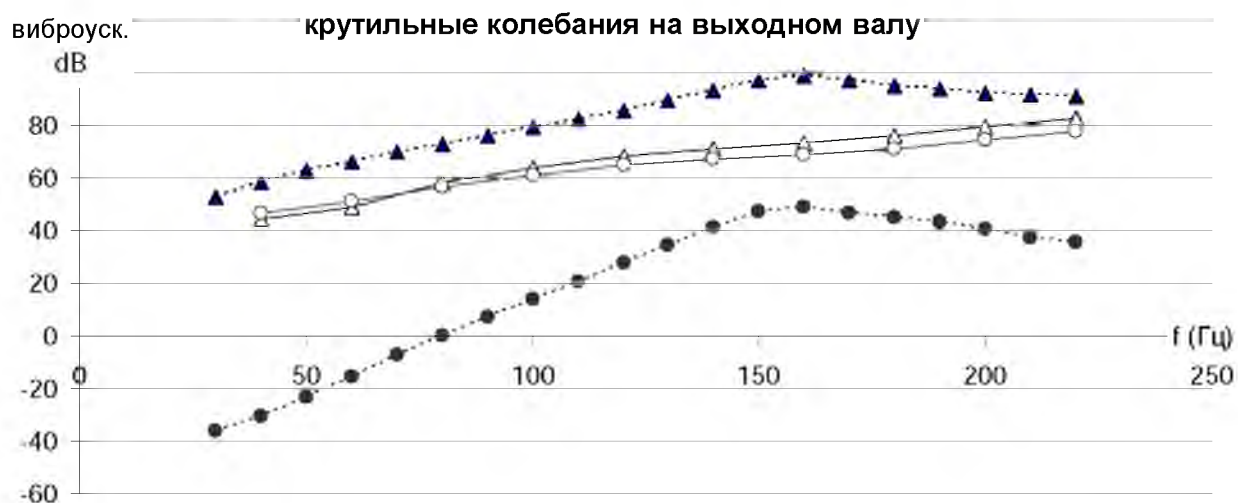
Первая модель, это модель фрагмента кинематической части, вторая – модель всего редуктора.

Модель фрагмента кинематической части представляет собой вторую ступень с выходным валом и опорными подшипниками водила, причем солнечная шестерня и эпицикл жестко закреплены в пространстве по всем степеням свободы во всех узлах конечноэлементной сетки, что делает их недеформируемыми неподвижными телами. Такая модель исключает влияние упругих и инерционных свойств солнечной шестерни и эпицикла, позволяя смоделировать идентичные по амплитуде силовые воздействия на сателлит  $F_{\varepsilon}$ ,  $F_{си}$ .

Исследование НДС фрагмента кинематической части при противофазном возмущении показало, что в результате деформации оси сателлита в радиальном направлении сам сателлит совершает крутильные колебания относительно смещенной оси. Это приводит к появлению тангенциальных составляющих сил, действующих на водило со стороны сателлитного узла, и, следовательно, крутильным колебаниям выходного вала, несмотря на компенсацию тангенциальных составляющих сил со стороны эпицикла и солнечной шестерни. Поперечные колебания выходного вала практически отсутствуют.

В реальности отличия жесткостных и инерционных характеристик присоединенных деталей (эпицикл и солнечная шестерня) приводят к разбалансировке действующих на сателлит со стороны центральных колес сил и снижению компенсационного эффекта. Исследование динамики с помощью модели всего редуктора позволяет оценить этот эффект. На рис. 4.2 приведены АЧХ, отражающие уровни вибрации выходного вала, вызванные пересопряжением зубьев.

Из приведенных АЧХ видно, что реализация противофазного возбуждения сателлитов в данной конструкции абсолютно не эффективна для снижения как крутильных, так и поперечных колебаний.



**Рис. 4.2. АЧХ, полученные с помощью модели фрагмента ходовой части и модели всего редуктора для различных схем возбуждения сателлитов**

На Калужском турбинном заводе и ИМАШ РАН исследовались еще два варианта возбуждения, которые обеспечили реальное снижение уровня вибрации конструкции. В отличие от рассмотренных выше синфазного и противофазного возбуждения, в этих двух вариантах силы, действующие на разные сателлиты со стороны эпицикла и солнечной шестерни, не синхронны, а имеют некоторое фазовое смещение.

Снижение уровня вибрации выходного вала в этих случаях обусловлено суммированием на водиле как на относительно жестком недеформируемом теле не сбалансированных на сателлитах сил.

Расчеты этих двух вариантов проведены в качестве еще одного теста корректности построенной модели и правильности приложения динамических сил, возникающих при пересопряжении зубьев. В случае корректного моделирования мы должны получить близкие к заведомо известным из ранее выполненных расчетов и экспериментов результаты: различные виды взаимной компенсации вибровозбуждения и вынужденных колебаний на элементах редуктора.

В табл. 4.1 приведены значения фазовых сдвигов по зацеплениям сателлитов для 3-х вариантов выполненных тестовых расчетов (для сравнения добавлен вариант с синфазным возбуждением). Следует отметить, что характерные разности фаз возмущающих сил  $\Delta\varphi$  в зацеплениях «солнечная шестерня – сателлиты» и «сателлиты – эпицикл», равные соответственно  $0^\circ$  и  $180^\circ$ , приведены в первом приближении без учета величин второго порядка малости.

Таблица 4.1.

Фазовые смещения динамического возбуждения  $\Delta\varphi$  по зацеплениям второй ступени редуктора

№ сателлита	Возбуждаемые колебания водила (выходного вала)					
	Крутильные (тест №1)		Поперечные (тест №2)		--- (тест №3)	
	$F_{сш}$	$F_{\text{Э}}$	$F_{сш}$	$F_{\text{Э}}$	$F_{сш}$	$F_{\text{Э}}$
1	0	0	0	0	0	180
2	0	0	72	72	144	324
3	0	0	144	144	288	108
4	0	0	216	216	72	252
5	0	0	288	288	216	36

При синхронном (синфазном) возбуждении по всем зацеплениям силы  $F_{\text{Э}1} - F_{\text{Э}5}$  и  $F_{сш1} - F_{сш5}$  (рис. 4.1) синхронно сжимают/растягивают пружины, аппроксимирующие статическую жесткость зубчатых зацеплений. В таблице 7.1 этот вариант возбуждения обозначен как тест-



вый расчет №1. При таком возбуждении должны наблюдаться крутильные формы колебаний и отсутствовать поперечные.

Во втором тестовом расчете фазовые смещения подобраны таким образом, что радиальные составляющие динамического воздействия  $F_R$  должны компенсироваться на спутниках, а сумма тангенциальных составляющих  $F_T$  по всем спутникам вызывает не крутильные, а поперечные колебания водила. Реализовать такое возбуждение можно за счет варьирования чисел зубьев  $z_j$  центральных колес ( $j=1$  – солнечная шестерня,  $j=2$  – эпицикл) в пределах  $z_j \pm E(z_c/2)$ , где  $z_c$  – количество спутников в передаче,  $E(z_c/2)$  – целая часть  $z_c/2$  (например, в рассматриваемом случае ( $z_c=5$ ),  $E(z_c/2)=2$ ) [5].

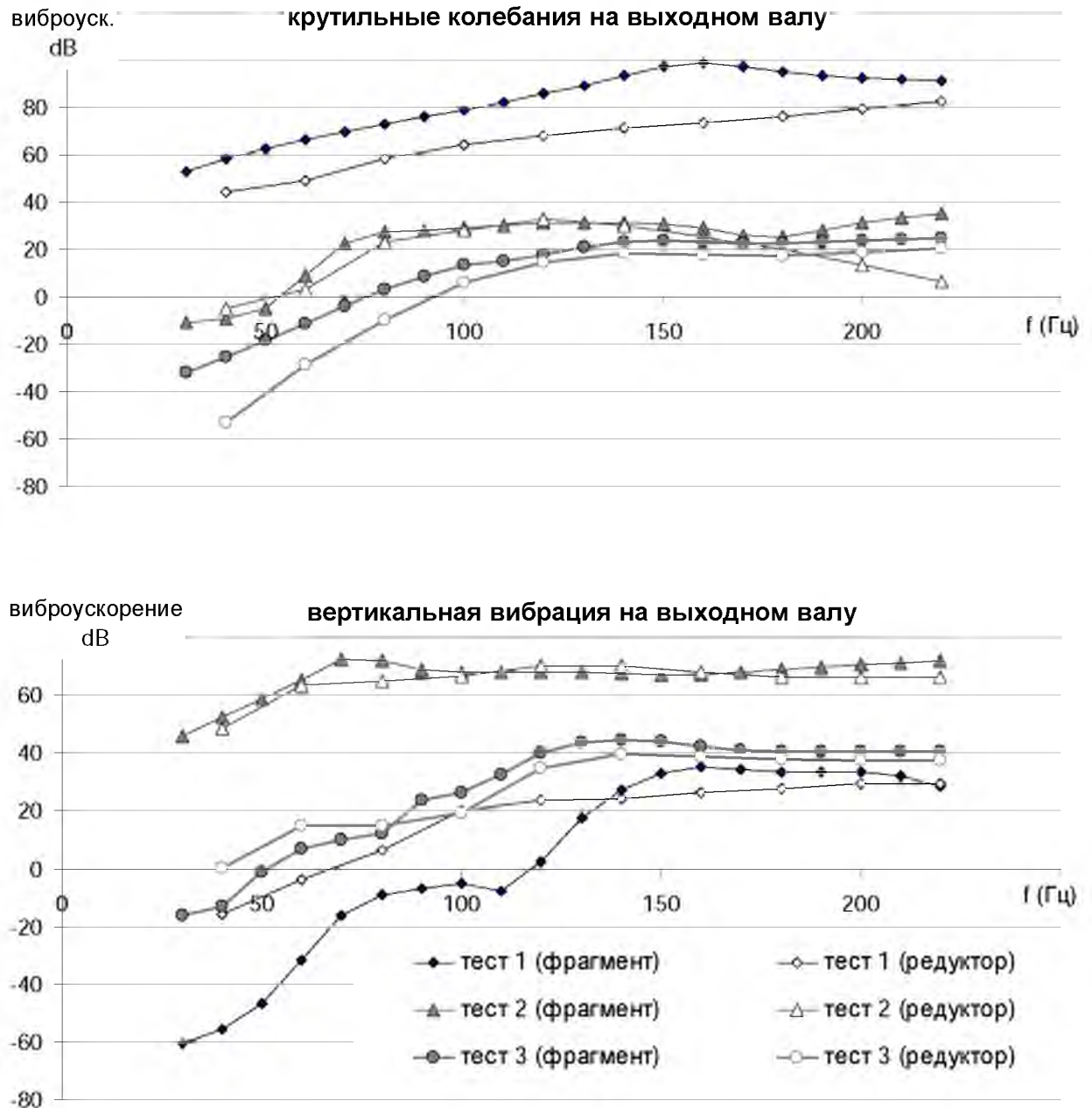
В третьем тесте реализуется (также за счет изменения чисел зубьев) возбуждение, при котором действующие в противофазе силы  $F_{cm}$  и  $F_z$  не должны вызывать тангенциального возмущения водила, а фазовые смещения по спутникам обеспечивают компенсацию радиальных сил, т.е. должна наблюдаться компенсация и крутильных и поперечных форм колебаний.

Для анализа влияния разбалансировки действующих на спутник сил тестовые расчеты опять проводились для двух вариантов конструкции: фрагмента кинематической части и полной модели редуктора с учетом системы его подвеса и амортизации.

Полученные АЧХ (рис. 4.3) продемонстрировали ожидаемый эффект взаимной компенсации вертикальных колебаний в тестовых расчетах №1 и №3, а также крутильных колебаний в тестовых расчетах №2 и №3 для обеих моделей. Аналогичные результаты получены для горизонтальных (перпендикулярных оси вращения) колебаний.

Расчетная величина компенсации в исследуемом диапазоне частот составляет 25–40 дБ, что значительно меньше, чем при использовании более простой модели [29] (80–100 дБ и более). Столь малое по сравнению с использовавшейся ранее в ИМАШ РАН моделью сниже-

ние колебаний в результате варьирования фазовых соотношений возмущающих сил в зубчатых зацеплениях является результатом более детальной проработки различных элементов редуктора, в первую очередь зубчатых колес и водила.



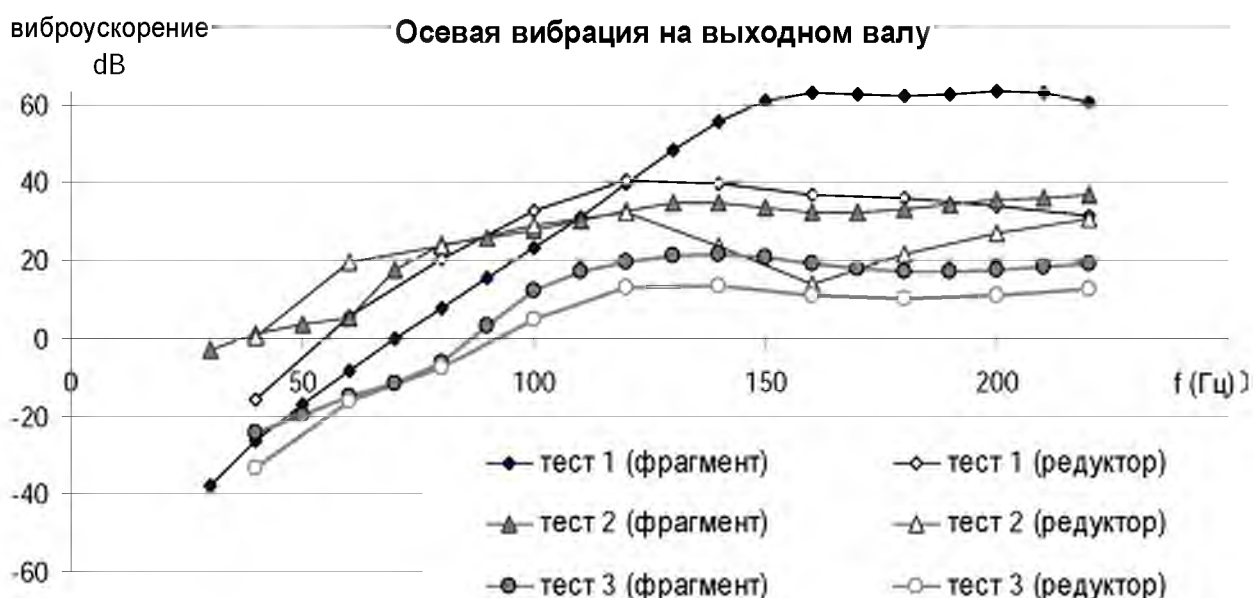
*Рис. 4.3. АЧХ отклика, полученного на фланце выходного вала, в ответ на возбуждение, имитирующее процесс пересопряжения зубьев 2-й ступени редуктора*

Построенная модель позволила оценить предельную величину эффекта взаимной компенсации возмущающих сил, который может быть получен данным методом в рассматриваемой конструкции.

Еще один важный вопрос, ответ на который был получен в результате исследований, - это объяснение причины возникновения осевых колебаний. Дело в том, что экспериментальные исследования выявили наличие осевых колебаний, хотя в шевронном зацеплении их не должно быть.

В расчетах для полностью симметричной по полушевронам схемы приложения возмущающих сил в зубчатых зацеплениях осевые колебания стали неожиданностью. Предыдущие модели редуктора, разработанные в ИМАШ РАН, в силу своей идеализации не позволяли получить подобных результатов.

В результатах проведенных расчетов были выявлены осевые колебания, причем соизмеримые по величине с поперечными (рис. 4.4).



**Рис. 4.4. АЧХ осевых колебаний фланца выходного вала при различных типах вибровозбуждения**

С целью анализа причин возникновения в редукторе столь существенных осевых колебаний, а также снижения (по сравнению с предшествующими моделями) степени взаимной компенсации поперечных и крутильных форм колебаний водила проведена серия расчетов напряженно-деформированного состояния 2-й ступени редуктора при динамических нагрузках.

Каждый расчет соответствует статическому состоянию системы, полученному при силовом воздействии, эквивалентном динамическим составляющим сил от пересопряжения зубьев в начальный момент времени для соответствующего табл. 4.1 режима возбуждения.

В табл. 4.2 приведены результаты расчета осевых  $U_x$ , вертикальных  $U_y$ , и горизонтальных  $U_z$  перемещений, а также поворота вокруг оси  $X$   $R_x$  контрольных точек  $K_{T1}$  (носовой упор водила) и  $K_{T2}$  (фланец выходного вала). Расчет проведен для фрагмента кинематической части с жестко закрепленными эпициклом и солнечной шестерней 2-й ступени и для всего редуктора с учетом его подвеса и системы амортизации.

Таблица 4.2.  
Статические смещения контрольных точек при различных вариантах возмущения

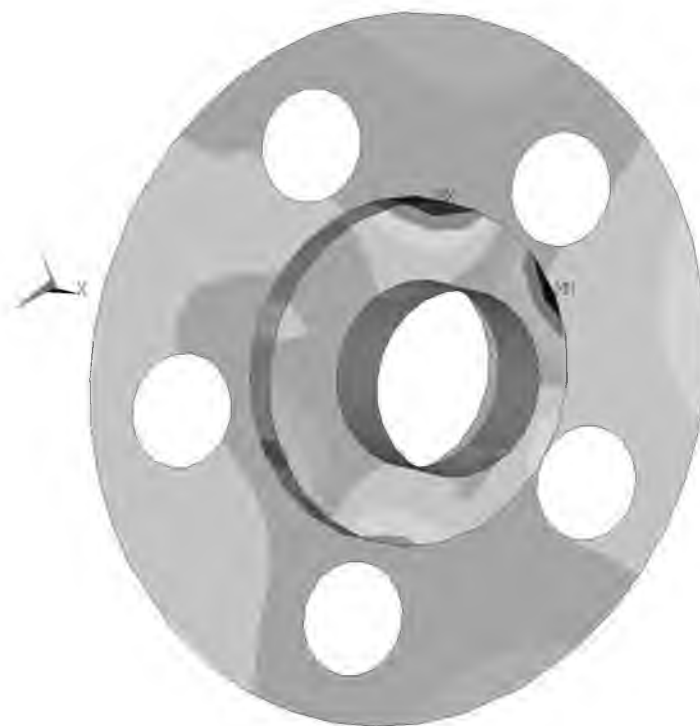
	$K_{T2}$				$K_{T1}$			
	$U_x$	$U_y$	$U_z$	$R_x$	$U_x$	$U_y$	$U_z$	$R_x$
<b>Фрагмент кинематической части</b>								
Тест 1	-1,36e-18	-1.6e-21	-1.8e-20	4.6e-10	1,9e-19	1.4e-19	8.33e-19	4.6e-10
Тест 2.	-1.3e-20	3.4e-15	3e-10	1.4e-15	-1.6e-19	3.4e-15	3e-10	1.4e-15
Тест3.	1e-19	2.8e-15	3.3e-15	2.5e-15	3.2e-19	2.8e-15	3.3e-15	2.5e-15
<b>Редуктор в сборе</b>								
Тест 1	-1.e-18	-2.8e-19	3.5e-18	3.3e-10	-2.4e-18	5.7e-19	-6.5e-18	3.3e-10
Тест 2.	3.7e-16	-6.3e-15	-2e-13	-8.8e-16	8.2e-16	-6.2e-14	1.8e-13	-8.8e-16
Тест3.	-3.04e-17	-5.2e-17	2.3e-16	1.6e-15	-3.1e-17	9.2e-17	-3.4e-16	1.6e-15

Модель фрагмента редуктора более близка к упрощенной модели, использовавшейся ранее, но за счет деформируемых сателлитных узлов и водила уже позволяет сделать некоторые выводы о возможностях компенсации крутильных и поперечных форм колебаний водила.

Максимальный эффект компенсации поперечных и осевых перемещений наблюдается при синфазном возбуждении (табл. 4.2 тест №1). Расчетные величины этих перемещений на 10 порядков меньше крутильных и, скорее всего, являются результатом накопленных погрешностей вычислений. Это вполне соответствует логике и здравому смыслу: циклически симметричная конструкция водила с циклически симметричной тангенциальной нагрузкой не должна приводить к деформации осевой линии.

Неравномерное по сателлитам распределение тангенциальной нагрузки на их оси (тест 2) приводит к отличающейся от строгой циклической симметрии деформации водила. Так, деформация носовой щеки водила в осевом направлении (рис. 4.5) напоминает дисковую форму колебаний с двумя узловыми диаметрами, однако циклическая симметрия 5-го порядка делает эту форму не симметричной (имеется в виду циклическая симметрия) относительно оси вращения. Это приводит к смещению узловой точки с оси вращения и появлению аксиальных колебаний центральных, лежащих на оси вращения, точек.

Таким образом, причиной возникновения как осевых, так и некоторых поперечных форм колебаний контрольных точек является податливость конструкции водила, приводящая к трансформации его крутильного возбуждения в осевые и поперечные колебания выходного вала и корпуса.



***Рис. 4.5. Статическая деформация носовой щеки водила в осевом направлении***

Неравномерное распределение радиальной нагрузки водила со стороны сателлитов также приводит к возникновению осевых и поперечных перемещений контрольных точек в результате деформации водила (тест №3).

Более точную картину НДС дает расчет всего редуктора, учитывающий податливость присоединенных деталей. В этом случае равенство нулю тангенциальной и радиальной составляющих ( $F_R$  и  $F_T$  рис. 4.2) сил, действующих со стороны сателлитов на водило, не соблюдается, и эффект компенсации существенно снижается.

Кроме того, если для тестовых расчетов фрагмента ходовой части характерно синхронное смещение контрольных точек в перпендикулярных оси вращения направлениях ( $U_Y$ ,  $U_Z$  табл. 4.2), то расчет всей конструкции свидетельствует о наличии перекосов всего водила (тесты №2,3 для редуктора). Это может объясняться, например, различной жесткостью носового и кормового подшипников водила.

В динамике начинают действовать и инерционные составляющие сил со стороны присоединенных деталей, усугубляя указанную выше разбалансировку сил. Этот эффект подтверждается приведенными на рис. 4.3 АЧХ: чем ниже частота, тем эффективней компенсация вибрации.

Таким образом, проведенные исследования не только подтверждают корректность построенной модели, но и позволяют оценить возможную эффективность снижения вибрации за счет изменения фазовых соотношений динамических сил, вызываемых пересопряжением зубьев. Так, в исследуемой конструкции планетарного редуктора за счет соответствующего подбора чисел зубьев второй ступени теоретический предел снижения вибрации на частоте пересопряжения зубьев составляет 20 – 40дБ.

Кроме того, показано, что одной из причин возникновения осевых колебаний выходного вала в шевронном планетарном редукторе является податливость конструкции водила.

#### **4.2. Влияние неравномерности нагрузки по сателлитам на динамику системы**

Одной из неприятных особенностей многопоточных передач, к которым относятся планетарные механизмы, является неравномерность распределения нагрузки по потокам, обусловленная неточностью изготовления и погрешностями монтажа элементов редуктора и, возможно, диссиметрия некоторых силовых элементов. С целью компенсации вышеупомянутого явления в исследуемом редукторе используется плавающая солнечная шестерня и конструкция эпицикла с повышенной податливостью. С этой же целью оси сателлитов выполнены тонкостенными, что повышает их гибкость и должно способствовать более равномерному распределению нагрузки по сателлитам.

Рассмотренная в предыдущем разделе схема взаимной компенсации возмущающих сил при противофазном возбуждении спутников со стороны эпицикла и солнечной шестерни и фазовым смещением действующих сил в  $144^\circ$  по отношению к соседним спутникам весьма эффективна. Однако расчеты проводились в предположении равенства амплитуд возмущающих воздействий по спутникам.

Тензометрирование одного из опытных редукторов выявило неравномерность распределения нагрузки по спутникам в пределах 10%. Построенная модель позволяет смоделировать подобную ситуацию и сравнить ее с той, которая была бы при равномерном распределении нагрузки.

Кроме того, в данном разделе рассматриваются более точные значения фазовых смещений силовых воздействий на спутник со стороны эпицикла и со стороны солнечной шестерни. Дело в том, что в связи с особенностями зацеплений спутника (внешнее с солнечной шестерней и внутреннее с эпициклом) при нечетном числе зубьев спутника в исследуемой конструкции фазовое смещение рассматриваемых силовых воздействий составляет не  $180^\circ$ , а  $190^\circ$  (табл. 4.3).

Табл. 4.3.

Распределение нагрузки по спутникам (в % от номинальной) и фазовые смещения возмущающих сил

№ спутника	зацепление			
	Солн. шестерня		эпицикл	
	Амплитуда (%)	Фаза (град)	Амплитуда (%)	Фаза (град)
1	110	0	110	190
2	90	144	90	334
3	95	288	95	118
4	105	72	105	262
5	100	216	100	46



Аналитическое исследование показало, что вариант перераспределения нагрузки по сателлитам, выявленный при тензометрировании редуктора, не самый критичный. Если ограничиться десятипроцентным отклонением от номинала передаваемой через каждый сателлит мощности, то можно определить два варианта, дающие максимальное повышение крутильной или поперечной вибрации.

Для оценки влияния неравномерности нагрузки были выбраны четыре тестовых варианта распределения нагрузки по сателлитам: 1-й – равномерное распределение, 2-й – согласно тензометрированию, 3-й – обеспечивающий максимальные крутильные колебания выходного вала; 4-й – обеспечивающий максимальные поперечные колебания выходного вала (табл. 4.4).

Табл. 4.4.

Варианты распределения нагрузки по сателлитам

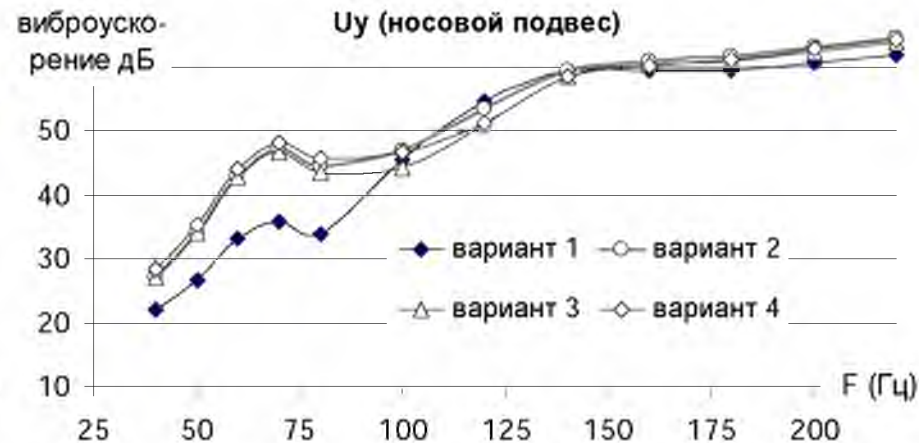
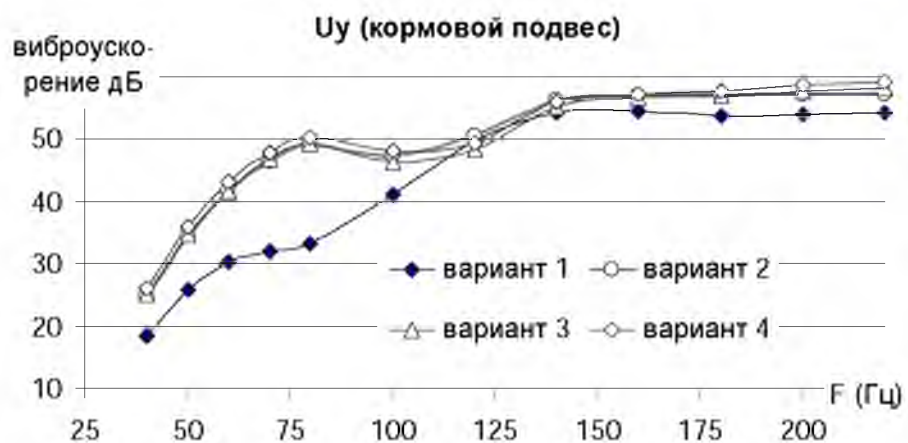
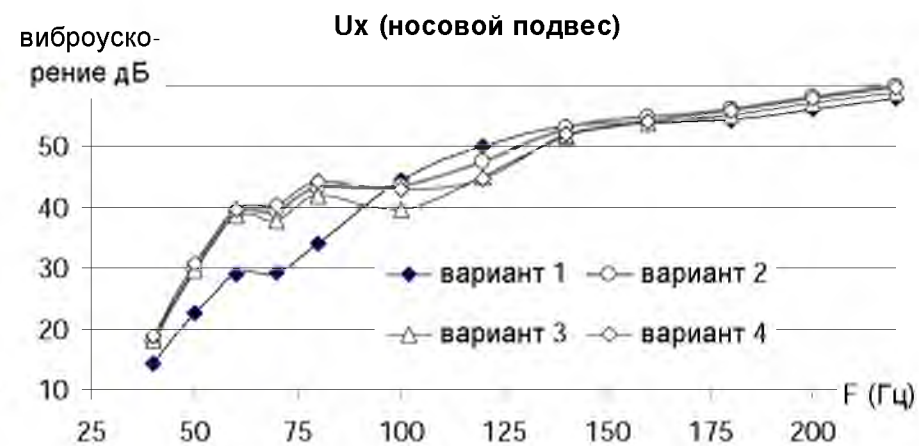
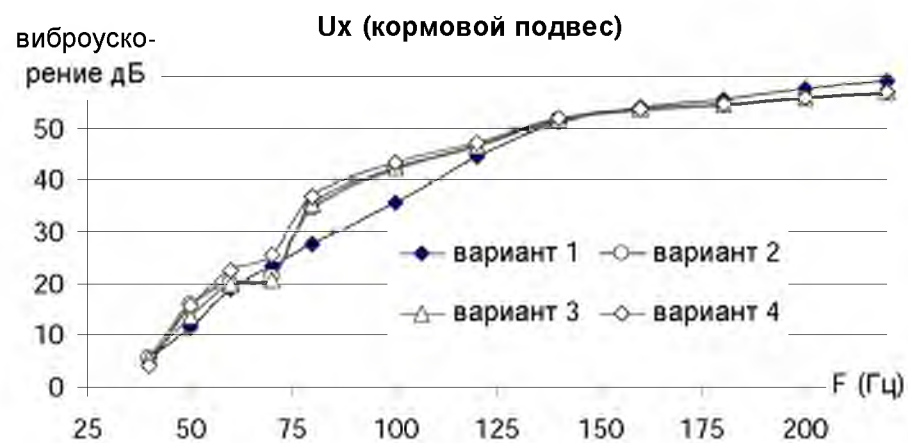
№ сателлита	1 вариант равномерное	2 вариант эксперимент	3 вариант max кручение	4 вариант max поперечные
1	1	1,1	1,1	1,1
2	1	0,9	0,9	0,9
3	1	0,95	1	0,9
4	1	1,05	1,1	1,1
5	1	1	0,9	1

Анализируя приведенные на рис.4.6-4.8 АЧХ, можно сказать следующее. Для кормового и носового вертикальных подвесов наиболее критичной с точки зрения передачи на внешнюю раму является вертикальная вибрация (в направлении оси Y). В диапазоне частот 40–100 Гц неравномерность нагрузки вызывает существенное повышение уровня вибрации – до 10 дБ у носового и до 18 дБ у кормового подве-

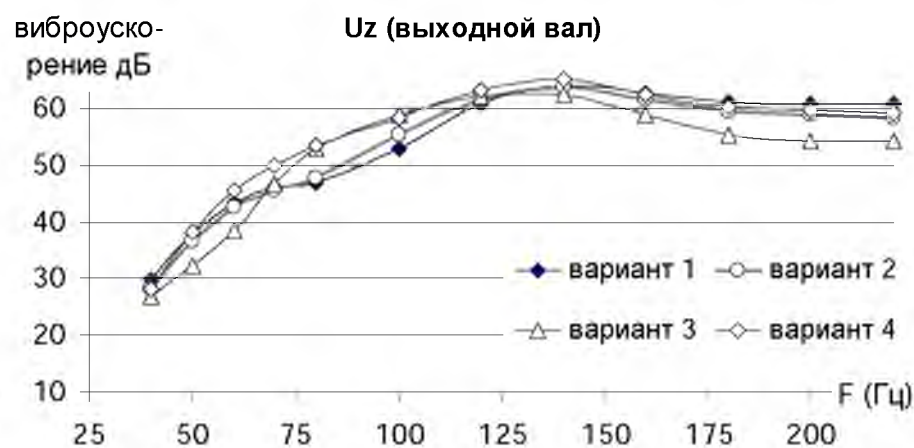
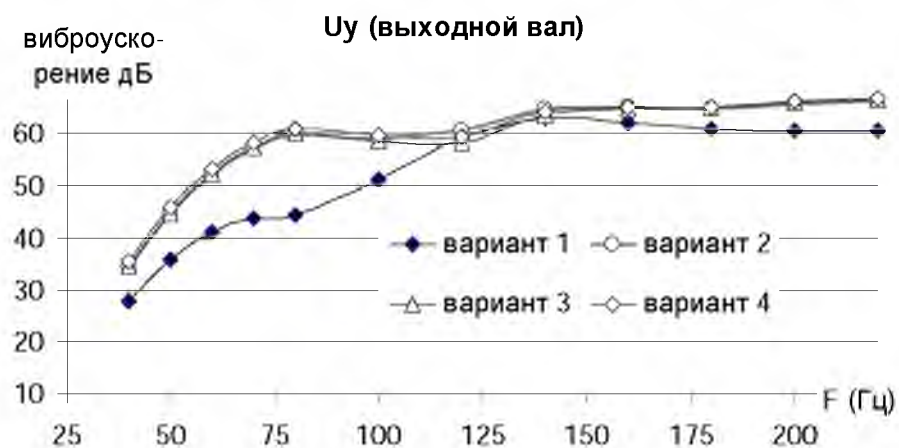
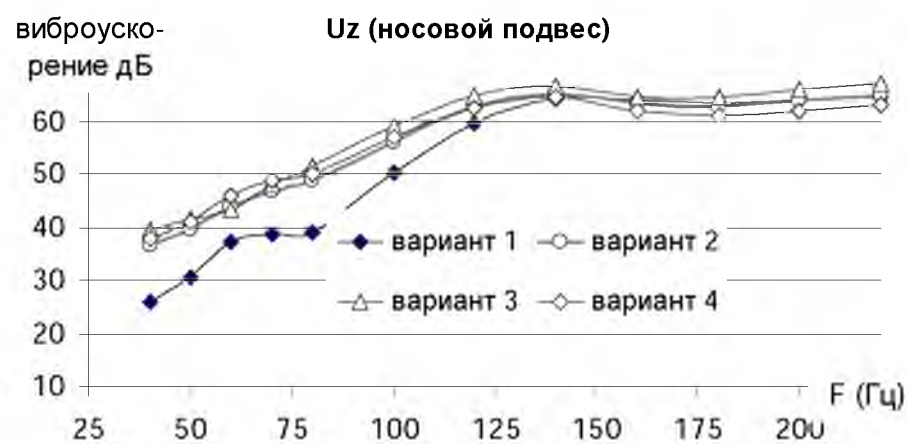
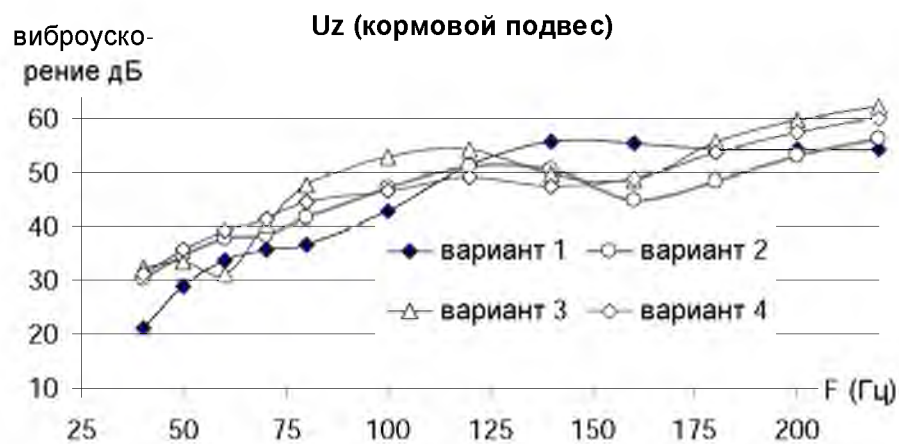
сов на частотах 60 и 75 Гц соответственно. По другим направлениям повышение вибрации не такое значительное.

На выходном валу неравномерность нагрузки по сателлитам вызывает повышение поперечной вибрации до 15 дБ на частоте 75 Гц. На частоте, большей 120 Гц, рост вибрации не превышает 5 дБ. Уровень осевой вибрации не повышается. Мало того, на частоте 75 Гц по осевым колебаниям наблюдается эффект антирезонанса (вибрация снижается на 15–20 дБ). Уровень крутильных колебаний на всем диапазоне исследуемых частот вырос на 15–20 дБ.

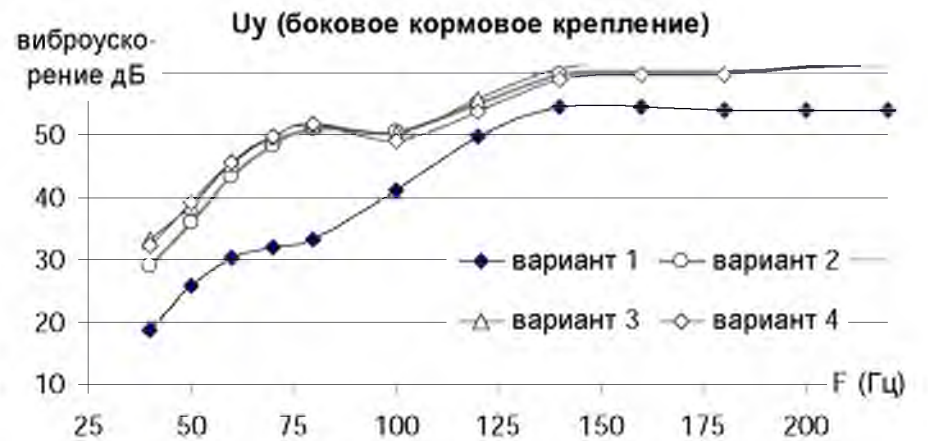
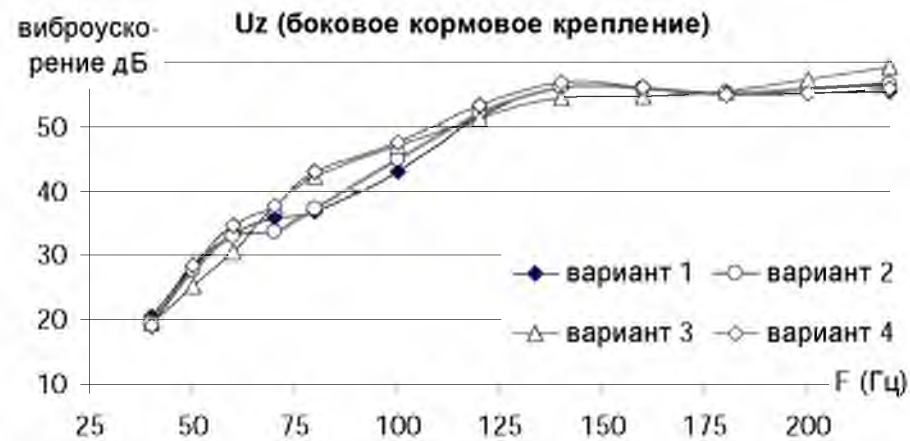
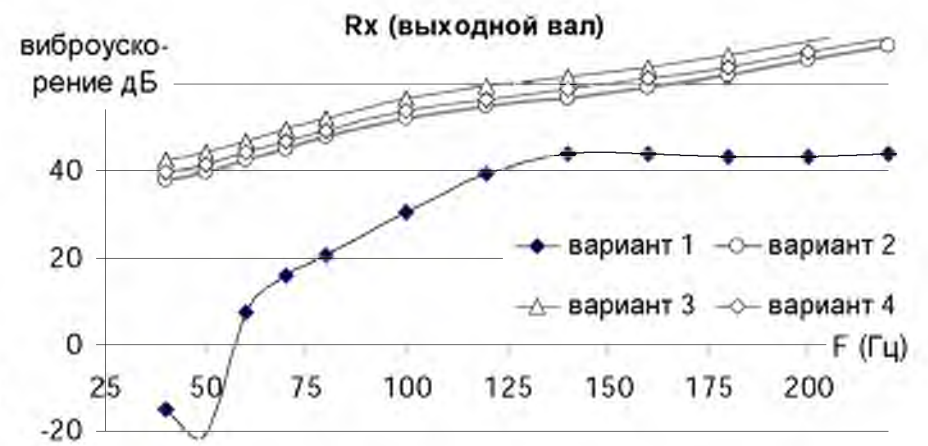
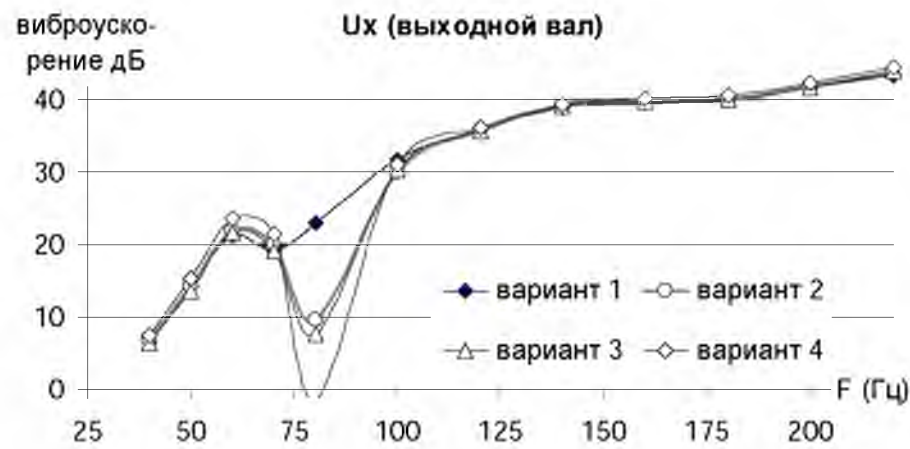
В боковых точках крепления корпуса наиболее критична вибрация в направлении оси Z. Уровень повышения вибрации в этом направлении максимален в диапазоне частот 70–90 Гц и достигает 5–6 дБ. С учетом жесткости крепления и граничных условий расчетной модели это свидетельствует о значительном повышении вибрации, передаваемой на внешнюю раму (как и в случае с колебаниями в направлении оси Y в зоне вертикальных подвесов). Вне указанного частотного диапазона повышение вибрации незначительно. В направлении оси Y повышение вибрации достигает 15–18 дБ, но это крутильные колебания корпуса, которые «развязаны» по отношению к внешней раме виброизоляторами.



**Рис. 4.6. Рост вибрации в контрольных точках при неравномерности распределения нагрузки по сателлитам в пределах 10% (варианты 2–4 согласно табл. 4.4)**



*Рис. 4.7. Рост вибрации в контрольных точках при неравномерности распределения нагрузки по сателлитам в пределах 10% (варианты 2–4 согласно табл. 4.4)*



*Рис.4.8. Рост вибрации в контрольных точках при неравномерности распределения нагрузки по сателлитам в пределах 10% (варианты 2–4 согласно табл. 4.4)*

Полученные результаты, во-первых, подтверждают важность работ по повышению равномерности распределения нагрузки по спутникам. Во-вторых, позволяют оценить имеющийся резерв снижения уровня вибрации, который может быть достигнут путем выравнивания распределения передаваемой по спутникам мощности.

#### **4.3. Влияние корректировки фазовых соотношений возбуждающих сил со стороны эпицикла и солнечной шестерни.**

Как было сказано выше, фазовый сдвиг динамических сил, действующих на спутник со стороны эпицикла и солнечной шестерни  $F_e$  и  $F_{см}$  (рис. 4.1) при четном числе зубьев спутника, в исследуемой конструкции составляет не  $180^\circ$  а  $190^\circ$ . Построенная модель позволяет с достаточно высокой точностью определить характер влияния этого отклонения от строгой противофазности на вибрацию в контрольных точках. Однако жесткостные и демпфирующие свойства подшипников скольжения спутник–ось могут изменяться в достаточно широких пределах из-за технологических отклонений, изменений режимов работы редуктора, изменения температурного режима.

По этой причине исследование влияния указанного фазового отклонения проведено для максимальной и минимальной жесткости подшипников скольжения. На рис. 4.9–4.11 приведены АЧХ редуктора при максимальной радиальной жесткости подшипников ( $1,5e12$  Н/М). На рис. 4.12–4.15 приведены АЧХ редуктора при минимальной радиальной жесткости подшипников ( $1,5e9$  Н/М).

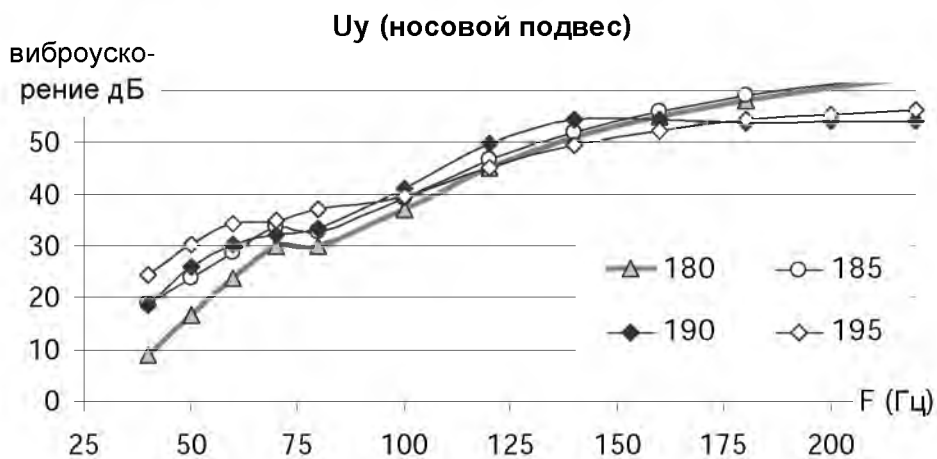
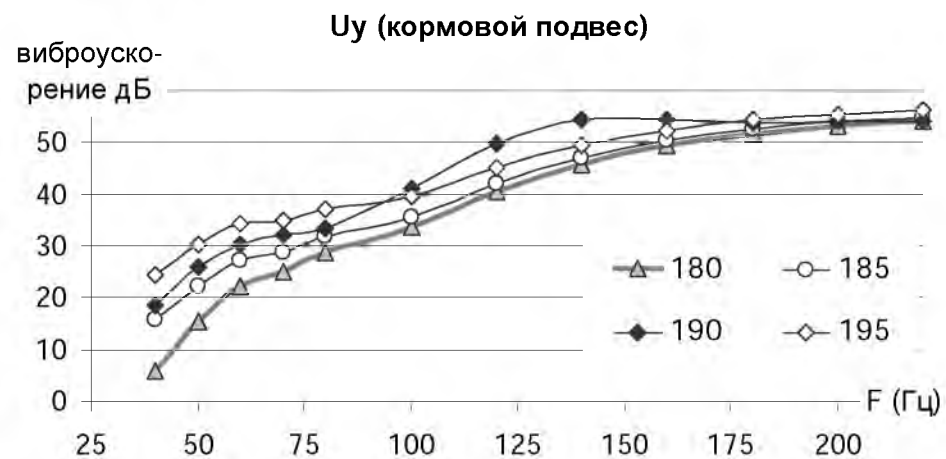
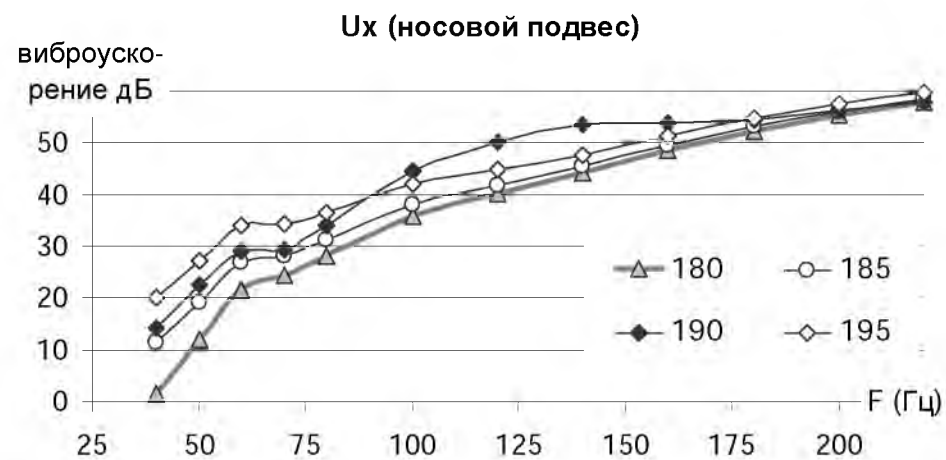
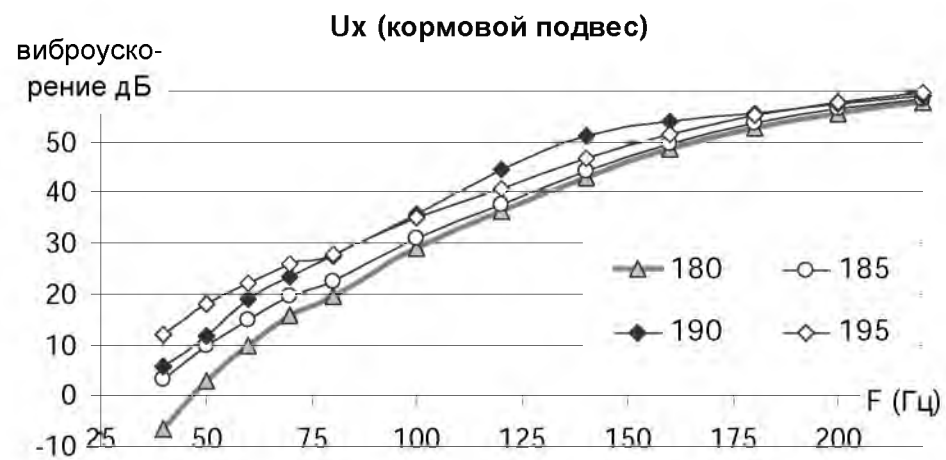
Из приведенных АЧХ видно, что влияние фазового смещения в  $10^\circ$  возмущающих сил со стороны эпицикла и солнечной шестерни от строгой противофазности существенным образом влияет на вибрацию в контрольных точках.

Сравнивая АЧХ при максимальной и минимальной жесткости подшипников спутников, можно констатировать, что снижение жестко-

сти понижает уровень вибрации, вызванный фазовым отклонением. Более того, изменение уровня вибрации получает ярко выраженный частотно зависимый характер.

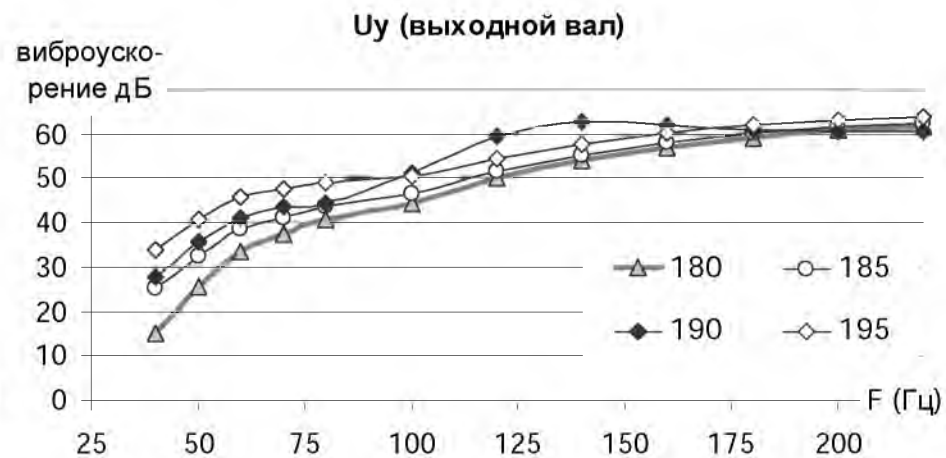
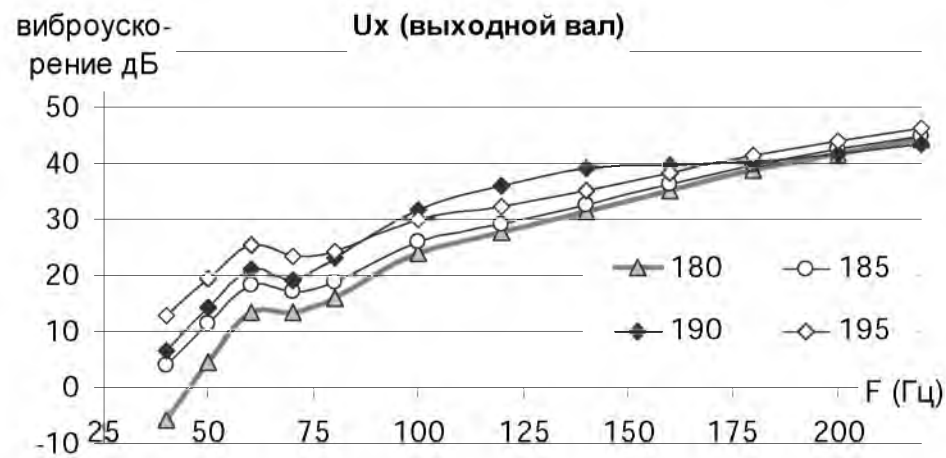
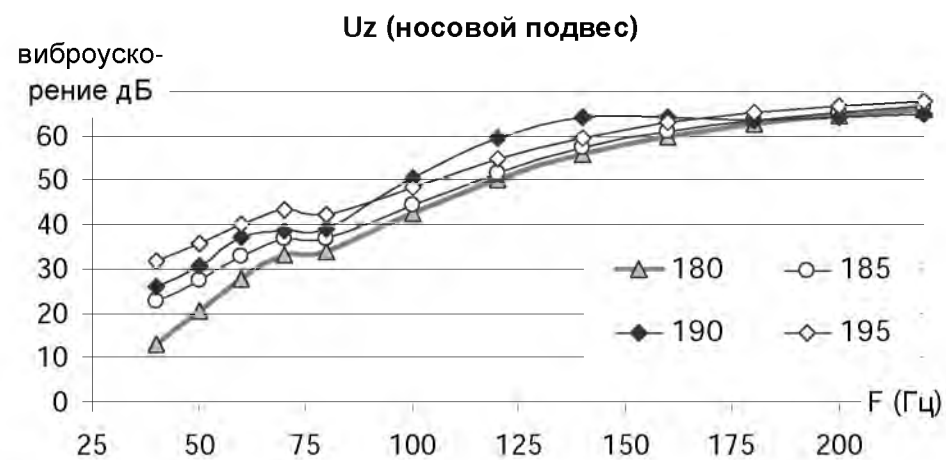
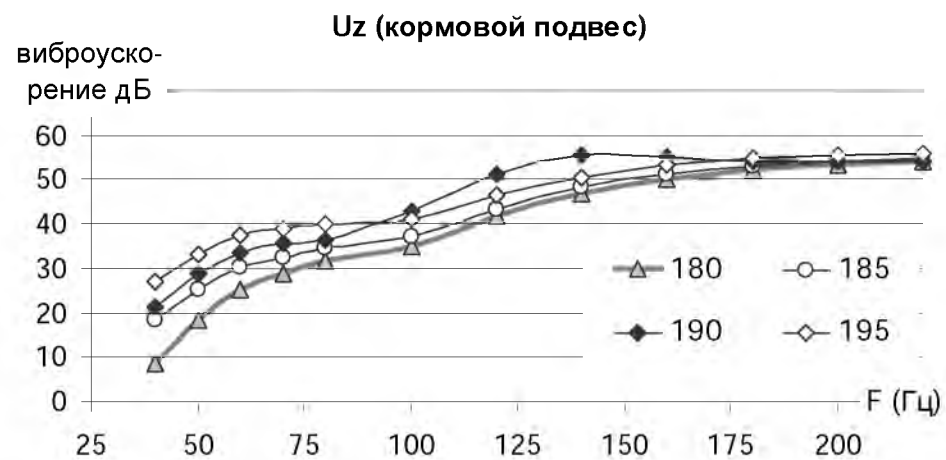
При минимальной жесткости подшипников скольжения на частотах, больших 90 Гц, влиянием отклонения фазового смещения от  $180^\circ$  можно пренебречь. На частоте 60 Гц устранение указанного отклонения приводит к снижению вибрации на 6-8 дБ, т.е. как минимум вдвое. На частоте 20 Гц вибрация уменьшается на порядок (20 дБ). Поэтому, если мощный планетарный редуктор работает на низких оборотах и частота пересопряжения зубьев меньше 60 Гц, то устранение указанного отклонения фазового смещения от  $180^\circ$  однозначно дает существенный положительный эффект.

При максимальной жесткости соединения сателлит-водило частота, на которой исследуемым фазовым отклонением можно пренебречь, повышается до 200 Гц. В частотном диапазоне 30–150 Гц устранение фазового отклонения снижает уровень вибрации во всех контрольных точках как минимум на 10 дБ, за исключением крутильных колебаний выходного вала на частотах, близких к 50 Гц, где фазовое отклонение вызывает эффект антирезонанса и уровень вибрации не изменяется (R<sub>x</sub> рис. 4.11).

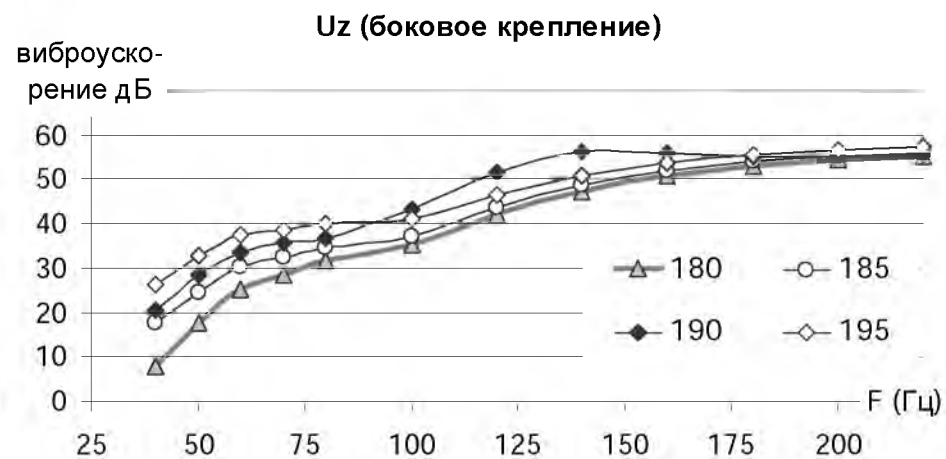
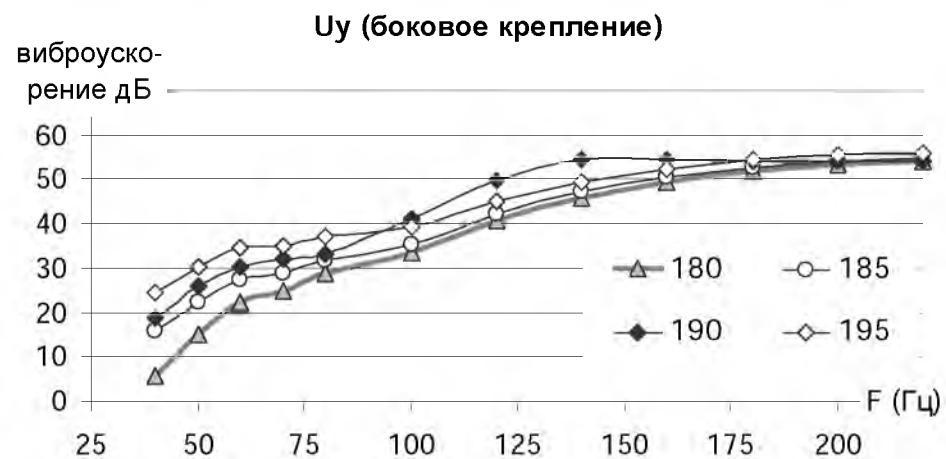
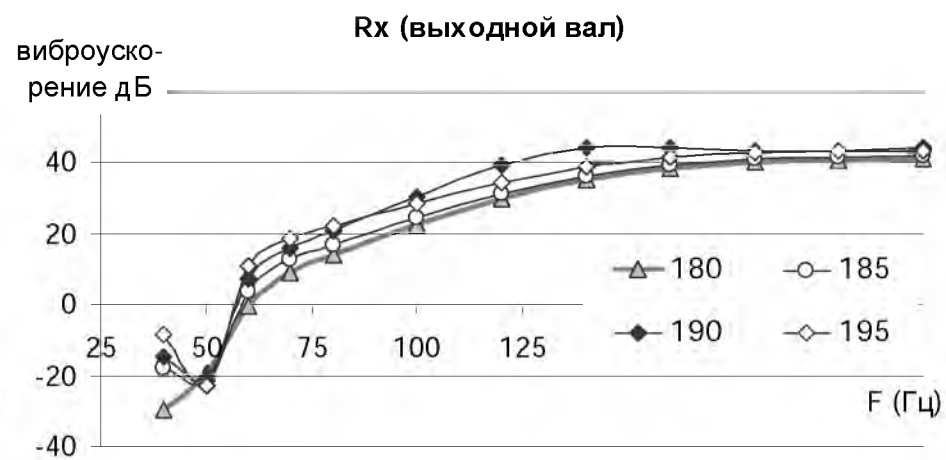
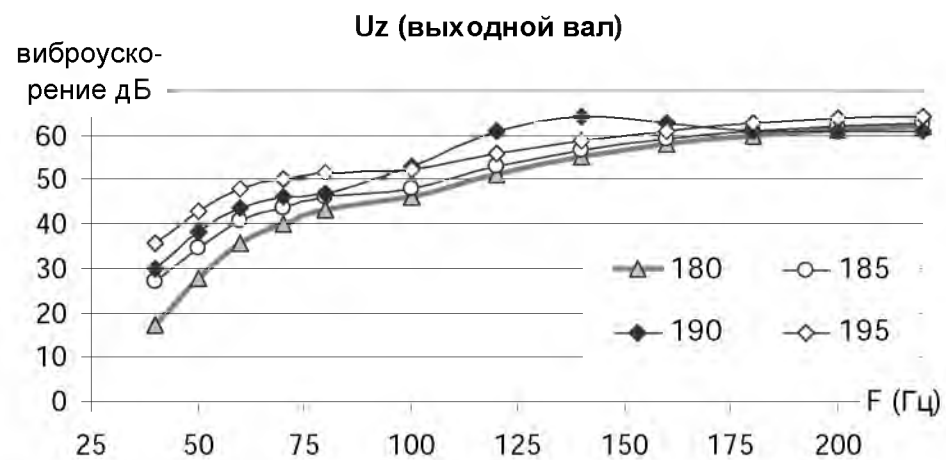


*Рис. 4.9. АЧХ при максимальной жесткости подшипников сателлитов*

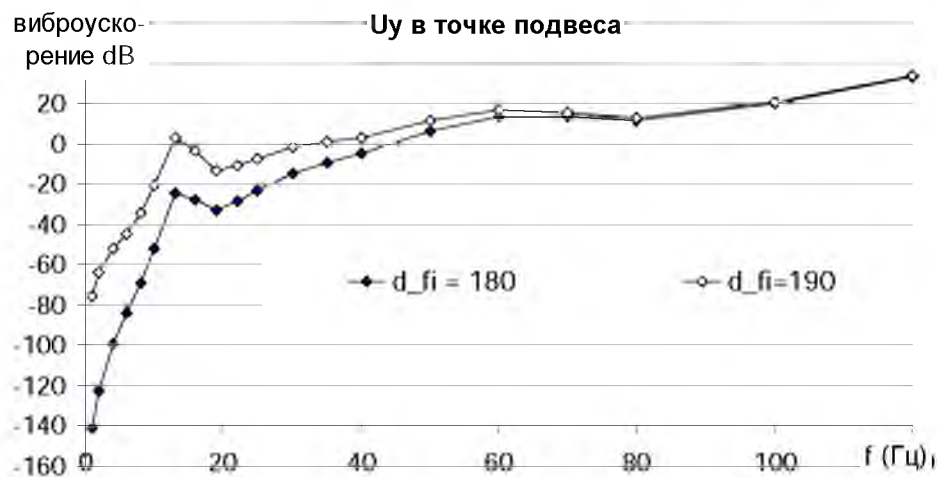
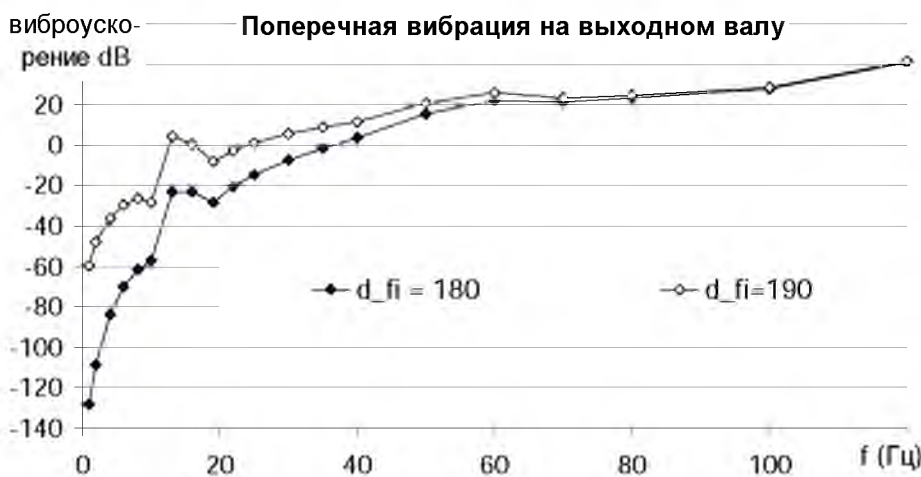
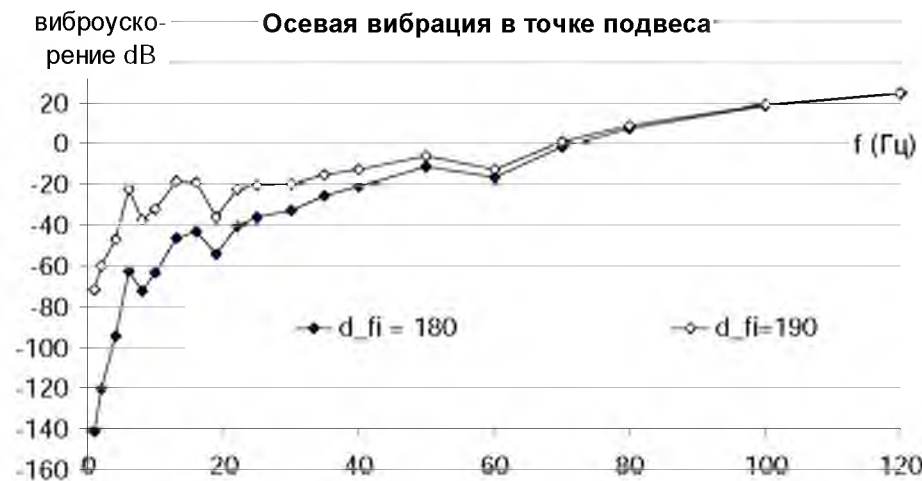




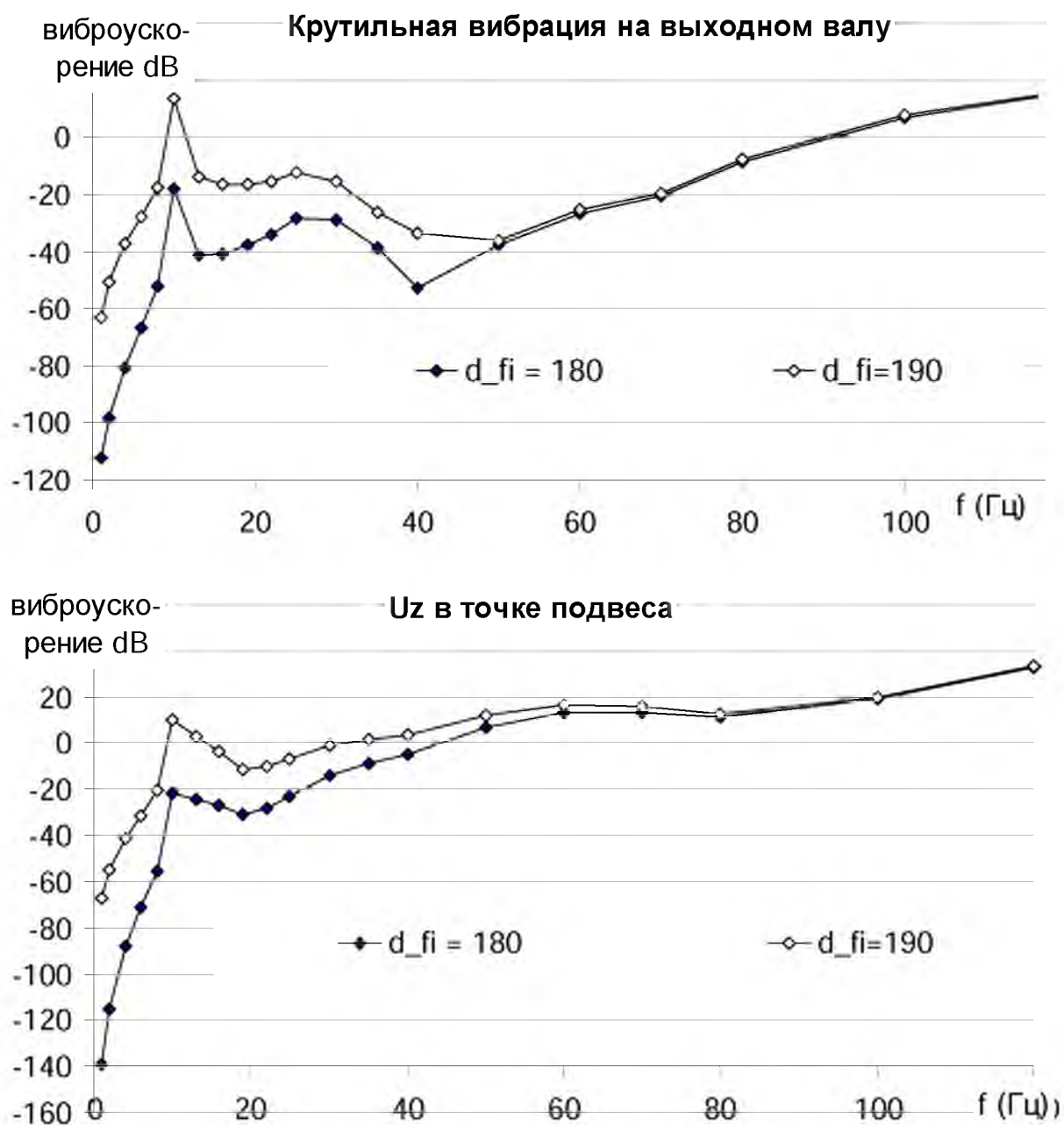
*Рис. 4.10. АЧХ откликов в контрольных точках при различных фазовых отклонениях возмущающих сил для максимальной жесткости подшипников сателлитов*



*Рис. 4.11. АЧХ откликов в контрольных точках при различных фазовых отклонениях возмущающих сил для максимальной жесткости подшипников сателлитов*



*Рис. 4.12. АЧХ откликов в контрольных точках при различных фазовых отклонениях возмущающих сил для минимальной жесткости подшипников спутников*

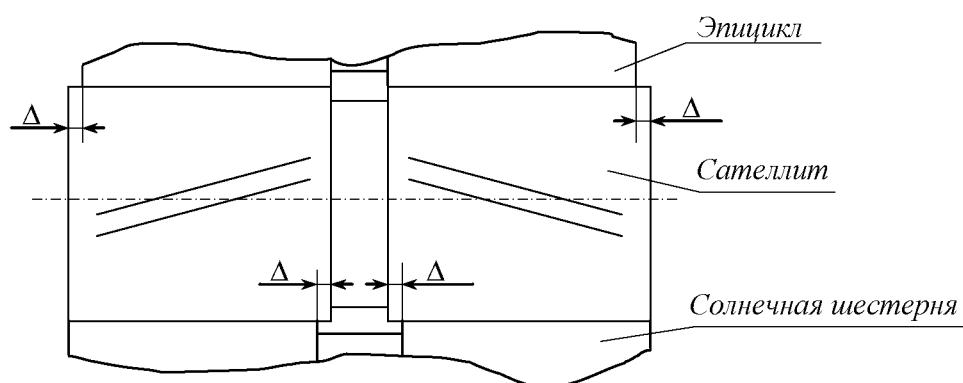


**Рис. 4.13. АЧХ откликов в контрольных точках при различных фазовых отклонениях возмущающих сил для минимальной жесткости подшипников сателлитов (выходной вал и кормовой подвес)**

Из сказанного следует, что для снижения уровня вибрации в низкочастотной части спектра желательно обеспечить строгую противофазность динамических сил, действующих на сателлит со стороны эпицикла и солнечной шестерни.

В шевронном зубчатом зацеплении исследуемой конструкции обеспечить требуемую фазовую коррекцию достаточно просто. Необходимо лишь сместить полушевроны солнечной шестерни относительно полушевронов эпицикла в осевом направлении на величину  $\Delta$  (рис. 4.14). Величина и направление  $\Delta$  определяется модулем и углом наклона зубьев  $\beta$ , величиной необходимой фазовой коррекции  $\varphi$  и направлением вращения:

$$|\Delta| = \frac{m * \varphi}{2 * \sin(\beta)} = \frac{11,41 * 0,1827}{2 * \sin(28,76^\circ)} \approx 2,17 \text{ мм.}$$



**Рис. 4.14. Смещение полушевронов солнечной шестерни относительно эпицикла**

#### **4.4. Влияние перекосов в сателлитных узлах на динамику системы**

Известно, что наличие перекосов в зубчатом зацеплении неблагоприятно сказывается на вибрационных и шумовых характеристиках передачи. В то же время при исследовании напряженно-деформированного состояния сателлитных узлов при разработке математической модели кинематической части редуктора было выявлено наличие незначительных перекосов в зубчатых зацеплениях сателлитов с центральными колесами. Причина их возникновения – различная

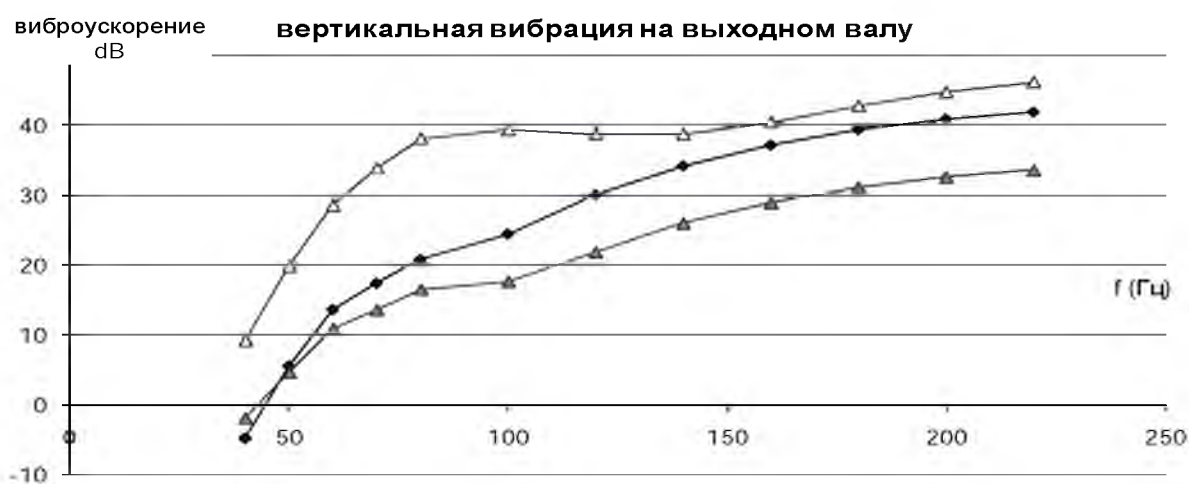
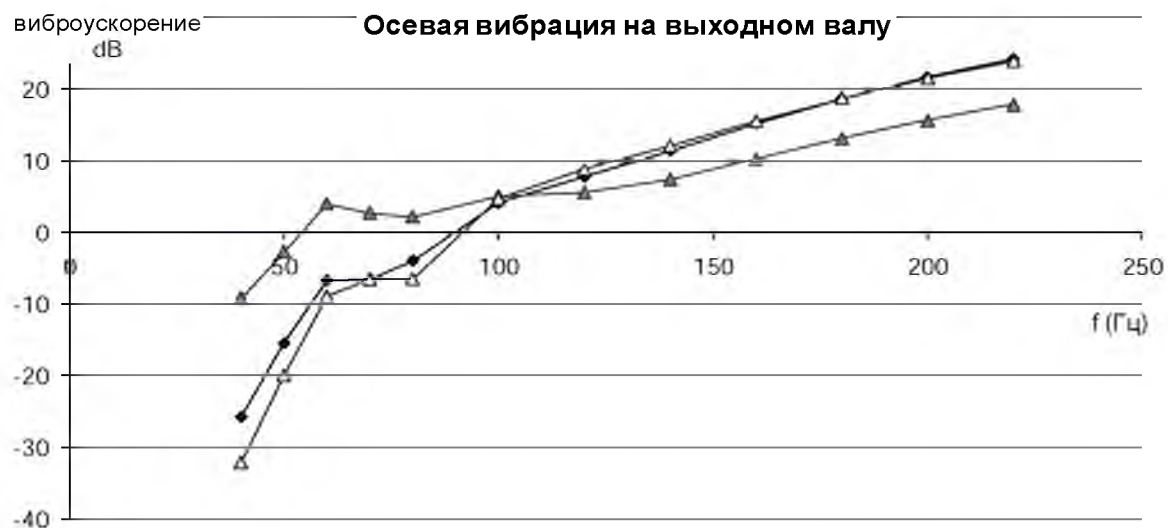
жесткость носовой и кормовой щек водила и несимметричность конструкций осей сателлитов.

Перекося ось сателлита в тангенциальном направлении, выявленный в результате расчета модели сателлитного узла, приводит к отклонению значений контактных напряжений на торцах шестерен от их средней величины на 8%. Податливость ободьев эпицикла в значительной степени компенсирует эту неравномерность нагрузки по зацеплению сателлит–эпицикл, чего, к сожалению, нельзя сказать о зацеплении сателлита с солнечной шестерней.

Варьируя геометрию внутренней проточки оси (параметр  $L$ , рис. 2.41), можно полностью скомпенсировать жесткостную диссиметрию сателлитного узла, повышая тем самым равномерность распределения нагрузки по зубчатому зацеплению. Равномерное распределение нагрузки по зацеплению, особенно на режимах максимальных нагрузок, несомненно, снижает значение максимальных контактных напряжений и, следовательно, повышает надежность зубчатой передачи.

Для исследования влияния данных перекосов на виброактивность редуктора была смоделирована соответствующая неравномерность распределения нагрузки в каждом зацеплении по всем сателлитам. Полученные в результате расчетов АЧХ приведены на рис.4.15. Для сравнения на тех же осях приведены АЧХ при неравномерности (в пределах 10%) распределения нагрузки по сателлитам .

Из приведенных графиков видно, что влияние перекосов на виброактивность редуктора не так однозначно, как влияние неравномерности нагрузки по сателлитам. На частоте ниже некоторого критического значения неравномерность распределения нагрузки по зацеплению ведет к повышению вибрации, а на высоких частотах – к понижению. Критическое значение, как видно из графиков, различно для поперечных, осевых и крутильных колебаний.



*Рис. 4.15. Влияние неравномерности распределения нагрузки по зацеплениям и по сателлитам на АЧХ колебаний выходного вала редуктора на частоте пересопряжения зубьев второй ступени*

Таким образом, основным эффектом от выравнивания нагрузки по зацеплениям выражается в снижении максимальных значений контактных напряжений.

#### 4.5. выводы и рекомендации

1. Апробирована нового поколения модель ГТЗА. Результаты численных исследований хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований и результатами исследований других моделей.

2. В результате проведенных исследований:

2.1. показана эффективность мероприятий, направленных на достижение взаимной компенсации источников возбуждения в зубчатых зацеплениях планетарных передач большой мощности. Оценен теоретически возможный эффект от данных мероприятий. Используемые ранее модели не позволяли сделать такой оценки.

2.2 Подтверждена эффективность мероприятий, направленных на достижение равномерного распределения мощности по параллельным потокам в планетарных редукторах. Показано, что при устранении остаточной неравномерности в 10% уровень зубцевой вибрации может снизиться на 10-15Дб в частотном диапазоне 50-250Гц.

2.3. Выявлено существенное влияние имеющегося отклонения от строгой противофазности возбуждающих сателлит сил со стороны солнечной шестерни и эпицикла.

2.4. Вскрыта роль податливости водила при трансформации поперечных колебаний в осевые.

2.5 Исследовано влияние вызванных несимметричностью конструкции перекосов в зубчатых зацеплениях на виброактивность редуктора

3. На основании проведенных исследований рекомендовано восстановить жесткостную диссимметрию сателлитного узла в плоскости



его продольного сечения, вызванную несимметричностью конструкции, путем корректировки геометрии оси сателлита.

4. Рекомендовано восстановить строгую противофазность возбуждение сателлитов путем смещения полушевронов солнечной шестерни относительно полушевронов эпицикла.

5 продолжить поиск путей выравнивания нагрузки по сателлитам

6 увеличить жесткость щек водила

## **5. РАЗРАБОТКА ИМПОРТОЗАМЕЩАЮЩЕГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ РАБОЧИХ КОЛЕС ТУРБОАГРЕГАТОВ**

Разработка импортозамещающего ПО приобрела в настоящее время особую актуальность. Лидирующие позиции среди различных методов исследования динамики и прочности занимает сегодня метод конечных элементов. Вопрос создания универсальных конечноэлементных ПК выходит за рамки данной работы, а вот рассмотрение узкоспециализированных программ для расчета собственных колебаний рабочих колес вполне уместно, поскольку это связано с обеспечением прочности лопаточного аппарата турбин и, следовательно, надежностью ГТЗА.

### **5.1. Состояние дел.**

В связи с развитием МКЭ появилось значительное количество работ по расчету колебаний лопаток и оболочечных конструкций. Различные аспекты теории численной реализации освещены в работах [63, 107, 134, 135, 138, 156, 176, 180, 188, 199, 200, 205, 210]. Особенно весомый вклад в эту область внесли Дж. Аргирис [20], О. Зенкевич [92], Г. Стренг и Дж. Фикс [186], Р. Галлагер [73], К. Батте и Е. Вилсон [27], Д. Нори и Ж.де Фриз [148], Л. Сегерлинд [178], Ж.де Клу [80], Ф. Сьярле [189], Дж. Оден [149], Э. Митчелл и Р. Уайт [136] и др. [68, 282, 284, 285]. В работе А. С. Вольмира и др. [65] дана общая краткая справочная информация по численным методам расчета тонкостенных конструкций, изложены базовые принципы различных методов расчета.

В развитии методов расчета рабочих лопаток на базе МКЭ можно выделить несколько подходов.

При первом подходе срединная поверхность лопаток аппроксимировалась многогранной поверхностью, каждая грань которой явля-

лась плоским пластиночным КЭ. Важным шагом в развитии этой методологии стала разработка треугольного КЭ переменной толщины с изгибно-мембранной жесткостью. Матрицу жесткости для этого элемента получили путем суперпозиции двух независимо полученных матриц для плоского напряженного состояния и изгиба [41, 278]. Такой подход в определении матрицы жесткости справедлив при малых относительных перемещениях и требует генерации достаточно мелкой конечно-элементной сетки. Эти КЭ применялись для исследования лопаток при нестационарном обтекании в работе [82] и показали достаточно хорошую точность и сходимости расчетов.

При втором подходе используются элементы, построенные на базе двумерной теории оболочек [21, 79, 248]. В некоторых случаях они позволяют получить более точные результаты. Основным недостатком таких элементов является то, что они не обеспечивают непрерывности функций перемещений и их производных вдоль границ КЭ. При попытках устранить эти недостатки теряется простота элементов. При попытке применения моментной схемы конечных элементов [106, 205] было замечено, что МКЭ обладает медленной сходимостью, если принятый закон не позволяет описать перемещения КЭ как жесткого целого, а вопрос о влиянии на точность жестких перемещений элементарных объемов КЭ при его деформации оставался без внимания.

При моделировании сложных по форме объектов с помощью различных по свойствам и форме КЭ возникают проблемы, связанных со стыковкой таких элементов. Так, например, перо лопатки можно аппроксимировать оболочкой, а корневой участок рассматривать как трехмерное тело. Для таких целей в работах [274, 275] введено семейство четырехугольных криволинейных изопараметрических элементов. В работе [11] исследуется влияние типа КЭ на расчеты собственных колебаний тонкостенных конструкций.

Третьим подходом к расчету напряженно-деформированного состояния (НДС) и определению собственных колебаний можно назвать расчеты на базе объемных КЭ. Наибольшую популярность получили изопараметрические КЭ, в которых характерно использование одних и тех же функций формы и для описания аппроксимируемой величины (напряжений, температуры и пр.), и для описания геометрии элемента (т.е. для преобразования координат). Это позволяет отойти от теорий стержней, пластин, безмоментных оболочек и, основываясь на трехмерной теории упругости, более детально рассматривать рассчитываемые объекты, получая при этом более точные результаты, хотя и требует усложнения процедуры подготовки исходной информации для расчетов.

Описания различных субпараметрических элементов можно найти в работах [127, 206, 258]. С помощью таких элементов выполнены расчеты лопаток турбин сложной геометрии и оболочечных конструкций. В работе [127] рассчитана реальная лопатка сложной геометрии. Результаты конечноэлементного анализа удовлетворительно согласуются с экспериментом.

В работе [265] описано применение изопараметрического элемента с 8-ю внешними узлами по 3 степени свободы в каждом и 9-ю внутренними степенями свободы.

Для устранения одиночных колебаний, снижения уровня вибрации и напряжений в лопаточных венцах рабочих колес лопатки объединяют в пакеты. Ряд работ посвящен исследованию колебаний пакетов лопаток [24, 117, 260, 293]. В работах [69, 225, 263, 283, 288] моделирование лопаток основано на теории оболочек, а в [247, 248] используются объемные элементы. В работах [216, 249] применяются оболочечные элементы для моделирования толстых оболочек, что приводит к снижению требований к вычислительным ресурсам по отношению к объемным элементам. В работе [35] получено приближен-

ное решение для частоты синфазных колебаний, а в работе [244] на этом основании построена приемлемая для практики расчетная схема. В работе [258] рассмотрены возможные формы колебаний на основании теории оболочек, проведено сравнение численных результатов с экспериментальными данными. Дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования бандажированных рабочих колес с лопатками несложной геометрии проведены в работах [229, 233, 234], проанализировано влияние расстройки системы на колебания пакета. В работах [266, 267] с помощью стержневых элементов была исследована упрощенная модель пакета лопаток с целью изучения влияния различных параметров на собственные частоты. При этом авторы ограничились рассмотрением только тангенциальных колебаний в плоскости пакета. Учет сил трения при демпфировании колебаний рассматривается в работе [14]. Попытка учета трения в стыке бандажных полок предпринята в работе [184] с помощью линейного демпфирования. Лопатка и бандажные связи при этом моделировались оболочечными конечными элементами. В работе [280] на базе оболочечных элементов исследован пакет лопаток с двухъярусным полочным бандажированием.

Важным шагом на пути развития численных методов расчета динамики элементов роторов турбоагрегатов можно считать появление работ, посвященных исследованию совместных колебаний системы диск-лопатки. В одной из первых работ в этой области [235] исследовано влияние вращения. Показано, что вращение практически не оказывает влияния на формы мембранных колебаний. Влияние лопаток на колебания диска в этой работе не учитывалось.

При исследовании колебаний рабочих колес могут использоваться матричные формы метода волновых динамических жесткостей и податливостей [86, 95] и метод начальных параметров [104, 187]. Важную роль в формировании современных методов расчета колеба-

ний рабочих колес турбомашин играют общие свойства циклической симметрии, изложенные В.П. Ивановым [96]. Широкое распространение получили методы расчета облопаченных дисков паровых турбин, описанные А.В. Левиным [119], в которых исследуются в основном изгибные колебания дисков с узловыми диаметрами без узловых окружностей. Большинство причин усталостных разрушений дисков связано именно с изгибными колебаниями.

Качественно новые явления при рассмотрении рабочего колеса как единого упругого целого были выявлены в работах [37, 86]. При динамическом взаимодействии диска и лопаток появляются низкочастотные колебания с узловыми окружностями, расположенными как на диске, так и на лопаточном венце. Это приводит к необходимости решения задач о безопасности изгибных колебаний диска с узловыми окружностями. Исследованиям колебаний дисков с лопатками, кроме упоминавшихся выше, посвящены работы [32, 67, 100, 101, 102, 155, 171, 172, 173, 190, 262, 292].

В одной из первых работ, где уделяется внимание влиянию колебаний лопаток на колебания диска, рассмотрены тангенциальные колебания лопаток и крутильные колебания диска [197]. Дальнейшее исследование связанности изгибных колебаний лопаток и мембранных колебаний диска отражено в работе [241]. МКЭ в расчетах связанных колебаний впервые применили Кирхгоф и Вильсон [245]. В этой работе лопатка представлялась балочным элементом с десятью степенями свободы. Элемент бандажа – изогнутая балка с 8-ю степенями свободы, а кольцевой элемент диска имел 6 степеней свободы. Более детальный анализ колебаний дисков выполнен в работе [246], в которой исследовано влияние закрутки и скорости вращения. К числу первых работ по МКЭ среди отечественных работ относится работа Б.С. Лукина [125], где решена задача свободных колебаний модельных дисков рабочих колес осевых и центробежных турбомашин на основе единого

конечноэлементного алгоритма. В статье [287] приводится метод расчета собственных колебаний облопаченных дисков, где диск представлен кольцевыми элементами с 12-ю степенями свободы, а лопатка – элементом толстой оболочки с 8-ю узлами и 40 степенями свободы. В работе [232] проведено исследование частот и форм колебаний конечноэлементной циклически симметричной модели рабочего колеса с 12-ю лопатками, рассмотрено влияние кориолисовых сил. В качестве базовых элементов использованы треугольные и четырехугольные элементы системы NASTRAN.

В области исследования колебаний облопаченных дисков следует выделить работы [183, 233, 260], где использовались кольцевые и секторные элементы. Кольцевой элемент имеет три узла, а в качестве степеней свободы используются поперечный сдвиг, радиальное и угловое отклонения. Толщина элемента – параболическая в радиальном направлении и постоянная в угловом. Секторный элемент имеет 8 узлов с такими же степенями свободы. Все элементы базируются на теории оболочек Тимошенко–Миндлина. При исследовании колебаний использовались свойства циклической симметрии. Геометрические выступы диска и бандажная полка в случае консольного закрепления заменялись приведенными массами и моментами инерции, что для анализа высших форм колебаний с узловыми диаметрами недопустимо. Такая задача должна решаться с помощью объемных элементов.

На точность расчетов существенную роль оказывает степень приближения математической модели к реальной системе. Ряд работ связан с моделированием различных конструктивных элементов, учет которых существенно влияет на результаты расчетов.

В работах [66, 71, 119] учитываются соединения диск – лопатка, лопатка – полка. Учет производится при помощи специальных коэффициентов изгибающего момента или коэффициентов упругости соединений. Однако в этих работах не учтена зависимость смещения ло-

патки от скачка усилий в сечении связи в узле соединений с лопаткой. Приближенное моделирование замкового соединения рассмотрено в работе [75]. Метод расчета колебаний лопаточных колес нашел отражение в работах зарубежных авторов [219, 230]. Недостатком приведенных в этих работах методик является сложность расчета необходимых значений упругой податливости для лопаток сложной формы и трудность учета влияния вращения. Более универсальным является учет упругости заделки с помощью коэффициентов податливости и защемления, значения которых для некоторых конструкций могут быть определены расчетным путем. Демпфирующая способность и податливость замковых соединений исследовались в работах [223, 250]. Динамические свойства заделки лопатки в диск можно изменять за счет применения различных конструктивных решений. С помощью различных технологических решений можно влиять на спектр собственных частот рабочих колес. Так, в работе [181] рассмотрена возможность снижения влияния возмущающих сил на резонансных частотах за счет конструктивных и технологических факторов. В основе идеи лежит изменение формы колебаний таким образом, чтобы они были ортогональны возмущающим силам. В работе Остробокова [154] на основе экспериментальных исследований выведены эмпирические зависимости влияния толщины диска с лопатками на его собственные частоты. Экспериментальная работа [146] посвящена проблеме устранения колебаний лопаточных венцов, подверженных аэродинамическому и кинетическому возбуждению. Аналогичной проблеме посвящена статья [174], где на основе оболочечной математической модели и МКЭ исследованы некоторые закономерности управления спектром колебаний рабочих колес компрессоров и турбин ГТД. В статье на основе проведенных исследований даны рекомендации по устранению резонансных колебаний по первым изгибно-крутильным и пластиночным формам.



Большой интерес представляет исследование кольцевого пояса связи, образованного бандажными или антивибрационными полками [31, 59, 184]. Трудности возникают из-за неясности в задании граничных условий на стыках соседних бандажных полок. Так, например, в работах [36, 81, 197] предполагается, что при колебании бандажированного лопаточного венца в стыках полок проскальзывания не происходит. Однако многочисленные случаи износа контактных поверхностей полок в процессе эксплуатации бандажированных колес указывают на то, что полочный пояс связи не является сплошным упругим кольцом. В работах [184, 223] учитывается относительное движение полок. Все рассмотренные модели бандажей являются упрощенными.

В работе [151] для анализа колебаний рабочих лопаток используется суперпараметрический элемент второго порядка. Элемент имеет 8 узлов на срединной поверхности по 5 степеней свободы в каждом узле: три перемещения и два угла поворота нормали к срединной поверхности. При описании перехода перо лопатки – хвостовик или перо лопатки – бандаж используются модификации криволинейного элемента оболочки и трехмерного элемента. Такая комбинация различных элементов повышает точность расчета, но создает существенные трудности на этапе подготовки исходных данных, что практически исключает возможность автоматической генерации исходных данных. В работе [243] исследуются колебания облопаченных дисков. В своих моделях авторы использовали квадратичные изопараметрические элементы. Недостаток этих моделей в том, что диск считался жестким и рассматривались колебания только самих лопаточных венцов.

С точки зрения повышения точности расчетов вполне оправдано использование высокоточных трехмерных элементов высших порядков. Возрастающие при этом требования к вычислительным ресурсам, в основном к оперативной памяти, решаются не только за счет роста

мощности современной вычислительной техники, но и благодаря оригинальным методикам работы с матрицами больших размерностей [159].

В работах Гайана и Айронса [10, 81] описана методика снижения числа степеней свободы механической системы для определения ее динамических характеристик. При удачном выборе исключаемых степеней свободы это позволяет существенно снизить порядок матриц системы при незначительном снижении точности расчета, однако надежной методики выбора таких степеней свободы нет. Поэтому в ряде случаев может потребоваться процедура уточнения форм и частот собственных колебаний [132].

В работе Коротенко [108] описан метод решения систем алгебраических уравнений с полностью заполненными матрицами больших размерностей. При использовании данной методики рабочие матрицы представляются в блочном виде, и в память загружаются только необходимые блоки. Такой механизм более эффективен, чем использование файлов подкачки.

Особый интерес представляют исследования в области применения трехмерных элементов со смешанной аппроксимацией перемещений [48, 50, 62, 182]. Методика разработки таких элементов хорошо изложена у Зенкевича [92]. В работе [42] приведены результаты исследования применения различных трехмерных КЭ и сделан сравнительный анализ точности расчетов. Отмечено, что для расчета оболочечных конструкций с применением трехмерных элементов недостаточно лишь уменьшить размер элемента в направлении толщины оболочки. Наличие трех степеней свободы в каждом узле приводит к большим коэффициентам жесткости для перемещений по толщине оболочки, что связано с появлением в матрице жесткости компонентов, характеризующих энергию деформации сдвига. Это за-

трудняет проведение расчетов и может явиться причиной плохой обусловленности матриц системы.

Удачный компромисс в борьбе за точность расчетов и экономию вычислительных ресурсов представляет собой использование КЭ со смешанной аппроксимацией перемещений, когда искомые величины аппроксимируются полиномами различной степени по разным направлениям. В этом свете интересна работа М. Лаланнэ [217], где рассматривается расчет отдельной турбинной лопатки с помощью линейно-кубического элемента, однако в работе отмечаются серьезные трудности при моделировании элементов хвостовика лопатки.

Подобные конечные элементы положены в основу программного комплекса, рассматриваемого в настоящей работе.

## **5.2. Структура программного комплекса**

В данной главе рассматривается создание узкоспециализированного ПО, адаптированного под конкретное производство еще на стадии разработки.

Создание различных специализированных программных средств можно связать с учетом каких-либо специфических, присущих задачам одного класса, особенностей. Например, системы для расчета динамики и прочности вращающихся оболочек с учетом геометрической нелинейности [236, 247, 259], расчета динамики механических систем с циклической поворотной симметрией [231], оптимального проектирования трехмерных тел [228, 290].

В данной работе используется ограниченность номенклатуры выпускаемых изделий. Это позволяет отказаться от разработки универсальных генераторов конечноэлементной сетки и строить сетку по параметрам конкретных изделий. Таким образом, получается программный комплекс, способный рассчитывать динамические характеристики только конкретных изделий (в нашем случае рабочих колес

конкретного производителя), но с возможностью изменения различных конструктивных параметров.

В основу комплекса легли разработки Иркутского политехнического института, дополненные подпрограммами, написанными на кафедре «Сопротивление материалов» Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана [41, 44, 45, 46, 47, 49, 51].

Для обеспечения высокой точности используются КЭ высших порядков (с аппроксимирующими полиномами второй и третьей степени). Следует отметить, что в библиотеке таких комплексов как ANSYS и NASTRAN нет конечных элементов со степенью аппроксимирующих полиномов выше второй. Это дает разработанному комплексу некоторое преимущество по точности.

Программный комплекс состоит из пяти функциональных блоков рис. 5.1. В первом блоке происходит либо считывание подготовленных внешним генератором исходных данных, либо непосредственная генерация координат узлов и топологии конечноэлементной сетки. В рамках данной работы были написаны самостоятельные генераторы исходных данных для некоторых стержневых конструкций, пластин различной конфигурации, дисков, профильных частей турбинных лопаток и элементов замковых соединений лопаток с дисками. Профильные части лопаток строятся непосредственно по результатам газодинамического анализа.

Во втором блоке происходит контроль исходных данных и расчет матриц жесткости и масс всех КЭ конструкции. К этому блоку были написаны модули для работы с КЭ 3D72 (трехмерный элемент 72 степени свободы) на базе линейно-кубических аппроксимирующих полиномов.

В третьем блоке из матриц элементов собираются матрицы жесткости и масс всей системы. Способ хранения этих матриц зависит от метода определения собственных значений и собственных векторов.



**Рис.5.1. Структурная схема программы расчета собственных колебаний рабочих колес**

Если рассчитывается несложный механический объект, то возможно применение метода итераций в подпространстве. В этом случае используется компактная форма хранения, при которой в памяти сохраняется лишь верхняя половина ленты матрицы. Если рассчитывается сложный объект и используются дополнительные преобразования, например, для реализации суперэлементного подхода, то матрицы ут-

рачивают свой ленточный характер и в памяти они сохраняются уже целиком.

Блок 4 представляет собой реализацию одного из вариантов решения задачи на собственные значения с использованием метода итераций в подпространстве или Q-R алгоритма. После вычисления собственных значений и собственных векторов с помощью стандартных алгоритмов результаты преобразуются в удобную для пользователя форму и распечатываются в табличном виде.

Блок 5 полностью создан в рамках данной работы и предназначен для графического представления результатов расчётов, например, изолиний деформаций или напряжений внутри объекта или прорисовки деформированного объекта для отображения форм собственных колебаний. Графические приложения могут быть использованы для визуального контроля корректности исходных данных, в этом случае они подключаются к блоку 1.

Для более реалистичного изображения используется графическая библиотека OPEN GL. Кроме того, были разработаны модули для отображения конечноэлементной модели средствами КОМПАС-ГРАФИК.

Математическое ядро (блоки 2,3,4) написано на алгоритмическом языке FORTRAN. Блоки генерации исходных данных и визуализации результатов расчетов написаны на языке C/C++.

Наиболее ответственной частью при разработке конечноэлементных программ является блок построения матриц жесткости и масс.

Механизм определения матриц жесткости и масс для всех используемых элементов однотипен и реализован в подпрограмме SAVE(), структурная схема которой и алгоритм вычислений показаны на рис. 5.2. Основные соотношения теории упругости, используемые в работе, взяты у Зенкевича и приведены в приложении 1.



**Рис. 5.2. Расчет матриц жесткости и масс элементов**  
 а) –структурная схема подпрограммы save; б) – блок-схема

Непосредственно расчет матриц элемента происходит в подпрограмме `iqd()`, которая, в свою очередь, вызывает подпрограмму `isoq()` для определения матриц дифференцирования  $[B]$  и матрицы Якоби  $[J]$  и подпрограмму `ztxy()` – для определения произведения  $[N]^T[N]$ . Функции формы определяются в подпрограмме `nfor()`. Для вычисления двойного матричного произведения  $[B]^T[D][B]$  вызывается подпрограмма `dedqq()`.

Для вычисления объемных интегралов (П.1), (П.2) (приложение 1) производится численное интегрирование в локальных координатах с помощью квадратурных формул Гаусса – Лежандра. В этом случае матрицы жесткости и масс вычисляются как суммы значений подынтегральных функций  $f(\xi, \eta, \zeta)$ , вычисленных в определенных точках, умноженных на соответствующие весовые коэффициенты  $h$ .

При реализации суперэлементного подхода в блоке 3 рис.5.1 происходит исключение части степеней свободы – статическая конденсация. Отрицательным эффектом этого алгоритма является то, что при его реализации матрицы теряют свою ленточную форму, следовательно, требуются процедуры, работающие уже с полными, а не ленточными матрицами.

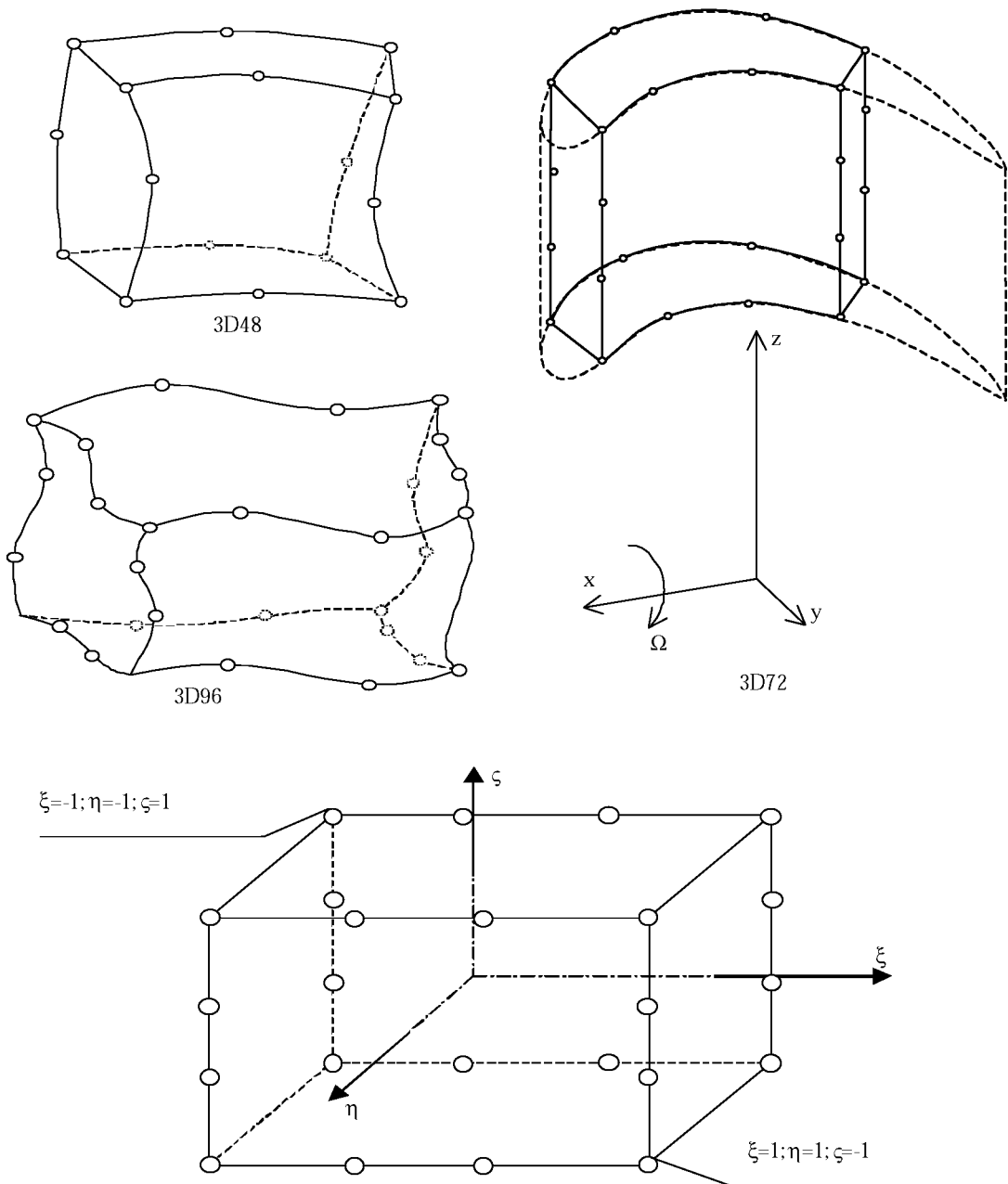
При расчете небольших конструкций такой подход не эффективен. Выигрыш во времени при определении собственных значений уменьшенной матрицы теряется в связи с потерей времени на конденсацию матриц. Требования к оперативной памяти уменьшаются лишь при расчете собственных частот, а для реализации механизма конденсации требуются все те же самые ресурсы.

Ощутимый эффект от механизма конденсации проявляется только тогда, когда вся конструкция собирается из нескольких блоков, каждый из которых подвергается исключению второстепенных переменных. Таким образом, происходит многоступенчатая конденсация конструкции.



Кроме того, суперэлементный подход эффективен в сочетании с использованием свойств циклической симметрии, когда система с пониженным числом степеней свободы многократно рассчитывается на собственные частоты при различных граничных условиях.

В разработанном комплексе используются линейно-квадратичные 3D48, кубические 3D96 и линейно-кубические 3D72 конечные элементы Серендипова семейства рис 5.3. Функции формы этих элементов приведены в приложении 2.



**Рис.5.3. Элементы 3D48, 3D72 и 3D96 в глобальной системе координат и локальная система координат для элемента 3D72**

Как показали тестовые расчеты, применение КЭ с линейно-кубической аппроксимацией перемещений при расчете лопаточного аппарата обеспечивает практически такую же точность как с полностью кубической аппроксимацией. Формулы для определения матриц элемента 3D72 имеют вид:

$$[K_e] = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^4 h_i h_j h_k f_1(\xi_i \eta_j \zeta_k),$$

$$[M_e] = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^4 h_i h_j h_k f_2(\xi_i \eta_j \zeta_k).$$

В отличие от полного кубического элемента количество точек интегрирования по оси  $\eta$  сокращается с четырех до двух. Так как подинтегральная функция для элемента 3D72 тоже определяется легче, чем для элемента 3D96, время вычисления матриц элементов 3D72 сокращается более чем в два раза по сравнению с 3D96.

Исходный текст блока расчета матриц для элемента со смешанной линейно-кубической аппроксимацией перемещений приведен в приложении 3.

Поскольку при разработке собственных КЭ выбор базисных функций не однозначен нужен механизм оценки качества конструируемого базиса. Заслуживающий внимание метод оценки качества базисных функций по их вычислительным свойствам, в частности, по величине накапливаемой в процессе вычислений погрешности, предлагается в статьях Ф. и П. Пинежаниновых, посвященных МКЭ [298]. Метод апробирован в настоящей работе при разработке элементов со смешанной аппроксимацией перемещений.

Точность вычислений с использованием различных базисов хорошо коррелируется с оценкой вычислительных свойств базиса.

Поскольку в работе Лаланнэ отмечались трудности с генерацией конечноэлементной сетки для хвостовика лопатки, при использовании линейно-кубических КЭ остановимся на этом вопросе подробнее.

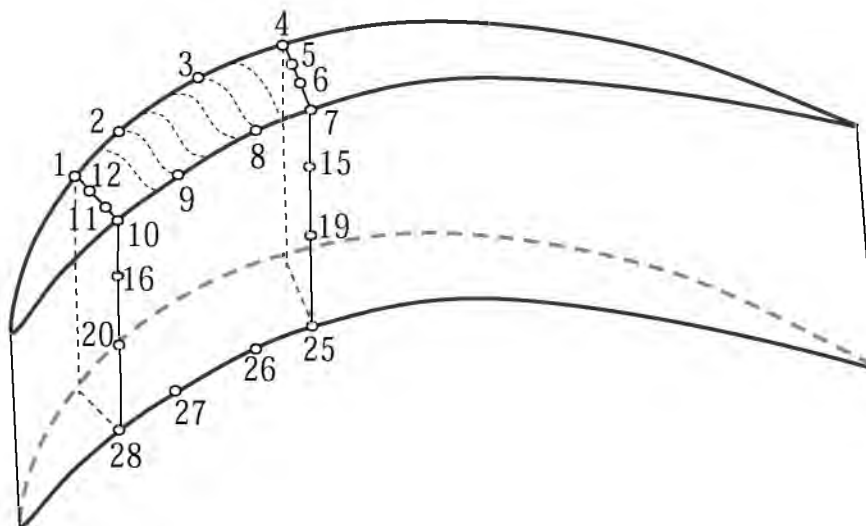
Как показали тестовые расчеты, точность вычисления промежуточных (лежащих на ребрах КЭ) узлов, чрезвычайно важна при генерации сетки для элементов с кубической аппроксимацией. Пожалуй, это основная причина отсутствия подобных элементов в универсальных конечноэлементных комплексах.

Разработанная методика генерации сетки для профильной части лопатки заключается в следующем.

1. Определяется срединная линия сечения лопатки. Данная линия проходит через центры вписанных в сечение лопатки окружностей.
2. Найденная линия разбивается на  $n$  участков, где  $n$  – число элементов по ширине лопатки. Через полученные точки проводятся прямые, перпендикулярные срединной линии, до границ сечения лопатки. Таким образом, получают угловые узлы 1, 4, 7, 10 рис. 5.4.
3. Для нахождения промежуточных узлов, например 2-го и 3-го, граница сечения между 1-м и 4-м узлами разбивается так, чтобы искомые узлы делили указанную линию на равные части. Аналогично ищутся узлы 8 и 9.

Основные проблемы связаны с последним пунктом. Несоблюдение этого условия приводит к существенным искажениям получаемых результатов. Причина этих искажений была выявлена при прорисовке изолиний генерируемых КЭ. На рис. 5.4 пунктиром показаны характерные искажения изолиний, возникающие при неправильной генерации промежуточных узлов. Показаны только линии в плоскости верхнего сечения фрагмента лопатки, полученные изменением координаты  $\eta$  от -1 до 1, при  $\xi=-1$ ,  $\zeta=const$  (согласно локальной системе координат рис. 5.3).

При расчете достаточно тонких лопаток, например компрессорных, эти искажения практически не оказывают влияния на точность расчетов. Однако при расчете более толстых турбинных лопаток эти искажения столь ощутимы, что в некоторых точках интегрирования получаются отрицательные объемы.



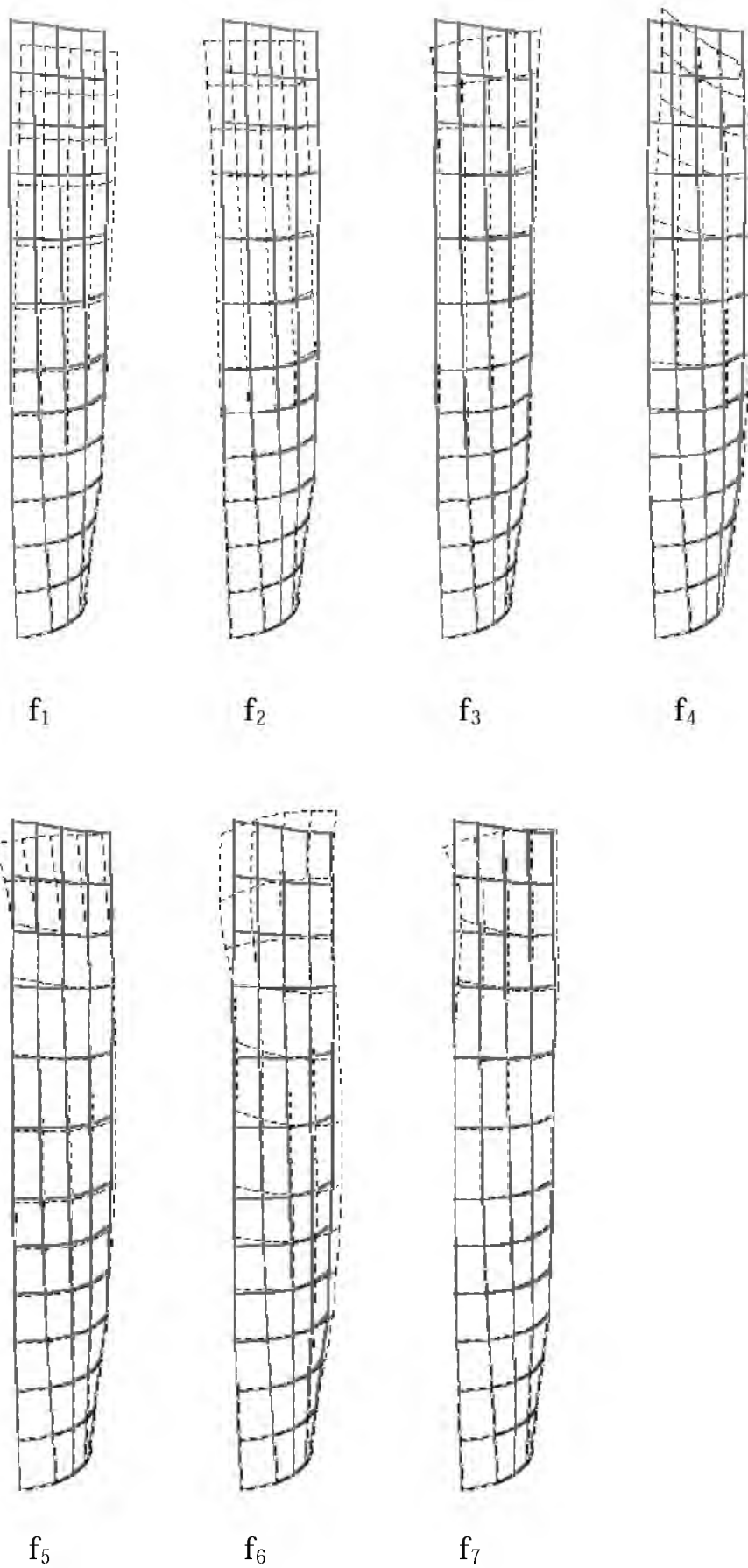
*Рис. 5.4. Прорисовка с помощью функций форм изолиний элемента 3D96, вписанного в лопатку*

Для сравнительного анализа точности расчетов на базе различных трехмерных элементов в таблице 5.1 приведены результаты расчетов и погрешность вычислений собственных частот турбинной лопатки различными элементами при различной сетке (обозначение 2x4 означает 2 элемента по хорде лопатки, 4 – по длине). В качестве эталона взяты экспериментальные значения. Из таблицы видно, что переход к элементам более высокого порядка вполне оправдан, так как точность расчетов при переходе с элементов 3d48 на 3d72 и 3d96 существенно повышается. При измельчении конечноэлементной сетки, начиная уже с размерности 2x8, элемент с линейно-кубической аппроксимацией перемещений дает более точные результаты, чем чисто кубический. На рис. 5.5 показан пример отображения форм колебаний одиночной лопатки с помощью графических процедур.

Таблица 5.1

Расчет собственных частот турбинной лопатки элементами 3d48, 3d72 и 3d96 (Гц)

форма	Эксперимент	2x4			2x8			3x8		
		3d48	3d72	3d96	3d48	3d72	3d96	3d48	3d72	3d96
f <sub>1</sub>	176	194	185	184	187	1778	176	181	176	175
f <sub>2</sub>	391	449	420	420	417	391	389	403	389	387
f <sub>3</sub>	689	837	778	775	748	705	705	731	699	699
f <sub>4</sub>	740	944	881	892	839	761	775	789	743	757
f <sub>5</sub>	1045	---	1243	1237	1154	1061	1058	1113	1051	1048
f <sub>6</sub>	---	1403	1693	1710	1612	1449	1468	1511	1417	1439
f <sub>7</sub>	1594	1959	1959	1966	1860	1677	1674	1763	1648	1643
ПОГРЕШНОСТЬ %										
f <sub>1</sub>		10,4	4,98	4,65	6,05	0,61	0,11	2,63	0,19	-0,43
f <sub>2</sub>		14,7	7,49	7,54	6,77	-0,04	-0,44	3,02	-0,48	-0,94
f <sub>3</sub>		21,5	12,9	12,5	8,50	2,36	2,27	6,15	1,52	1,45
f <sub>4</sub>		27,6	19,12	20,5	13,42	2,86	4,70	6,59	0,37	2,25
f <sub>5</sub>			18,9	18,4	10,43	1,54	1,29	6,52	0,53	0,25
f <sub>7</sub>		22,90	22,9	23,3	16,69	5,22	5,02	10,58	3,39	3,08



**Рис. 5.5. Формы колебаний турбинной лопатки**

Проведенные исследования собственных колебаний различных конструкций и анализ полученных результатов позволяют рекомендовать выбор КЭ со смешанной аппроксимацией перемещений для расчета некоторых конструкций, в частности, турбинных лопаток. Из всего ряда рассмотренных в данной работе элементов КЭ 3D72 позволяет получить самую высокую точность расчета. Недостатком этого элемента можно назвать его чувствительность к ориентации. Так, при моделировании профильной части лопатки линейная аппроксимация должна осуществляться по толщине лопатки. Такую же точность (при такой же конечноэлементной сетке) обеспечивает кубический элемент 3D96, который в отличие от 3D72 не чувствителен к пространственной ориентации внутри исследуемого объекта, но требует двукратного увеличения вычислительных ресурсов.

Еще один вопрос, который стоит затронуть, это сходимость решения при учете различного вида нелинейностей.

Рабочие элементы роторов подвержены воздействию сильных полей центробежных сил, которые существенно изменяют динамические характеристики рабочих колес. В разработанном программном комплексе рассматриваются геометрически нелинейные задачи, связанные с влиянием центробежных сил на матрицу жесткости системы.

Согласно принципу виртуальной работы сумма изменений внутренних и внешних работ для системы, находящейся в равновесии, равна нулю. Если  $\{\psi\}$  – вектор внутренних и внешних сил, то можно записать уравнение общей работы всех сил:

$$d\{\delta\}^T \{\psi\} = \int_V d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - d\{\delta\}^T \{R\} = 0, \quad (5.1)$$

где вектор  $\{R\}$  содержит все узловые силы от внешних нагрузок, а интеграл

$$\int_V d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (5.2)$$

представляет собой виртуальную работу внутренних сил. Если для вариации деформации справедливо соотношение

$$d\{\varepsilon\} = [\bar{B}] d\{\delta\},$$

то после исключения  $d\{\delta\}$  получаем выражение

$$\psi(\{\delta\}) = \int_V [\bar{B}]^T \{\sigma\} dV - \{R\},$$

в котором  $\{\sigma\}$  является вектором напряжений, определяемым достигнутым уровнем деформаций. Матрицу дифференцирования перемещений  $[\bar{B}]$ , которая в этом случае является нелинейной и зависит от уровня деформаций, удобно представить в следующем виде:

$$[\bar{B}] = [B_0] + [B_L], \text{ где} \quad (5.3)$$

$[B_0]$  – матрица, определяющая бесконечно малые деформации;

$[B_L]$  – матрица, определяющая влияние больших перемещений.

Вариация  $d\{\psi\}$  по  $d\{\delta\}$  запишется в виде:

$$d\{\psi\} = \int_V d[\bar{B}]^T \{\sigma\} dV + \int_V [\bar{B}]^T d\{\sigma\} dV.$$

Используя (5.2) и (5.3), находим:

$$\begin{aligned} d\{\sigma\} &= [D][\bar{B}] d\{\delta\}, \\ d\{\psi\} &= \int_V d[\bar{B}]^T \{\sigma\} dV + [\bar{K}] d\{\delta\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$[\bar{K}] = \int_V [\bar{B}]^T [D][\bar{B}] dV = [K_0] + [K_L]. \quad (5.5)$$

Матрица  $[K_0]$  является матрицей жесткости при малых деформациях:

$$[K_0] = \int_V [B_0]^T [D][B_0] dV, \quad (5.6)$$

а матрица  $[K_L]$  учитывает наличие больших перемещений. Первое слагаемое в выражении (5.4) можно записать в виде:

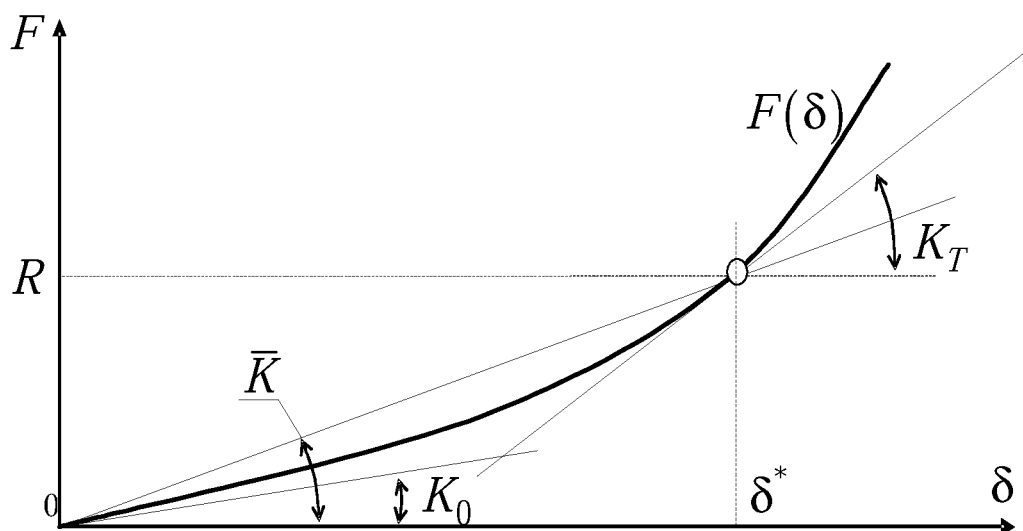


$$\int d[B_L]^T \{\sigma\} dV = [K_\sigma] d\{\delta\}, \quad (5.7)$$

где  $[K_\sigma]$  – матрица геометрической жесткости. Таким образом,

$$d\{\psi\} = ([K_0] + [K_L] + [K_\sigma]) d\delta = [K_T] d\{\delta\},$$

где  $[K_m]$  – полная матрица касательной жесткости.



**Рис. 5.6. Геометрическая интерпретация компонентов матрицы жесткости**

Для одномерной задачи можно дать следующую геометрическую интерпретацию описанным выше матрицам (рис.5.6).  $[K_0]$  – это тангенс угла наклона касательной к графику  $F(\delta)$  в точке недеформированного состояния. Матрица  $[\bar{K}] = [K_0] + [K_L]$  связывает  $F$  и  $\delta$  с учетом достигнутого уровня деформаций для конкретной точки графика.  $[K_T] = [\bar{K}] + [K_\sigma]$  – тангенс угла наклона касательной к графику  $F(\delta)$  в точке, соответствующей достигнутому уровню деформации.

Нелинейные соотношения между перемещениями и деформациями, справедливые как для малых, так и для больших перемещений и деформаций, известны как тензор деформаций Коши-Грина и выглядят следующим образом:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \{\theta\}_X^T & 0 & 0 \\ 0 & \{\theta\}_Y^T & 0 \\ 0 & 0 & \{\theta\}_Z^T \\ \{\theta\}_Y^T & \{\theta\}_X^T & 0 \\ 0 & \{\theta\}_Z^T & \{\theta\}_Y^T \\ \{\theta\}_Z^T & 0 & \{\theta\}_X^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\theta\}_X \\ \{\theta\}_Y \\ \{\theta\}_Z \end{Bmatrix}, \quad (5.8)$$

Где

$$\begin{aligned} \{\theta\}_X^T &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right\}, \\ \{\theta\}_Y^T &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right\}, \\ \{\theta\}_Z^T &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z} \right\}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в (5.8) описывает бесконечно малые деформации, а второе – нелинейные члены, обусловленные существенными деформациями. Запишем нелинейную составляющую в виде:

$$\{\varepsilon_L\} = \frac{1}{2} [A] \{\theta\},$$

где  $[A]$  – матрица размерностью (6x9). Варьируя это соотношение, получаем следующую зависимость:

$$d\{\varepsilon_L\} = \frac{1}{2} d[A] \{\theta\} + \frac{1}{2} [A] d\{\theta\} = [A] d\{\theta\}. \quad (5.9)$$

Для  $i$ -го узла можно выразить  $\{\theta\}_i$  следующим образом:

$$\{\theta\}_i = \begin{Bmatrix} \{\theta\}_{xi} \\ \{\theta\}_{yi} \\ \{\theta\}_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_3] \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ [I_3] \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ [I_3] \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = [G] \{\delta\}_i,$$

где  $[I_3]$  – единичная матрица размерностью (3x3).

Обобщив последнюю зависимость на весь конечный элемент, получим

$$\{\theta\} = [G] \{\delta\},$$

тогда выражение (5.9) можно записать в виде

$$d\{\varepsilon_L\} = [A][G] d\{\delta\},$$

Откуда

$$[B_L] = [A][G]. \quad (5.10)$$

Для получения матрицы касательной жесткости необходимо определить матрицы  $[K_\sigma]$  и  $[K_L]$ . В соответствии с (5.7) и (5.10) имеем:

$$[K_\sigma] d\{\delta\} = \int_V d[B_L]^T \{\sigma\} dV = \int_V [G_L]^T d[A]^T \{\sigma\} dV. \quad (5.11)$$

С учетом (5.8) можно записать:

$$d[A]^T \{\sigma\} = \begin{bmatrix} d\{\theta_x\} & 0 & 0 & d\{\theta_y\} & 0 & d\{\theta_z\} \\ 0 & d\{\theta_y\} & 0 & d\{\theta_x\} & d\{\theta_z\} & 0 \\ 0 & 0 & d\{\theta_z\} & 0 & d\{\theta_y\} & d\{\theta_x\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_x[I_3] & \tau_{xy}[I_3] & \tau_{xz}[I_3] \\ \tau_{yx}[I_3] & \sigma_y[I_3] & \tau_{yz}[I_3] \\ \tau_{zx}[I_3] & \tau_{zy}[I_3] & \sigma_z[I_3] \end{bmatrix} d[Q] = [Q][G]d\{\delta\}. \quad (5.12)$$

После подстановки (5.12) в (5.11) получаем:

$$[K_\sigma] = \int_v [G]^T [Q][G] dV, \quad (5.13)$$

где  $[Q]$  – матрица размерностью (9x9), составленная из шести компонентов тензора напряжений в соответствии с (5.12).

Матрицу  $[K_L]$  можно определить из выражения (5.5) с учетом (5.3):

$$[K_L] = \int_v \left( [B_0]^T [D][B_L] + [B_L]^T [D][B_L] + [B_L]^T [D][B_0] \right) dV. \quad (5.14)$$

В задачах, исследуемых в данной работе, большие перемещения отсутствуют. Сравним матрицы  $[K_0]$ ,  $[K_\sigma]$  и  $[K_L]$ . Из уравнений (2.15), (5.13) и (5.14) видно, что матрица  $[K_L]$  содержит элементы высшего порядка малости и может быть опущена.

Используя такой подход, можно записать уравнение свободных колебаний системы без демпфирования:

$$([K_0] + [K_\sigma])\{\delta\} + [M_0]\{\ddot{\delta}\} = 0, \quad (5.15)$$

где  $[K_\sigma]$  – матрица геометрической жесткости, полученная итерационным путем в результате решения задачи

$$[K_T]\{\delta\} = \{F\}$$

с учетом всех действующих сил.

При вращении исследуемого объекта возникают две дополнительные системы сил, связанные с центробежным и кориолисовым ускорениями. В этом случае уравнение движения (5.15) примет вид:

$$([K_0] + [K_\sigma])\{\delta\} + [M_0]\{\ddot{\delta}\} + \{F_\Omega\} = 0, \quad (5.16)$$

где

$$\{F_\Omega\} = \int_v [N]^T \rho \{a_\Omega\} dV.$$

При вращении объекта в правосторонней системе координат вокруг оси  $Ox$  с угловой скоростью  $\Omega$  ускорение  $\{a_\Omega\}$  имеет вид:

$$\{a_\Omega\} = 2\Omega \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} - \Omega^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ u \\ w \end{Bmatrix} = 2\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [N]\{\dot{\delta}\} - \Omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N]\{\delta\}.$$

Обозначим

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\bar{E}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

тогда

$$\{a_\Omega\} = 2\Omega [E][N]\{\dot{\delta}\} - \Omega^2 [\bar{E}][N]\{\delta\},$$

а выражение  $\{F_\Omega\}$  примет вид:

$$\{F_\Omega\} = 2\Omega \rho \int_v [N]^T [E][N]\{\dot{\delta}\} dV - \Omega^2 \rho \int_v [N]^T [\bar{E}][N]\{\delta\} dV. \quad (5.17)$$

Подставив (5.17) в (5.16), получим уравнение движения в виде:

$$([K_0] + [K_\sigma] - \Omega^2 [\bar{M}])\{\delta\} + [M_0]\{\ddot{\delta}\} + 2\Omega [S]\{\dot{\delta}\} = 0, \quad (5.18)$$

где  $[\bar{M}]$  и  $[S]$  – матрицы псевдомасс и скольжения, определенные в (5.17).

В соответствии с исследованиями, выполненными в работе [43], влиянием кориолисова ускорения на колебания, т.е. последним членом в уравнении (5.18), можно пренебречь.

Для учета поля центробежных сил нужно откорректировать матрицу жесткости. Для этого в классической литературе, например, у Зенкевича [92] предлагается метод Ньютона.

Однако, как показали численные исследования, после 5-8 итераций процесс перестает быть сходящимся, по крайней мере при использовании элементов второго и третьего порядка. Использование моди-

фицированного метода Ньютона, при котором касательная матрица  $[K_T]$  не вычисляется на каждом шаге 2, не улучшает ситуации.

Таким образом, встает проблема выбора между принудительным остановом процесса после, например, трех итераций или тщательным анализом нормы вектора невязок в итерационном процессе, позволяющим вовремя распознать начало «расхождения» и, остановив процесс, оставить в качестве решения результаты последней удачной итерации. Оба подхода имеют свои плюсы и минусы, но в процессе исследований сходимости был интуитивно предложен, а затем и математически обоснован [142] третий, как показали тестовые расчеты, действительно сходящийся процесс на основе метода простых итераций. Суть его заключается в следующем:

1. Начальное приближение  $\{\delta\}_0$  определяется исходя из линейной матрицы жесткости системы:  $[K_0]\{\delta\}_0 - \{R\} = 0 \rightarrow \{\delta\}_0$ .

2. Исходя из достигнутого уровня деформаций, определяется матрица жесткости  $[\bar{K}] = [K_0] + [K_L]$  для точки  $\{\delta\}_0$ .

3. Решается система  $[\bar{K}]\{\delta\}_1 - \{R\} = 0$  относительно  $\{\delta\}_1$ .

Шаги 2 и 3 повторяются до тех пор, пока изменение  $|\{\delta_i\} - \{\delta_{i-1}\}|$  не станет достаточно малым.

При исследовании динамики рабочих колес в составе всего ротора и учете его дисбаланса можно учесть нелинейный характер действующих на лопаточный аппарат центробежных сил, связанный с прогибом ротора. В этом случае в процессе вычисления достигнутого уровня деформации ротора корректируется составляющая внешних сил в уравнении (5.1). Но этот вопрос не рассматривался в рамках данной работы.

### 5.3. Тестирование, верификация, результаты расчетов

Важным шагом в разработке любого ПО является этап тестирования.

Для оценки точности расчетов и проверки корректности использования элементов высшего порядка были проведены несколько серий тестовых расчетов.

Расчеты собственных частот стержневых объектов сравнивались с аналитическим решением согласно технической теории стержней [34, 196]. Полученные результаты позволили сделать вывод, что применение объемных элементов высшего порядка при расчете стержневых конструкций вполне корректно, хотя по сравнению со специализированными стержневыми и балочными элементами, имеющимися в коммерческих продуктах, весьма расточительно с вычислительной точки зрения.

Расчеты собственных частот консольно закрепленных стальных пластин сравнивались с известными аналитическими решениями и с расчетами, проведенными в ПК «ANSYS».

Кроме расчетов прямоугольной пластины постоянной толщины, для которой имеется аналитическое решение, проводились расчеты цилиндрической консоли типа лопасти винта и цилиндрической консоли трапецеидальной формы в плане. Данные объекты хорошо изучены и неоднократно использовались другими авторами для тестирования различных типов конечных элементов [126, 127, 216, 222, 238, 256, 257, 286].

Тестовые расчеты пластин и цилиндрических консолей показали существенное превосходство элементов 3-го порядка по сравнению с элементами 1-го и 2-го порядков.

Важнейшими объектами динамических исследований являются лопасти рабочих колес различных турбоагрегатов. Анализ публикаций по регистрации колебаний в турбоустановках [54, 55, 112, 240, 254,

268] позволяет сделать вывод, что частота колебаний, в том числе и собственных, экспериментальным путем определяется очень точно. Сложнее обстоят дела с с определением форм колебаний. Поэтому критерием точности расчетов таких объектов, как элементы турбомашин можно считать экспериментально полученные значения собственных частот.

В качестве тестовых моделей лопаток взяты турбинная и компрессорная лопатки, описанные в работе [239]. Эти объекты хорошо изучены и использовались для апробации и тестирования различных методик и программного обеспечения другими авторами [242,264,270].

Анализ полученных результатов и опубликованных исследований позволяет дать следующие рекомендации. Для расчета таких элементов, как компрессорная лопатка, треугольные элементы с изгибно-мембранной жесткостью следует применять с большой осторожностью. Применение таких элементов обусловлено тем, что они присутствуют практически во всех коммерческих пакетах прикладных программ, что, в свою очередь, объясняется простотой их использования. Для расчета турбинной лопатки, более сложной, плоские элементы вообще не приемлемы, в этом случае следует использовать объемные элементы. В связи со сложной геометрической формой применение теории пластин, безмоментных оболочек, теории закрученных стержней становится также затруднительным. Хорошие результаты дает применение элементов 3D48, 3 D72,3D96, используемых в разработанном комплексе.

В качестве примера реального объекта для исследования собственных колебаний и для верификации ПО можно рассмотреть рабочее колесо паровой турбины К-6-30П производства Калужского турбинного завода рис 5.7. Номинальная мощность турбины 6200 кВт, частота



вращения ротора  $n_{\text{ном}}=130$  с-1, рабочий диапазон изменения оборотов  $113 \div 143$  с-1.

Данная турбина подвергалась тщательным заводским расчетным и экспериментальным исследованиям, результаты которых опубликованы в [23]. Это обусловило ее выбор для апробации рассматриваемой методики расчета.

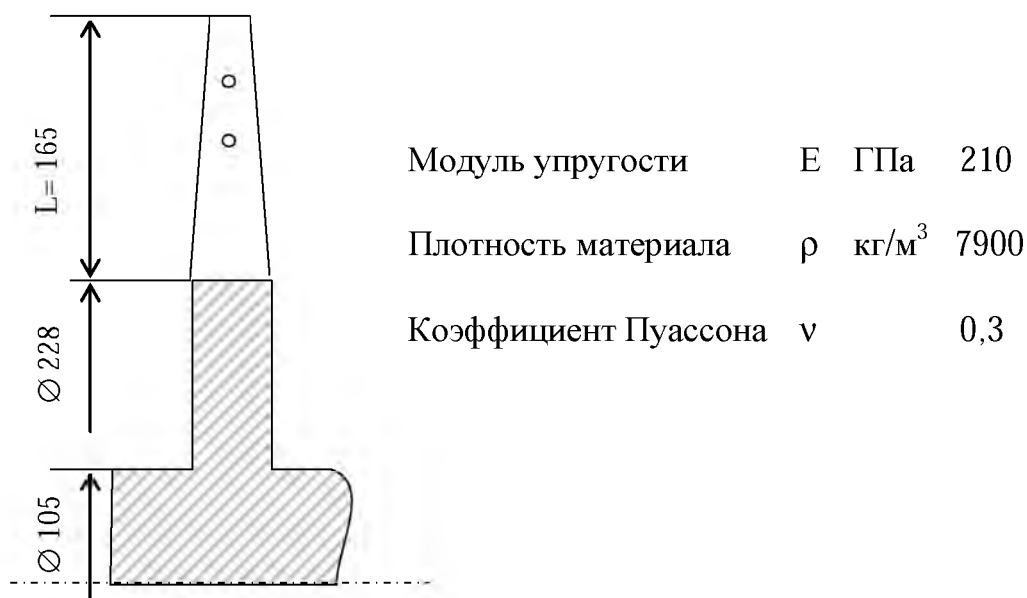


***Рис. 5.7. Фрагмент рабочего колеса восьмой ступени паровой турбины К6-30П с закрепленными на лопатках тензодатчиками***

Рабочие лопатки исследуемой ступени – переменного сечения, с двумя круговыми рядами демпферной проволоки. Крепление лопаток осуществляется елочным хвостовиком с осевой установкой.

На рис. 5.8 изображен схематический чертеж рабочего колеса и основные механико-геометрические параметры. Материал лопатки – сталь ЭИ-80. Ротор данной турбины представляет собой цельнокова-

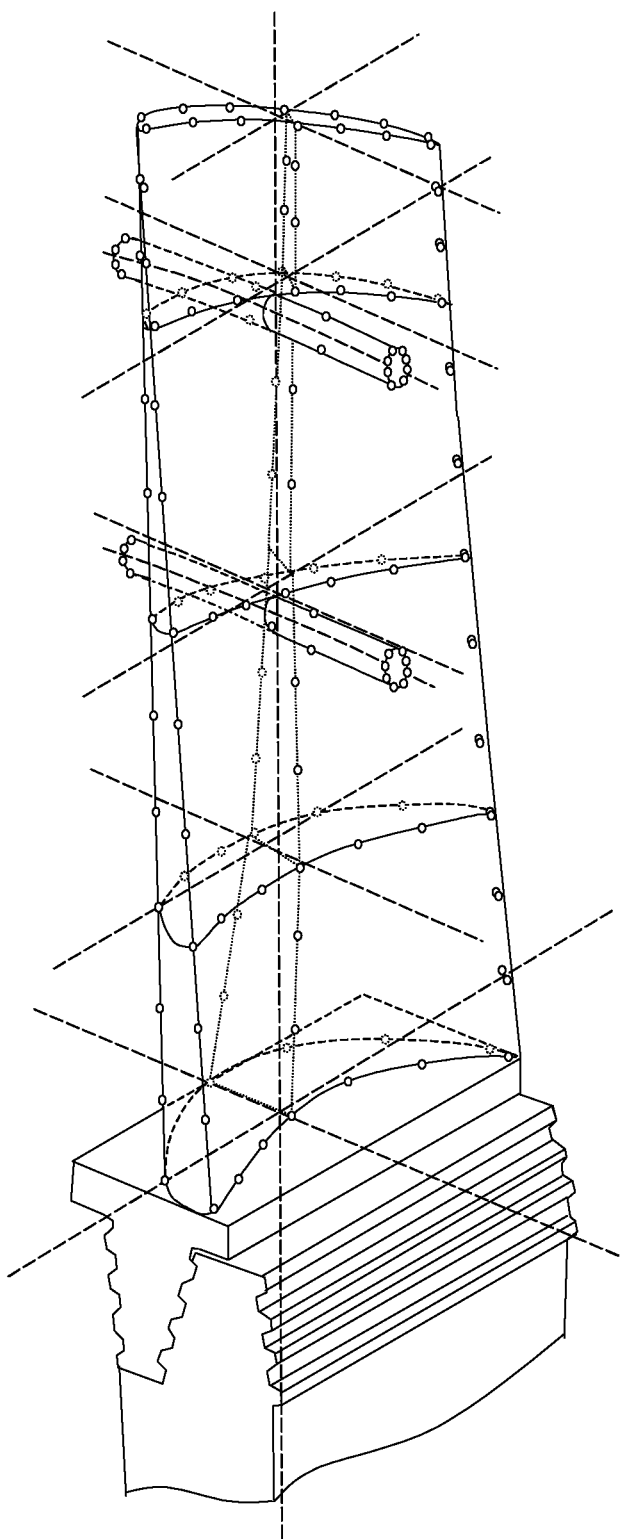
ный вал с дисками и установленными на них лопатками. В математической модели диск считается жестко закрепленным на ступице.



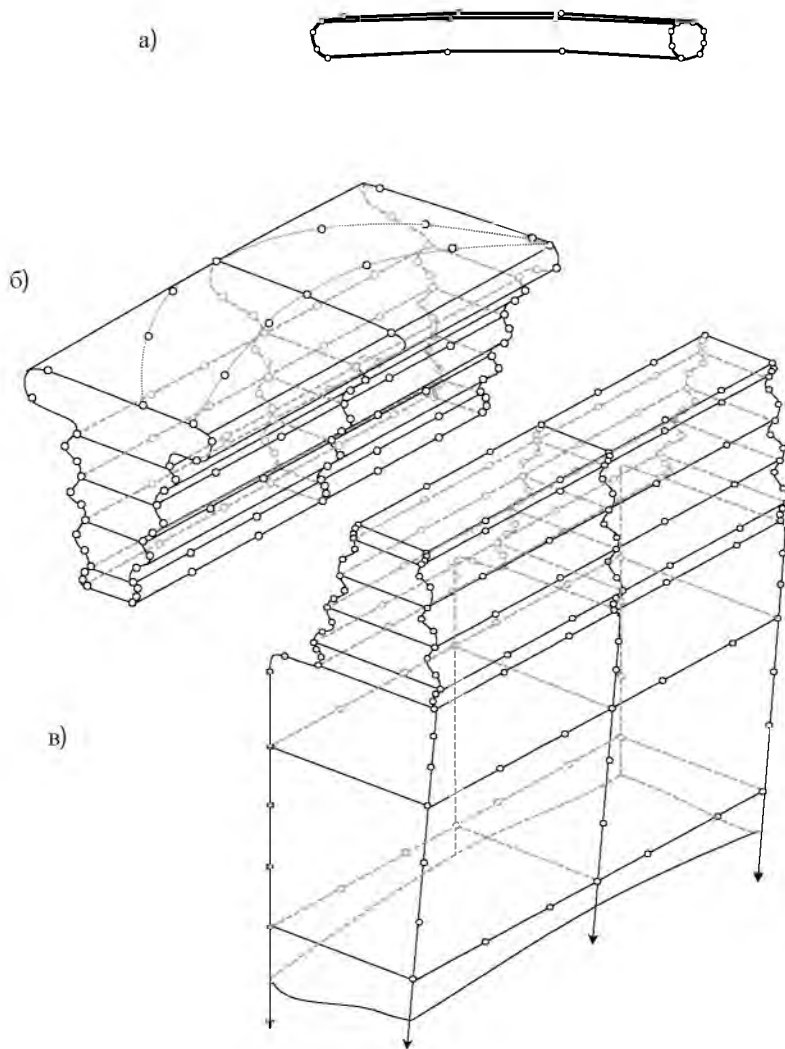
**Рис. 5.8. Схематический чертеж и характеристики диска с лопатками**

В расчетах использовалась циклическая симметрия пятьдесят четвертого порядка (по числу установленных на диске лопаток). Конечноэлементная модель сектора диска с лопаткой представлена на рис. 5.9, 5.10. Исходные данные для пера лопатки и сектора диска подготавливались с помощью специально написанных генераторов исходных данных. Расчетный сектор рассматривался как один суперэлемент, который, в свою очередь, состоит из четырех связанных компонентов:

- 1) рабочая лопатка с елочным хвостовиком,
- 2) сектор диска,
- 3) два элемента проволочных связей.



*Рис. 5.9. Расчетная модель сектора диска с лопаткой*



**Рис. 5.10. Фрагменты расчетной модели рабочего колеса:**  
**а) элементы демпферных связей, б) элементы хвостовика лопатки,**  
**в) элементы замка и сектора диска**

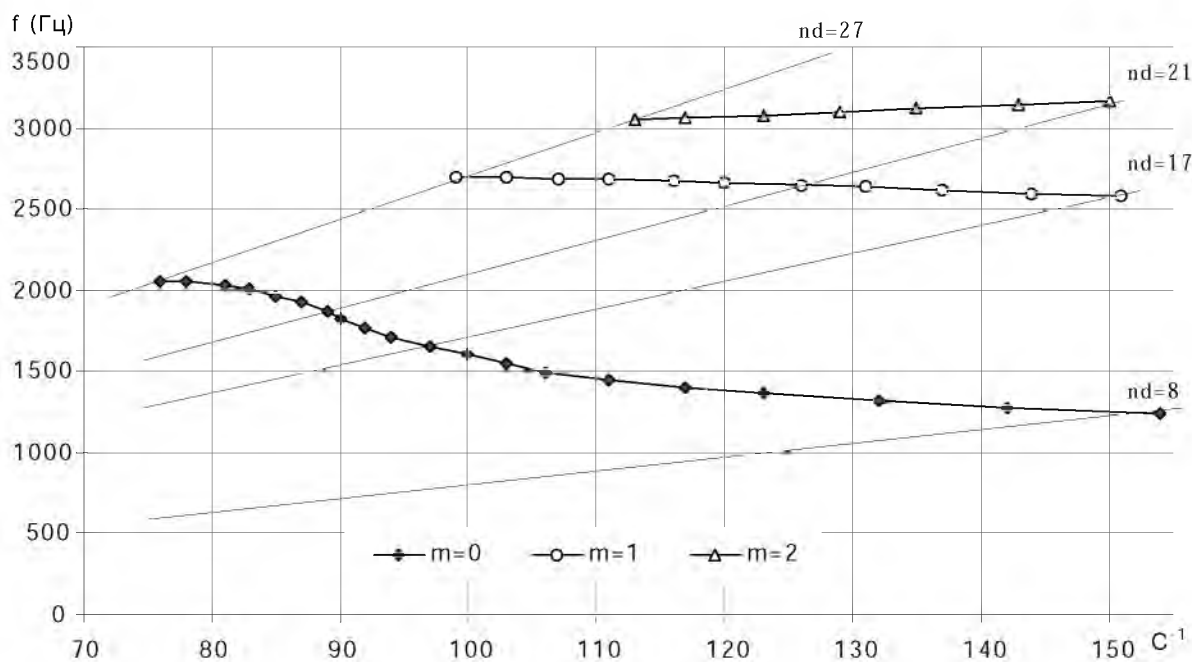
Участок демпферной проволоки, приходящийся на один расчетный сектор колеса, моделируется единственным конечным элементом 3D72, который с помощью одного общего с лопаткой узла шарнирно прикреплен к лопатке и представляет собой изогнутый стержень с такой же, как и у реальной связи, площадью поперечного сечения (рис. 5.10 а). Замковое соединение представляет собой конструкцию из  $11 \cdot n$  элементов, где  $n$  – число элементов, полученное при разбиении лопатки по хорде. Первые  $5 \cdot n$  элементов принадлежат хвостовику лопатки. Следующие  $6 \cdot n$  элементов моделируют замковую часть диска (рис. 5.10 б, в).

Построенная по результатам расчетов частотная диаграмма (Кэмпбел – диаграмма) рабочего колеса (рис. 5.11) позволила сформулировать следующие особенности его динамических характеристик:

1. Для семейства собственных частот с одной узловой окружностью в рабочем диапазоне турбоагрегата находятся частоты с 18–27 узловыми диаметрами. Резонансные частоты, возбуждаемые с коэффициентом кратности от 18 до 27, не представляют серьезной опасности [96].

2. Лежащие в рабочем диапазоне резонансные частоты с 21–27 узловыми диаметрами для семейства с двумя узловыми окружностями также не являются источником опасности.

3. Семейство собственных форм колебаний без узловых окружностей имеет критические частоты в рабочем диапазоне частот турбоагрегата при коэффициенте кратности  $k=9-12$ , что соответствует экспериментальным данным.



**Рис. 5.11. Частотная диаграмма рабочего колеса восьмой ступени паровой турбины К6-30П ( $m$  – число узловых окружностей,  $nd$  – число узловых диаметров)**

Таблица 5.2

Расчетные и экспериментальные данные по резонансным частотам  
(число узловых окружностей  $m=0$ )

Число узловых диаметров	Эксперимент Гц	Расчет Гц	Погрешность %
9	1310	1252	-4,4
10	1330	1284	-3,4
11	1360	1319	-3,0
12	14000	1359	-4,0

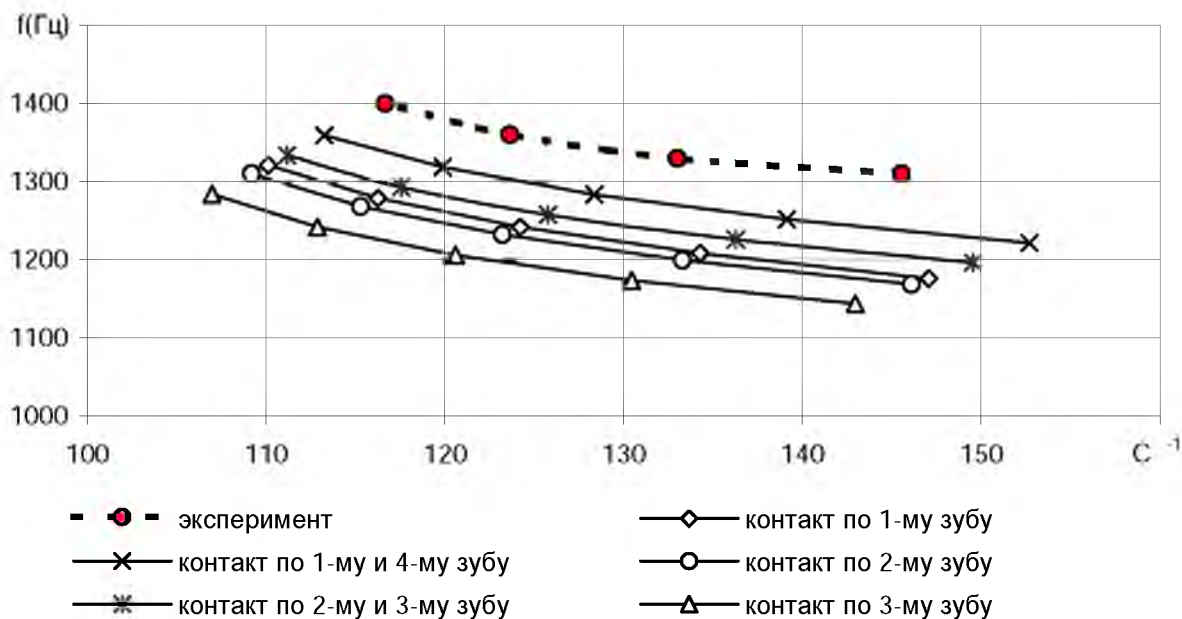
Из таблицы 5.2 видно, что отличие результатов расчетов от экспериментальных данных не превышает 4,5 %. Это можно считать хорошим показателем, подтверждающим корректность модели и пригодность ее для дальнейших исследований динамических характеристик рабочего колеса.

Разработанные конечноэлементная модель и программное обеспечение позволяют исследовать влияние различных конструктивных факторов на динамику рабочих колес. В число таких факторов может входить, например, жесткость соединения лопаток с диском и жесткость проволочных связей.

По результатам расчетов построена частотная диаграмма рабочего колеса с зацеплением рабочих лопаток по первому, второму и третьему зубьям, а также при комбинированном зацеплении (рис. 5.12). Наиболее критичное перераспределение нагрузки – перемещение контактной зоны на нижний зуб елочного крепления – способно снизить частотный спектр рабочего колеса на 8–15%. Однако в реальных условиях благодаря конструкции елочного хвостовика такого явления не происходит.

При достаточно жестких допусках на изготовление контактирующих деталей и за счет деформаций, возникающих при вращении рабочего колеса, как показывают экспериментальные исследования,

область контакта распределяется по всем рабочим поверхностям зубьев. В то же время следы износа элементов замкового зацепления лопаток свидетельствуют о наличии некоторого проскальзывания контактируемых поверхностей при эксплуатации турбоагрегатов.

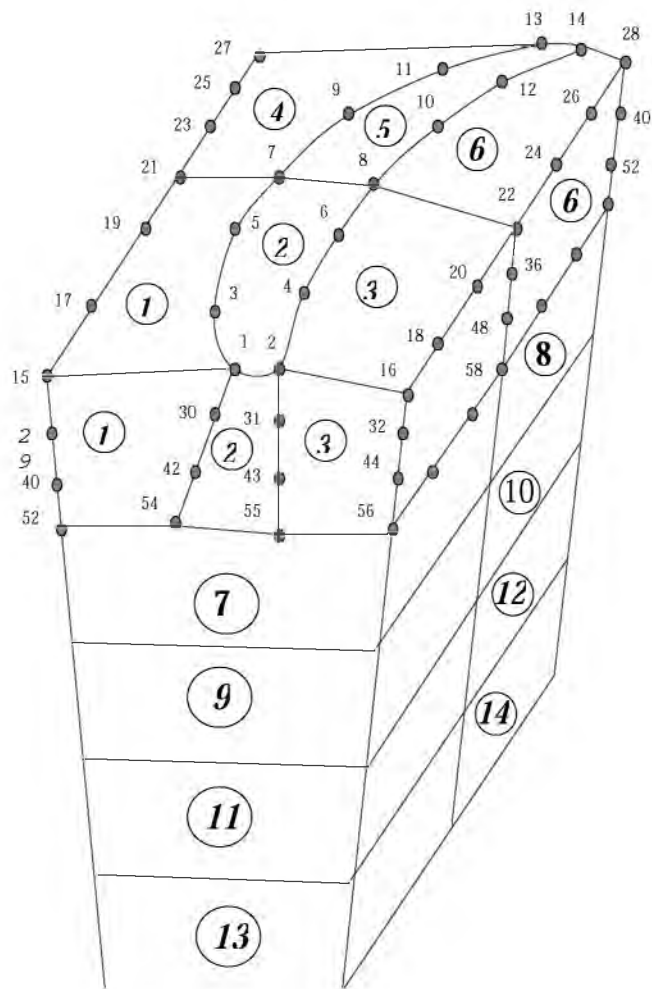


**Рис. 5.12.** Влияние расположения контактной зоны на спектр собственных колебаний рабочего колеса паровой турбины

Ряд работ, посвященных исследованию контактных зон соединения лопатки с диском и с бандажом, говорит о том, что проблемы, возникающие в данной области, представляют определенный интерес, но в основном это задачи, связанные с НДС в контактной зоне [57, 170, 255, 271, 289]. В работе [94] экспериментально исследуется влияние жесткости соединений и наличия зазоров в замковых соединениях на собственные частоты и демпфирование колебаний лопаток.

Подобные исследования можно провести с упрощенной моделью, не привязываясь к конкретному типу крепления лопатки к диску. Это могут быть Т- или Х-образные хвостовики, различные виды вильчатых креплений, хвостовики типа елочки и другие. Каждая конструкция обладает своей жесткостью, поэтому при выборе определенного типа крепления полезно знать, как это отразится на динамиче-

ских свойствах всего колеса. Для определения влияния жесткости крепления лопаток на частотный спектр рабочего колеса в работе [15] проводились подобные расчеты с упрощенными моделями. Упрощенная модель крепления лопатки к диску, показанная на рис. 5.13, позволяет увидеть качественный характер исследуемых зависимостей.

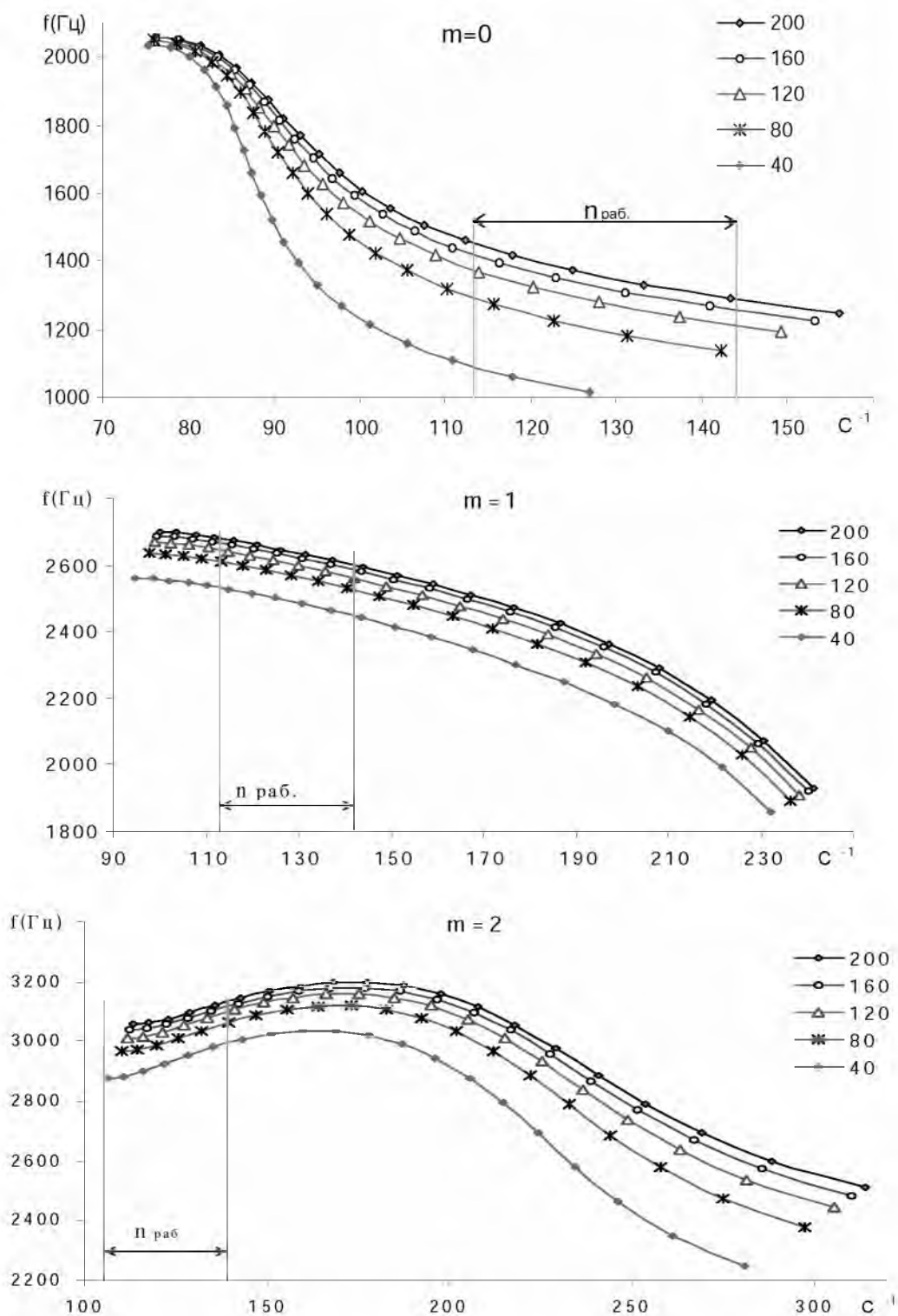


**Рис. 5.13. Упрощенная конечноэлементная модель входа лопатки в сектор диска**

Для получения зависимости собственных частот от конструкции соединения в показанной модели просто изменяется модуль упругости элементов заделки – это элементы 1–6. На рис. 5.14 представлен пример полученной зависимости частотной диаграммы рабочего колеса от жесткости соединения лопатка – диск.



Анализируя частотную диаграмму, конструктор может определить наличие опасных собственных частот и принять меры для отстройки системы от этих частот.



**Рис. 5.14.** Влияние жесткости элементов заделки (ГПа) на резонансные колебания турбинного колеса с различным числом узловых диаметров  $m$

#### **5.4. Частотные функции, связанность системы, оценка корректности форм резонансных колебаний**

Один из ключевых алгоритмов разработанного ПО (учет свойств циклической симметрии) позволяет оценить динамику системы по расчету одного, циклически повторяющегося сектора.

У данного подхода имеются как сторонники, использующие его с целью экономии вычислительных ресурсов, так и противники, утверждающие, что в динамических расчетах с учетом циклической симметрии могут быть потеряны некоторые формы колебаний [190].

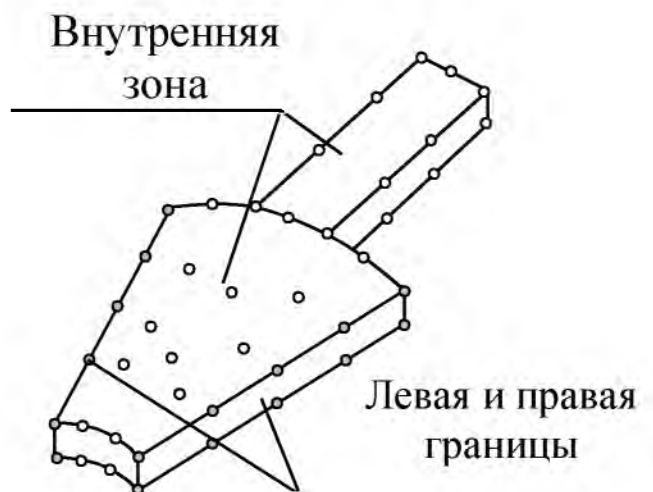
В 90-х годах точность расчетов и детализация моделей повысились настолько, что стали обнаруживаться различия в результатах расчетов с использованием свойств циклической симметрии и расчетов полной модели. Причем частоты колебаний практически не отличались, а формы отличались достаточно сильно. Экспериментально тоже были диагностированы формы, не подчиняющиеся периодическому в окружном направлении закону. На этом основании встал вопрос о корректности использования свойств циклической симметрии в расчетах.

Споры по этому вопросу ведутся до сих пор. Поэтому вопрос правомерности использования свойств циклической симметрии в динамических расчетах, анализ точности результатов подобных расчетов и определение областей эффективного применения рассматриваемой методики представляют несомненный научный и практический интерес.

В результате проведенных исследований была выявлена причина появления различий в результатах расчетов и сформулированы критерии корректности использования этих свойств. Критерии основаны на оценке степени связанности системы и позволяют судить о корректности построения циклически симметричных форм колебаний по виду т.н. частотных функций.

Дело в том, что при слабой связанности секторов циклически симметричной системы (например жесткий диск и массивные упругие лопатки) система распадается на серию идентичных подсистем (сектор диска с лопаткой). Каждая из подсистем может совершать собственные колебания на такой же как у других секторов собственной частоте, но со своими значениями фазы и амплитуды. Эти параметры определяются начальными условиями. На практике амплитудные и фазовые соотношения отдельных секторов определяются характером возмущающих сил, поскольку мы имеем дело с вынужденными колебаниями.

Если же связанность системы высокая, например податливый диск и короткие жесткие лопатки, то даже при существенном отклонении характера распределения возмущающих сил от циклического закона, форма колебаний системы будет оставаться циклически симметричной.



**Рис. 5.15. Фрагмент механической конструкции, обладающей циклической симметрией**

Согласно идее расчета систем, обладающих циклической симметрией (рис. 5.15), векторы узловых перемещений и реакций на общей границе соседних секторов идентичны. Уравнение свободных колебаний может быть записано в виде:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_3 \end{Bmatrix},$$

где индексы 1, 3 и 2 в векторах узловых перемещений и сил обозначают соответственно составляющие на левой и правой границах и внутренней зоне сектора. Матрицы  $[K]$  и  $[M]$  также разбиваются на соответствующие блоки. На основании свойств цикличности можно записать:

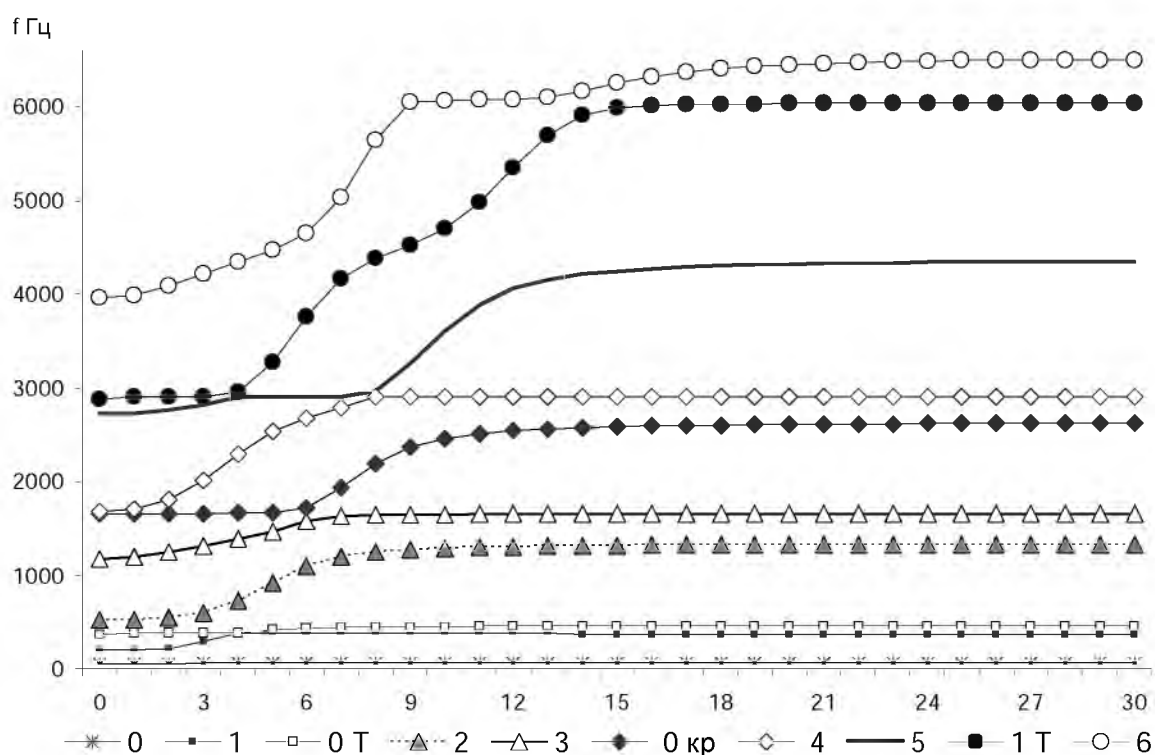
$$\{\delta_3\} = e^{\alpha n} \{\delta_1\} \text{ и } \{q_3\} = -e^{\alpha n} \{q_1\}, \text{ где} \quad (5.19)$$

$$\alpha_n = i \frac{2\pi}{N} n, \quad n=0,1,2,\dots,N-1; \quad i = \sqrt{-1}, \quad N - \text{порядок циклической симметрии.}$$

С практической точки зрения использование данной методики превращает расчет всей системы в серию расчетов одного, циклически повторяющегося сектора, но с различными граничными условиями (5.19). В результате каждого расчета определяются собственные частоты всех форм, с заданным числом узловых диаметров. Число расчетов равно порядку циклической симметрии системы, деленному пополам. Собственные частоты, полученные в каждом из расчетов, сортируются в порядке возрастания, Затем весь спектр собственных частот разделяется на семейства, согласно полученным при сортировке номерам. Предполагается, что все первые частоты соответствуют формам колебаний без узловых окружностей, второе семейство – это колебания с одной узловой окружностью, третье, - с двумя и т.д.

Полученные данные позволяют построить частотные функции в системе координат, где по оси абсцисс откладывается число узловых диаметров, а по оси ординат – частота собственных колебаний. Поскольку физический смысл имеют лишь дискретные значения, соответствующие целым числам узловых диаметров, линии, объединяющие семейства собственных частот носят условный характер.

На рисунке 5.16 показаны частотные функции, полученные для очень показательной с точки зрения изучения свойств циклической симметрии модели диска с лопатками (рис.5.17). Порядок циклической симметрии равен 60. Внутренний и наружный диаметры диска 100 мм и 300 мм соответственно, внешний диаметр по лопастям – 500 мм, толщина диска и лопастей – 1 мм, материал – сталь.



**Рис. 5.16. Спектр собственных частот модели диска с лопатками**



**Рис. 5.17. Сектор модели циклически симметричного диска с лопатками (порядок циклической симметрии  $N=60$ )**

На самом деле картина намного сложнее, поскольку в спектре собственных колебаний присутствуют колебания различных видов. Это аксиальные, тангенциальные и радиальные колебания, а при наличии лопаток еще и крутильные колебания лопаток относительно их –

лопаток осей (имеются и другие особенности, связанные с периодичностью граничных условий).

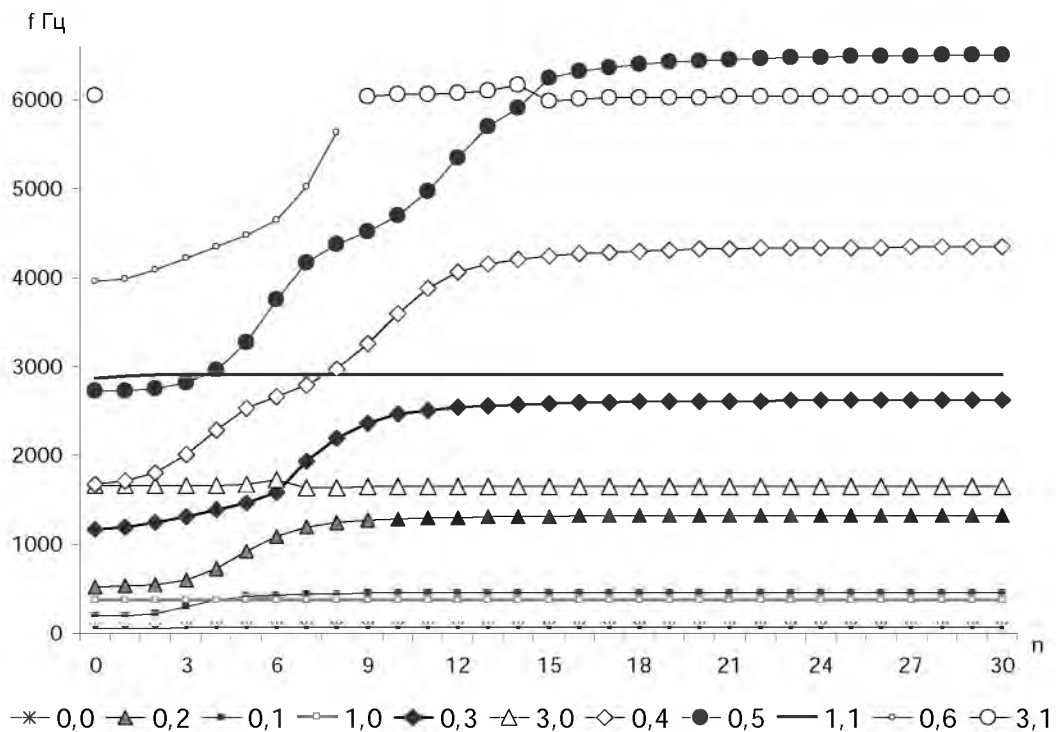
Показанные на рисунке частотные функции помечены в легенде цифрой, обозначающей число узловых окружностей. По оси абсцисс откладывается число узловых диаметров  $n$ . Буква «Т» в легенде обозначает тангенциальную форму колебаний, «кр» – кручение лопастей относительно их (лопастей) осей.

Однако из-за интерференции частот такая классификация представляется не вполне корректной. Из общего спектра частот целесообразно формировать семейства колебаний не по их порядковому номеру, а по строгой принадлежности к некоторой группе форм. Логичнее всего формировать семейства колебаний по числу узловых окружностей.

Действительно, визуальный анализ показал, что на рис. 5.16 указанным в легенде формам соответствуют только первые (левые) точки графиков, т.е. колебания без узловых диаметров. Каждой последующей точке должно соответствовать только увеличение числа узловых диаметров. Однако на самом деле это не так. Например, линия «5» в своем начале (левая часть) соответствует форме аксиальных колебаний с пятью узловыми окружностями, в правой части – форме с четырьмя узловыми окружностями, а в средней части это вообще колебания лопастей в плоскости диска, т.е. тангенциальные.

Тем не менее, несомненным достоинством частотной диаграммы, показанной на рис. 5.16, является то, что она легко строится в автоматическом режиме и дает наглядное представление о возможных пересечениях частотных функций и интерференциях форм колебаний.

На рис. 5.18 показаны частотные функции той же модели, построенные после визуального анализа форм колебаний.



**Рис. 5.18. Спектр собственных частот модели диска с лопастями после перегруппировки частот**

Теперь это вполне корректные частотные функции, представляющие собой дискретные зависимости  $F_{k,m,n} = f_{k,m}(n)$ , где

$n$  – число узловых диаметров,

$m$  – число узловых окружностей,

$k$  – форм-фактор, указывающий на принадлежность данных форм колебаний определенному виду: аксиальные ( $k=0$ ), тангенциальные ( $k=1$ ), радиальные ( $k=2$ ), вращение лопастей относительно собственных осей ( $k=3$ ).

В легенде на рис. 5.18 частотные функции обозначены двумя индексами: первый – форм-фактор, второй – число узловых окружностей.

Граничные условия, накладываемые на расчетную модель при повышении числа узловых диаметров, делают эту модель, если так можно выразиться, более жесткой. При этом следует ожидать повышения значений собственных частот, что, как правило, мы и наблюдаем. Об этом свидетельствует монотонно возрастающий характер час-

тотных функций. Однако для некоторых форм колебаний ужесточение граничных условий не приводит к заметному росту собственной частоты. Это говорит о не зависимости (или слабой зависимости) данной формы колебаний от данного вида граничных условий. Иными словами для этих форм колебаний связь между секторами слабая или отсутствует. О циклически симметричном характере формы колебаний всей системы в этом случае говорить не корректно. Система может распадаться на  $N$  независимых или слабо зависимых систем.

Ряд горизонтальных или почти горизонтальных частотных функций рис. 5.18 говорит о наличии у модели форм колебаний, не зависящих или слабо зависящих от граничных условий на краях сектора, что не свойственно дисковым формам колебаний.

Частотная функция, соответствующая аксиальным формам без узловых окружностей «0,0», представляет изгибные колебания лопасти, хотя при малых значениях  $n$  ( $<7$ ) наблюдается некоторое (до 7%) снижение частот, что объясняется влиянием дисковых форм колебаний. Влияние дисковых форм более заметно на следующей, соответствующей одной узловой окружности, частотной функции. Падение частоты составляет примерно 47% и происходит при числе узловых диаметров также менее 7.

Частотные функции, соответствующие тангенциальным колебаниям «1,0» и «1,1», представляют первую и вторую форму колебаний лопасти в направлении её максимальной жесткости и практически не зависят от  $n$ . Еще две формы, практически не зависящие от  $n$ , это кручение лопастей относительно их осей – «3,0» и «3,1».

Наличие горизонтальных или почти горизонтальных участков у частотной функции  $f_{k,m}$  в правой части диаграммы говорит о разрыве или ослаблении связи колебаний отдельных секторов на частотах, соответствующих  $k$ -му виду колебаний с  $m$  узловыми окружностями и тем количеством узловых диаметров, которым соответствует данный



горизонтальный участок. В этом случае дисковая форма колебаний вырождается в одну из независимых форм колебаний сектора, например, в изгибную форму колебаний лопасти.

Таким образом, взяв за основу понятие связанности, можно определить область применения методики расчета систем, с учетом свойств циклической симметрии.

Очевидно, что для системы с разорванными связями нет смысла строить формы собственных колебаний, учитывая их периодичность в окружном направлении, так как каждый сектор будет представлять собой независимую механическую систему. Расчет всей системы целиком также нецелесообразен. Достаточно определить динамические характеристики одного сектора. Общая картина динамики всей системы будет представлять собой произвольное сочетание собственных колебаний отдельных секторов и определяться  $2N$  начальными условиями для каждой серии кратных собственных частот.

С целью анализа корректности использования свойств циклической симметрии для систем с жесткой или незначительно ослабленной связью была проведена серия численных расчетов жестко закрепленного на ступице идеального диска с искусственно заниженным порядком циклической симметрии и диска с физически пониженным порядком циклической симметрии путем размещения точечных масс на его периферии [145]. После сравнения результатов, полученных с использованием свойств циклической симметрии, и результатов расчета полной модели был сделан вывод, что при эквивалентной конечноэлементной сетке расчет с использованием свойств циклической симметрии дает более точные результаты (дополнительные граничные условия играют роль некоторого стабилизирующего фактора), что подтверждает корректность применения подобных методик.

Говоря о динамике слабо связанных систем, уместно вспомнить, что расчет собственных колебаний интересует конструкторов в основ-

ном с целью недопущения работы системы на резонансных частотах, т.е. в конечном счете, речь идет о вынужденных колебаниях вблизи резонансных частот. Здесь и далее я хочу подчеркнуть разницу между собственными и резонансными колебаниями. Поэтому особое внимание следует уделить возмущающим силовым факторам. Если нагрузка имеет циклический в окружном направлении характер, то формы колебаний тоже будут циклическими. Наличие связи в этом случае будет способствовать такому распределению амплитуд резонансных колебаний. Следовательно, расчет собственных (резонансных) форм колебаний с учетом свойств циклической симметрии при граничных условиях, обеспечивающих кратность числа узловых диаметров порядку циклической симметрии, корректен и вполне оправдан. Случай с числом узловых диаметров, не кратным порядку циклической симметрии системы, особый, и рассмотрен чуть ниже.

Если имеются возмущающие силы, распределение которых в окружном направлении не подчиняется периодическому закону, а амплитуда выше некоторого порога, то они способны преодолеть стабилизирующее влияние связей между секторами и «раскачать» отдельные сектора, нарушая циклический характер колебаний системы.

Пороговая величина таких возмущений, очевидно, зависит от степени связанности системы. Исследование колебательных процессов в таких случаях и количественная оценка степени связанности системы выходит за рамки данной работы. Применение методики расчетов **собственных** колебаний для оценки **резонансных** форм с использованием свойств циклической симметрии, как впрочем, и расчет полной модели без учета указанных свойств в подобных ситуациях может оказаться некорректным.

В силу наличия возмущающих факторов (отклоняющийся от циклической симметрии характер распределения возбуждающих сил)

формы резонансных колебаний реальной системы могут существенно отличаться от форм собственных колебаний, которые в силу пусть даже очень слабых связей будут подчиняться периодическому характеру.

При расчете **собственных** колебаний с помощью полной модели, без учета свойств циклической симметрии роль возмущающего воздействия могут (и начинают!) играть погрешности построения сетки (если ее структура не подчиняется циклической симметрии), и погрешности вычислений. Поэтому формы **собственных** колебаний могут отличаться при расчете полной модели и при расчете с использованием свойств циклической симметрии. И если говорить именно о **собственных** колебаниях, то с точки зрения точности предпочтительнее использовать указанные свойства по причине стабилизирующего действия дополнительных граничных условий.

Теперь о случае с числом узловых диаметров, не кратным порядку циклической симметрии.



*Рис. 5.19. 5-я форма колебаний модельного диска при граничных условиях, соответствующих 14-ти узловым диаметрам, построенная с использованием свойств циклической симметрии (частота колебаний 6167 Гц)*

На рисунке 5.19 показана форма колебаний  $f_{0,5,14}$ , согласно введенной классификации в соответствии с диаграммой рис. 5.18. Установить принадлежность изображенной формы к аксиальным относительно оси диска или к крутильным колебаниям лопастей относительно их осей достаточно трудно, т.к. имеют место и тот и другой вид колебаний. Измельчение конечноэлементной сетки не вносит качественных изменений в полученную картину, следовательно, искажений, связанных с неточностью расчетов, в данном случае нет.

Причина такого поведения системы в том, что в связи с близостью собственных частот крутильной и изгибной форм лопасти характер их колебаний определяется примыкающей к лопасти небольшой зоной диска. Если, согласно граничным условиям, через эту зону проходит узловый диаметр, то провоцируются крутильные колебания лопасти, а если лопасть расположена вблизи пучности, то возникают изгибные колебания лопасти в аксиальном направлении. Кроме того, на каждом секторе диска между соседними узловыми диаметрами будет различное число лопастей, причем по-разному расположенных относительно узловых диаметров и пучностей. В зависимости от положения лопасти относительно узловых диаметров, она может совершать колебания принципиально различной формы.

Появление такой комбинации двух форм колебаний обусловлено слабой связанностью системы и делает общую форму колебаний принципиально не подчиняющейся циклическому характеру. Возможно, именно такой случай имел место при исследовании колебаний рабочего колеса компрессора в работе [190]. В таких ситуациях предпочтительнее расчет полной модели, без учета свойств циклической

симметрии, хотя расчет полной модели дает практически такие же результаты: отклонение по частоте менее 0.02% , а отличия форм колебаний оценить визуально очень сложно. Однако ключевым фактором в выборе методики расчета является связанность системы, а не кратность числа узловых диаметров порядку циклической симметрии. Анализ точности расчетов путем измельчения конечноэлементной сетки показал, что в этом случае, в отличие от систем с «сильной» связью, расчеты полной модели дают более точный результат.

Введение дополнительных связей (бандажные полки, демпферные проволоки) может исключить появление подобных комбинаций форм колебаний.

По результатам проведенных исследований можно сформулировать критерии корректности использования свойств циклической симметрии в динамических расчетах:

**1. Расчет собственных форм колебаний с учетом свойств циклической симметрии корректен и дает более точные результаты, чем расчет полной модели, за исключением случаев с числом узловых диаметров не кратным порядку симметрии в сочетании со слабой связанностью системы для этих форм.**

**2. При слабой связанности системы, о чем свидетельствуют почти горизонтальные участки частотных функций, формы резонансных колебаний могут существенно отличаться от форм собственных колебаний. Это необходимо учитывать при динамическом анализе не зависимо от того, каким способом производился расчет.**

Что касается расчета систем, незначительно отклоняющихся от циклической симметрии, то для каждого конкретного случая, вероятно, следует оценить погрешность, вызванную пренебрежением такими отклонениями, и преимущества от возможности учитывать мелкие детали, которую дает использование свойств циклической симметрии при наличии ограничений на вычислительные ресурсы. Поэтому ответ

на вопрос о корректности использования рассматриваемой методики в таких случаях неоднозначен.

В заключение хочется добавить, что анализ корректности применения свойств циклической симметрии при решении задач динамики был бы неполным без упоминания целого класса механизмов, только на первый взгляд соответствующих каноническому определению циклически симметричных систем [96]. При более глубоком анализе становится понятно, что, несмотря на полную циклическую симметрию кинематической схемы, а, следовательно, и инерционных параметров, на ряде режимов работы такие механизмы не являются циклически симметричными.

Одним из ярких примеров таких механизмов являются зубчатые планетарные передачи с горизонтальными осями вращения. Режимы работы, на которых циклическая симметрия их статического нагружения и динамической системы (симметрия возмущающих и диссипативных сил, жесткостная симметрия) нарушаются, – это режимы передачи малых крутящих моментов, когда передаваемые зубчатыми зацеплениями нагрузки сопоставимы с собственными весами зубчатых колес и элементов их «плавающих» подвесок. Очевидно, что при расчетах таких конструкций использование свойств циклической симметрии ограничено.

### **5.5. Выводы**

Использование собственных программ позволило автору применить и модифицировать собственные алгоритмы расчета, апробировать разработанные КЭ высшего порядка, показать их достоинства и объяснить причину отсутствия подобных элементов в библиотеках коммерческих продуктов. В процессе разработки и отладки собственных программ приобретен опыт оценки корректности получаемых ре-

зультатов и поиска возможных ошибок. Полученная таким образом практика численных исследований позволяет с большей уверенностью оценивать точность и достоверность получаемых результатов как при использовании своих, так и при использовании коммерческих программ.

В результате проведенных работ:

1 Выполнен обзор публикаций, посвященных исследованию колебаний лопаток, рабочих колес и применению МКЭ в динамических расчетах подобных систем.

2 Разработан и внедрен на производстве программный комплекс для расчета собственных колебаний рабочих колес турбоагрегатов.

3 На примере разработанного комплекса даны некоторые рекомендации по созданию отечественного узкоспециализированного импортозамещающего программного обеспечения.

4 Исследована корректность использования в расчетах свойств циклической симметрии. Сформулированы критерии корректности использования данных свойств.

5 Предложено учитывать связанность системы при оценке форм резонансных колебаний (справедливо не только для циклически симметричных систем).

6 Предложено оценивать степень связанности циклически симметричных систем по их частотным функциям.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные достижения и выводы по работе.

- 1 На основе комбинированного подхода предложена методика построения конечноэлементных моделей нового поколения для исследования динамики планетарных редукторов большой мощности. Методика апробирована при исследовании динамических свойств планетарного редуктора РП18 производства Калужского турбинного завода.
- 2 Предложены методики упрощенного моделирования дисковых муфт, валопроводов и роторов, позволяющие максимально упростить модель, при адекватном отражении ею основных динамических характеристик моделируемого объекта.
- 3 Исследованы динамические характеристики планетарного редуктора в составе ГТЗА. Даны рекомендации по снижению уровня вибрации ГТЗА.
- 4 На основе разработанной методики расчета собственных колебаний циклически симметричных вращающихся систем на базе КЭ высших порядков разработан программный комплекс.
- 5 Сформулированы критерии корректности использования свойств циклической симметрии, позволяющие более обоснованно подходить к вопросу использования указанных свойств в расчетах и оценке достоверности полученных форм резонансных колебаний.

На конкретных примерах расчетов ГТЗА и рабочих колес турбоагрегатов показаны методы исследования динамических характеристик и оценки корректности получаемых результатов.

### Основные положения, выносимые на защиту:

1. Методика конечноэлементного моделирования турбозубчатых агрегатов.
2. Методики моделирования элементов силовых судовых установок:



- методика моделирования рабочих колес турбоагрегатов;
  - методика моделирования роторов турбоагрегатов;
  - методика моделирования дисковых муфт;
  - комбинированный подход к конечноэлементному моделированию судовых планетарных редукторов.
3. Результаты исследований напряженно-деформированного состояния сателлитного узла с учетом контактного взаимодействия.
  4. Альтернативная (бесконтактная) модель сателлитного узла.
  5. Критерии корректности использования в расчетах свойств циклической симметрии.
  6. Результаты динамических исследований модели двухступенчатого планетарного редуктора РП18 в составе турбозубчатого агрегата.
  7. Рекомендации по улучшению конструкции редуктора РП18.

**Достоверность** полученных результатов, научных положений, выводов и рекомендаций обоснована:

- Строгим использованием классических положений механики и математического аппарата.
- Проверкой разработанного программного комплекса и построенных моделей на большом числе тестовых задач.
- Соответствием полученных результатов экспериментальным данным и результатам, полученным другими авторами.

**Научная новизна работы заключается в следующем: .**

- Предложен комбинированный подход к моделированию турбозубчатого агрегата, при котором часть конструкции моделируется методом конечных элементов, а часть на основе аналитических или эмпирических зависимостей.
- Результаты исследований ГТЗА также обладают признаками научной новизны. Получены ответы на вопросы о влиянии податливости отдельных элементов конструкции на динамику

системы. Вскрыто влияние податливости водила на формирование осевых колебаний в планетарных редукторах с шевронным зацеплением.

- Сформулированы критерии корректности использования свойств ЦС в расчетах форм резонансных колебаний.

#### **Практическая ценность работы.**

- Разработан специализированный программный комплекс. Данный комплекс при незначительной адаптации под конкретные производства вполне способен решить задачу импртозамещения программного обеспечения для решения частных задач динамики и прочности рабочих колес турбоагрегатов.
- Разработана нового поколения математическая модель планетарного редуктора. Это открывает новые возможности для исследования динамики турбозубчатых агрегатов. Модель позволяет исследовать влияние большинства конструктивных параметров на динамику системы и находить оптимальные решения.
- Сформулированы и подтверждены численными экспериментами рекомендации, направленные на снижение уровня вибрации (на 6-10 дБ) и уровня контактных напряжений в зацеплениях (на 5-8%) редуктора РП18 производства ОАО КТЗ.
- Реализация указанных предложений способствует повышению обороноспособности ВМФ. Данные рекомендации вошли в перечень правил конструирования малошумных редукторов для лодок 4-го поколения.

Кроме того, все разработанные методики, алгоритмы и программное обеспечение применимы не только к судовым и корабельным, но и к авиационным турбозубчатым агрегатам.

### **Внедрение.**

- Разработанный программный комплекс адаптированный для расчета рабочих колес турбин используется на Калужском турбинном заводе и Калужском моторостроительном заводе. Часть программных модулей передана в Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана на кафедры «САПР» и «Турбиностроения».
- Разработанная методика моделирования и построенная модель планетарного редуктора РП18 переданы на Калужский турбинный завод для дальнейших исследований.

## 7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абалаков Б.В., Банник В.П., Резников Б.И. Монтаж и наладка турбоагрегатов и вспомогательного оборудования машинного зала. – М.: Энергия, 1976.– 155 с.
2. Абрамов А.К., Державец Ю.А., Пыж О.А. Шевронны планетарный редуктор с двумя плавающими звеньями // Вестник машиностроения, 1961. – №4, с.3-8.
3. Айрапетов Э. Л. Динамическое нагружение многопарных передач зацеплением// Вестник машиностроения, 1991. – №8, с.18-21.
4. Айрапетов Э. Л. Исследование статики и динамики планетарных механизмов. – Автореф. докт .дисс. М.: ИМАШ, 1973.
5. Айрапетов Э. Л., Генкин М.Д. Динамика планетарных механизмов. М.: Наука, 1980, 256 с.
6. Айрапетов Э. Л., Генкин М.Д. Статика планетарных механизмов. М.: Наука, 1976, 263 с.
7. Айрапетов Э. Л., Косарев О.И. Влияние различных вынуждающих факторов на колебания косозубых передач с зубцовой частотой // Прогрессивные зубчатые передачи. Доклады международного симпозиума. Ижевск, 1994, с. 26 – 31.
8. Айрапетов Э. Л., Косарев О.И. Численное моделирование вибрационных процессов в косозубых передачах // «передачи и трансмиссии»,1996. – №1, с. 21-28.
9. Айрапетов Э. Л., Мирзаджанов Д.Б. Зубчатые соединительные муфты. – М.: Наука, 1991, 250 с.
10. Айронс Б. Задачи о собственных значениях матриц конструкций, исключение лишних переменных // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – Т.3. – № 5. – С. 207–209.
11. Альтнбах И. Влияние качества моделирования и типа конечных элементов на расчет собственных колебаний тонкостенных конструкций на

базе МКЭ // Динамика и прочность машин №51. – Харьков: изд-во «Основа» при Харьковском Ун-те, 1990. – С.19–28.

12. Аменадзе Ю.А. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1976. – 272с.

13. Анализ динамических характеристик валопровода турбоагрегата в эксплуатационных условиях / Куменко А.И., Некрасов А.Л., Калинин С.В., и др. // Вестник МЭИ, N 3, 1997. – С. 98-109.

14. Анализ напряженно-деформированного состояния в замках лопаток турбомашин с учетом сил трения / Воробьев Ю.С., Канило С.П., Романенко В.Н. и др. // Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования. – Харьков, 1997. – С. 497–500.

15. Ананьев И.В., Тимофеев П. Г. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование. – М.: Машиностроение, 1965. – 526с.

16. Аникин А.Ф., Петушков В.А. О комплексе программ “САПР-82” и вычислительных аспектах моделирования на ЭВМ пространственных процессов деформирования и разрушения конструкций при повышенных температурах // Проблемы прочности. – 1987. – №7. – С. 62–67.

17. Анри, Лаланнэ. Расчет вибраций вращающихся лопаток компрессоров // Конструирование и технология машиностроения. – 1974. – Т.96, №3. – С. 214–221. – (Тр. Амер. Об-ва инж. мех., сер.В).

18. Апархов В.И., Панченко В.И. особенности возбуждения вибраций от пересопряжения зубьев в планетарных передачах // Машиноведение №4,М., 1966, с. 46-54.

19. Апархов В.И., Федосеев Ю.Н. Исследование взаимосвязанности колебаний центрального колеса планетарного механизма. – Сб. «виброакустическая активность механизмов с зубчатыми передачами. М.: Наука, 1971, с. 86 – 92.

20. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. – М.: Стройиздат, 1968. – 241с.

21. Аргирис Дж., Шариф Д. Теория расчета пластин и оболочек с учетом деформации поперечного сдвига на основе метода конечных элементов // Аргирис Дж., Шариф Д. Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. – Л.: Судостроение, 1974. – Т. 1. – С. 179–210.
22. Аркадьев Д. А. Влияние конструктивных факторов на вибрационные характеристики и динамическую прочность лопаток паровых турбин с переменной скоростью вращения: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 1974. – 20с.
23. Аркадьев Д.А., Карпин Е.Б. Динамическая прочность облопачивания приводной турбины К6-30-П // Энергомашиностроение. – 1981. – №3. – С.10–12.
24. Аркадьев Д.А., Карпин Е.Б. Расчет частот аксиальных колебаний пакетов лопаток с узлами по бандажу // Энергомашиностроение. – 1978. – №3. – С.6–9.
25. Архангельский Л.А. Функциональная взаимозаменяемость и контроль эвольвентных зубчатых колес. – Докт. Дисс., М., ЦНИИТМАШ, 1969. – 251с.
26. Бабич Ю.Н., Цибенко А.С. Методы и алгоритмы автоматического формирования сетки конечных элементов. – Киев: ИПП АН УССР, 1978. – 93с.
27. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448с.
28. Бауэр В.О., Шорр Б.Ф. Влияние расстройки частот лопаток на резонансные частоты // Прочность и динамика авиационных двигателей. – М.: Машиностроение, 1971. – № 6. – С. 115 – 117.
29. Бедный И.А., Зинюков П.И., математическое моделирование вибраций в механизмах с зубчатыми передачами // прогрессивные зубчатые передачи. Доклады международного симпозиума. Ижевск, 1994, с. 48 – 51.

30. Бедчер Ф.С. Исследование вибрации компрессорных лопаток // Прочность и динамика Авиационных двигателей. – М.: Машиностроение, 1966. – вып. 4. – С. 132–143.
31. Березкин А.Ю. Некоторые методические вопросы виброисследования бандажированных лопаточных венцов // Березкин А.Ю., Сердотецкий А.С., Терехин И.В. Вибрация, прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов. – Куйбышев: КуАИ, 1980. – Вып. 7. – С. 19–24.
32. Бех М.Б., Воробьев Ю.С. Расчет колебаний облопаченных дисков турбомашин с учетом межлопаточных связей // Проблемы машиностроения. – 1976. – №2. – С. 55–59.
33. Биргер И.А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. – М.: Оборонгиз, 1956. – 159с.
34. Биргер И.А. Стержни, пластины, оболочки. – М.: Наука, 1992. – 390с.
35. Бицеко К.Б., Граммель Р. Техническая динамика. – Л.: Гостехиздат, 1950. – Т.1. – 900с.; 1952. – 1952. – Т.2. – 630с.
36. Блинник Б.С. Расчет собственных частот связанных колебаний лопаток с бандажными полками // Блинник Б.С., Ефремова В.Г., Шорр Б.Ф. Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1975. – Вып.16. – С. 240–260.
37. Богомолов С.И. Анализ спектра резонансных частот и форм облопаченных турбинных дисков // Изв. вузов. Машиностроение. – 1963. – №4. – С. 80–88.
38. Богомолов С.И., Журавлева А.М. Взаимосвязанные колебания в турбомашине и газотурбинных двигателях. – Харьков: Вища школа, 1972. – 176с.
39. Богомолов С.И., Журавлева А.М. Колебания сложных механических систем. – Харьков: Вища школа, 1978. – 136с.

40. Божедарник В.В., Сухин Г.Т. Элементы теории упругости. – Львов: Свет, 1994. – 560с.
41. Борискин О.Ф. Автоматизированные системы расчета колебаний методом конечных элементов. – Иркутск: Изд-во ИГУ. – 1984. – 188с.
42. Борискин О.Ф. Суперэлементный расчет циклически симметричных систем. – Калуга: Эйдос, 1999. – 230с.
43. Борискин О.Ф., Кулибаба В.В., Репецкий О.В. Конечноэлементный анализ колебаний машин. – Иркутск: Изд. Иркут. ун-та, 1989. – 144с.
44. Борискин О.Ф., Насонов Д.А. Математическое моделирование динамики и прочности // Наука и предпринимательство: сб. тр. междунар. симп. – Винница – Львов, 1998. – С. 200.
45. Борискин О.Ф., Насонов Д.А. Математическое моделирование динамики элементов турбомашин // Актуальные проблемы современного естествознания: сб. тез. 2-й междунар. Конф. “ИНТЕРНАС – 2000”. – Калуга, 2000. – С. 170–171.
46. Борискин О.Ф., Насонов Д.А. Математическое моделирование сложных механических систем с циклической поворотной симметрией // Математическое моделирование сложных технических систем: сборник статей МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 1998. – №572. – С. 3 – 10.
47. Борискин О.Ф., Насонов Д.А. Расчет колебаний лопаток и рабочих колес турбомашин с использованием свойств поворотной симметрии // Математическое моделирование сложных технических систем: труды МГТУ им. Н. Э. Баумана. – М., 1998. – №576. – С. 46–55.
48. Борискин О.Ф., Насонов Д.А. Смешанная аппроксимация перемещений в задачах механики твердого деформируемого тела // Информационные технологии в образовании: сб. тез. IX Междунар. Конф. «ИТО–99». – М.: МИФИ, 1999. – Часть 1. – С. 54–55.
49. Борискин О.Ф., Насонов Д.А., Лошкарев Д.Г. Математические конечноэлементные модели процессов деформирования деталей машин //



Устойчивость и пластичность в механике твердого деформируемого тела: сб. тез. IV междунар. научн. симп. – Тверь, 1998. – С. 43–44.

50. Борискин О.Ф., Насонов Д.А., Шатров Б.В. Современные проблемы автоматизации проектирования машиностроительных конструкций // Наука и предпринимательство: сб. тр. междунар. симп. – Винница – Львов, 1998. – С. 199.

51. Борискин О.Ф., Репецкий О.В. Применение метода конечных элементов для расчета колебаний лопаток компрессоров с антивибрационными полками // Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов. – Куйбышев: КуАИ, 1984. – С. 13–22.

52. Борискин О.Ф., Репецкий О.В., Маликов В.Ф. Анализ влияния упругости хвостовика на частоты собственных колебаний рабочих лопаток. – Иркутск, 1984. – 16с. – Рукопись представлена Иркутск. политехн. Ин-том. Деп. в ВИНТИ 28 сент. 1984, №6460–84.

53. Боришанский К.Н. Колебания рабочих лопаток турбины. Учебное пособие. – СПб: изд-во ПИМаш, 1995. – 116с.

54. Боришанский К.Н. Особенности регистрации колебаний лопаток турбомашин с постоянной частотой вращения дискретнофазовым методом (АО «Ленинградский металлический завод»). – Теплоэнергетика. – 2000. – №3. – С. 51–57

55. Боришанский К.Н. Учет особенностей колебаний лопаток турбомашин при проведении вибрационных испытаний и анализ их результатов // Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования: Тез. докл. Междунар. научн. техн. конф. – Харьков, 2000. – С. 171.

56. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Машиностроение, 1973. – 456с.

57. Будилов И.Н., Жернаков В.С. Напряженное состояние в зоне контакта замковых соединений авиационных двигателей // Механика дефор-

мируемых тел и конструкций: межвузовский научный сборник. – Уфа, уфимский гос. авиац. техн. ун-т, 1998. – С. 3–9.

58. Будыка И.Н. Расчет дисков паровых турбин. – М. – Л., Машгиз (Ленинградское отделение), 1962. – 255с.

59. Венху Х. Свободные и вынужденные колебания жестко связанных между собой лопастей турбомашин // Ракетная техника и космонавтика. – 1981. – Т.19. – №7. – С. 110 – 115.

60. Вейц В.Л., Кочура А.Е. Мартыненко А.М. Динамические расчеты приводов машин. Л.: Машиностроение, 1971. – 352с.

61. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: высшая школа, 2005. – 840с.

62. Виссер В. Применение криволинейного элемента смешанного типа для расчета оболочек // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. – Л.: Судостроение, 1974. – Т.1. – С. 230–254.

63. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320с.

64. Волков Д.П., Крайнев А.Ф. планетарные, волновые и комбинированные передачи строительных и дорожных машин. М.: Машиностроение, 1968. –271с.

65. Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т. Статика и динамика сложных структур. - М.: Машиностроение, 1983. – 248с.

66. Воробьев Ю.С. Влияние некоторых факторов на собственные колебания стержней // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1965. – Вып. 1. – С. 53–61.

67. Воробьев Ю.С. Колебания лопаточного аппарата турбомашин.– Киев: Наукова думка, 1988. – 224с.

68. Воробьев Ю.С. Проблемы численного анализа вибраций облопаченных роторов // Динамика роторных систем: междунар. конф. – Каменец–Подольский, 1996. – С. 89–91.

69. Воробьев Ю.С., Гошкодеря В.П. Влияние малых изменений сечений турбинных лопаток на спектр собственных частот // Сообщения Харьковского государственного политехнического университета. – 2000. – 89. – С. 151–154.
70. Воробьев В.С., Шорр Б.Ф. Теория закрученных стержней. – Киев: Наукова думка, 1983. – 188с.
71. Воробьев В.С., Шульженко Н.Г. Исследование колебаний систем элементов турбоагрегатов. – Киев: Наукова думка, 1978. – 135с.
72. Гайан Р. Приведение матрицы жесткости и массы // Ракетная техника и космонавтика. – 1979. – № 4. – С. 132-278.
73. Галлагер Р. Метод конечных элементов основы. – М.: Мир, 1984. – 432с.
74. Генкин М.Д. Сергеев В.И., Сухоруков Л.В. Расчетно-экспериментальное исследование динамики зубчатых редукторов с использованием вычислительных машин. – Сб. «виброакустическая активность механизмов с зубчатыми передачами». М.: Наука, 1971, с. 100 – 107.
75. Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н., Марченко Г.А. Приближенные модели замковых соединений лопаток турбомашин // Проблемы машиностроения. – 1978. – вып.6. – С.52–55.
76. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир 1965. – 456с.
77. Гринберг С.М. К вопросу об изгибно-крутильных колебаниях лопаток компрессоров // Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей. – Куйбышев: КуАИ, 1965. – Вып. 19. – С. 5–13.
78. Гринкевич В.К. колебания элементов планетарного ряда. – Сб. «Статика и динамика механизмов с зубчатыми передачами». М.: Наука, 1974, с. 102 – 113.
79. Даревский В.М. Основы теории оболочек: труды ЦИАМ № 1309. – 1998. – 196с.
80. Деклу Ж. Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1976. – 94с.

81. Динамика авиационных газотурбинных двигателей / В.О. Бауэр, И.А. Биргер, Р.И.Исаев и др. – М.: Машиностроение, 1981. – 232с.
82. Динамика лопаток газотурбинных двигателей при нестационарном обтекании / Вольмир А.С., Гуляев В.В., Михнев В.Ф. и др. // Механика полимеров. – 1978. – №2. – С. 257–264.
83. Додошанский В.К. Динамика и прочность судовых газотурбинных двигателей. – Л.: Судостроение, 1978. – 334с.
84. Додошанский В.К. Расчет колебаний упругих систем на электронно – вычислительных машинах. – М.: Машиностроение, 1965. – 367с.
85. Докаиниш М., Ротани С. Псевдостатические деформации и частоты вращающихся лопаток турбомашин // Ракетная техника и космонавтика. – 1972. – Т.10, №11. – С. 8–9.
86. Ермаков А.И. Исследование вибрационных характеристик рабочих колес авиационных ГТД: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Куйбышев, 1983. – 24с.
87. Ермекбаева Т.Ш. Динамика высоконапорных ступеней компрессоров: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 1981. – 22с.
88. Железко И.П., Фридман А.Д. Влияние центробежных сил на изгиб лопатки газотурбинных двигателей, находящихся под действием аэродинамических усилий // Динамика и прочность машин и конструкций: межвуз. сб. научн. тр. – Днепропетровск: ДГУ, 1988. – С.105–111.
89. Жирицкий Г.С., Стрункин В.А. Конструкция и расчёт на прочность деталей паровых и газовых турбин. – М.: Машиностроение, 1968. – 387 с.
90. Зейдельман Р.Л. Надежность лопаточного аппарата паровых турбин. – М.: Энергия, 1978. – 224с.
91. Зейтман М.Ф. Изгибные колебания гибких вертикальных роторов зонтичного типа в поле параллельных сил // Колебания и уравнивание роторов: сб. ст. АН СССР. – М.: Наука, 1973. – С. 5–15.

92. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541с.
93. Зиньковский А.П. Численное исследование взаимосвязанных колебаний расстроенного колеса компрессора турбомшины // Проблемы прочности. – 1997. – 118,№1. – С. 100–106.
94. Зуев Е.С., Насонов Д.А. Экспериментальное исследование влияния жесткости соединений элементов механических конструкций на ее частотные и демпфирующие свойства // Математическое моделирование сложных технических систем. Труды МГТУ. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – №602. – С. 16-21.
95. Иванов В.П. Некоторые вопросы колебаний лопаточных венцов и других упругих тел, обладающих циклической симметрией // Прочность и динамика авиационных двигателей. – М.: Машиностроение, 1971. - Вып. 6. - С. 113–131.
96. Иванов В.П. Колебания рабочих колес турбомашин. – М.: Машиностроение. – 1983. –224с.
97. Ильичев В.Ю. Исследование влияния конструкции соединительных муфт на динамику роторных систем турбоагрегатов Дисс. канд. техн. Наук, ??? 2002. ??с.
98. Ильичев В.Ю., Насонов Д.А. Экспериментально-аналитическое исследование и коррекция статических и динамических характеристик резинопальцевых муфт // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 3. Тула: Изд-воТулГУ, 2011. – с.46-53.
99. Ильичев В.Ю., Насонов Д.А., Выбор конструкции и оценка динамических характеристик соединительных муфт // Проблемы машиностроения и автоматизации. – М.: 2012, №2,с 39-42.
100. Исследование резонансных колебаний рабочего колеса компрессора с частотами, не кратными частоте вращения ротора / И.В. Егоров, А.Г. Заславский, В.А. Карасев и др. // Аэроупругость лопаток турбомашин: сб. тр. ЦИАМ. – М.: ЦИАМ, 1981. – №953. – С. 182–195.

101. Исследование совместных колебаний диска и лопаток с бандажированными полками / Ю.Н. Крысюк, И.Л. Меерсон, и др. // Динамика и прочность машин. – Харьков: Вища школа, 1976. – №24. – С. 42–46.
102. Карабан В.В. Разработка методов расчета собственных колебаний лопаток и рабочих колес турбомашин: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 1998. – 22с.
103. Кауфман М.С. Планетарные передачи с гибкими венцами // Вестник машиностроения. 1960, №9, с.35-36.
104. Кемпнер М.Л. Совместные колебания диска и бандажированных лопаток // Вопросы механики в применении к ж/д транспорту: труды МИИТА. – М., 1979. – Вып. 643. – С. 34–41.
105. Кемпнер М.Л., Ефремова В.Ф. Колебания бандажированных лопаток турбомашин // Вопросы прикладной механики на железнодорожном транспорте и строительстве: Труды МИИТА. – М., 1976. – Вып. 509. – С. 42–58.
106. Кислоцкий В.Н., Легостаев А.Д. Определение собственных частот и форм собственных колебаний лопастей гидронасосов и гидротурбин методом конечных элементов // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1976. – Вып. 23. – С. 110–117.
107. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. – Л.: ЛГУ, 1977. – 206с.
108. Коротенко Г.М., Коротенко Л.М. Алгоритм решения линейных алгебраических уравнений произвольного порядка // Колебания и динамические качества механических систем: сб. научн. Тр. АН УССР. – Киев: Наукова думка, 1983. – С. 20 – 25.
109. Коротенко Г.М., Коротенко Л.М. Способы графического отображения результатов решения задач динамики механических систем // Ракетная техника и космонавтика. – 1980. – 18, №12. – С. 136–141.

110. Косарев О.И. Определение динамической нагрузки на зубьях методом численного моделирования // Теория и практика зубчатых передач. Труды международной конференции. Ижевск, 1996, с. 153 – 158.
111. Костюк А.Г., Даскал Т.В. Расчет частотного спектра лопаточного венца с бандажными полками // Вибрация и шумы в устройствах электро-механики и энергетики: Труды МЭИ вып. 529. – М., 1981. – С. 60–70.
112. Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин: учебник для студентов вузов по специальности «турбостроение» . – М.: Машиностроение, 1982. – 264с.
113. Кудрявцев В.Н. Планетарные передачи. Л.: Машиностроение, 1966. – 306с.
114. Кузнецов Н.Д. Прочность деталей турбомашин ГТД в условиях сложного нагружения и связанные с ней проблемы // Проблемы прочности. – 1982. – №3. – С. 10-14.
115. Куменко А.И. Влияние эксплуатационных факторов на статические и динамические характеристики валопроводов мощных паровых турбин // Вестник МЭИ. – N 3. –1994. – с. 63-69.
116. Куменко А.И. Применение метода конечных суперэлементов для исследования динамики роторов // Тез. респ. науч.-техн. конф. ч. II. – Змиев, 1991. – С. 53.
117. Куменко А.И. Совершенствование расчетно-экспериментальных методов исследования динамических характеристик турбоагрегатов и их элементов: Дис. докт. техн. наук. – М.: МЭИ, 1999. – 508с.
118. Куменко А.И., Морозова Д.С., Карев А.В. Применение математического моделирования в задачах динамики системы “турбоагрегат-фундамент-основание”. Вестник МЭИ, N 1, 1994. – С. 65-73.
119. Левин А.В., Боришанский К.Н., Консон Е.Д. Прочность и вибрация лопаток и дисков паровых турбин. – Л.: Машиностроение, 1981. – 710с.

120. Леонтьев М.Ю. Исследование статической нагруженности мощных судовых планетарных редукторов: Дис. ... канд. техн. наук. – М.: ИМАШ РАН, 2001. – 230с.

121. Леонтьев М.Ю., Насонов Д.А., Бедный И.А. Математическая модель для уточненного определения комплексных погрешностей сателлитных узлов планетарных передач // Проблемы машиностроения надежности машин. – М: 2012. – №3, – С. 27-31.

122. Листвинская Л.Х. Расчет вибрационных характеристик пакетов предварительно закрученных лопаток // Проблемы прочности. – 1975. – №11. – С. 7–12.

123. Листвинская Л.Х. Расчет изгибно-крутильных колебаний длинных лопаток: труды ЦКТИ вып. 80, 1967. – С. 34–41.

124. Лосев С.М. Паровые турбины. – М.: Госэнергоиздат, 1954. – 314 с.

125. Лукин Б.С. Исследование колебаний рабочих колес турбин и компрессоров методом конечных элементов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Харьков., 1975. – 30с.

126. Лукин Б.С. Об исследовании колебаний циклически симметричных конструкций методом конечных элементов // Динамика и прочность машин. – Харьков: Вища школа, 1980. №31. – С. 12–21.

127. Луценко С.С. Разработка методики исследования собственных колебаний рабочих лопаток турбомашин на основе теории оболочек средней толщины: Дис. ... канд. техн. наук. – Харьков, 1982. – 177с.

128. Лысенков В.С., Борискин О.Ф., Леонтьев М.Ю. Компьютерное моделирование деформативности элементов конструкции планетарного редуктора // Прогрессивные технологии, конструкции и системы в прибор- и машиностроении: Материалы региональной научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, т1 – М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2005. – С. 73-75.

129. Лысенков В.С., Леонтьев М.Ю. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния сателлитного узла



планетарного редуктора: Материалы V научно-технической конференции «Взгляд в будущее». – СПб.: ФГУП «ЦКБ МТ «Рубин», 2007. – С. 268-282.

130. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 674с.

131. Макридин И.П., Хохлов О.А. Исследование зубчатых муфт. – В кн. Исследование узлов и деталей ПТМ. – М.: Наука, 1961, вып. 4(15), с.33–57.

132. Медведев Д.В., Петров Е.П., Степченко. Анализ точности метода динамической конденсации при моделировании дисков турбомашин осесимметричными трехмерными конечными элементами // Вестн. Харьков. Политехн. Ун-та. – 1999. – №53. – С. 86–97.

133. Меерович И.И. Распределение напряжений в компрессорных лопатках при колебаниях. – М.: Оборонгиз, 1961. – 107с.

134. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В. и др. – Киев: Выща школа, 1982. – 480с.

135. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений / В.А. Постнов, С.А.Дмитриев, Б.К. Елтышов и др. – Л.: Судостроение, 1979. 287с.

136. Митчел Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1981. – 216с.

137. Морозов Б.А. Компенсирующие свойства соединительных муфт. – В кн.: Прокатные станы. – М.: Машгиз, 1956, вып. 6, с. 124–173.

138. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука. – 1980. – 254с.

139. Насонов Д.А. Комбинированный подход к моделированию динамики зубчатых передач // Известия ТулГУ. Технические науки. – Тула: ТулГУ, 2011. – Вып. 5, часть 3. – с. 53-58.

140. Насонов Д.А. Моделирование собственных колебаний циклически симметричных систем на базе конечных элементов со смешанной аппрок-

симацией перемещений полиномами высших порядков: Дис. ... канд. техн. наук. – М.: МЭИ, 2001. – 195с.

141. Насонов Д.А. Повышение достоверности определения погрешностей изготовления водила планетарного редуктора по результатам косвенных измерений // Проблемы машиностроения и автоматизации. – М.: 2011. – №4. – С 122-126.

142. Насонов Д.А., Белов А.А., Насонова А.Д. Учет геометрической нелинейности при статическом нагружении механических конструкций // Методы исследования и проектирования сложных технических систем / Труды МГТУ. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – т.1. – с.109-118.

143. Насонов Д.А., Леонтьев М.Ю. К вопросу об определении погрешностей изготовления водила планетарного редуктора по результатам косвенных измерений // Известия ТулГУ. Технические науки. – Тула ТулГУ, 2012. – Вып. 8. – С. 21-29.

144. Насонов Д.А., Леонтьев М.Ю. Об алгоритме численного решения одной из некорректно заданных задач, представляющей практический интерес // Актуальные вопросы современной науки и образования / V Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием. – Красноярск, 2010. – вып.2. – С. 280-286.

145. Насонов Д.А., Леонтьев М.Ю. Особенности расчета динамических характеристик циклически симметричных систем // Проблемы машиностроения и автоматизации. – М.: 2010. – №3. – С. 64-66.

146. Невечеренко Е.Г. Особенности колебаний лопаточного венца осевого компрессора // Колебания и прочность деталей двигателей летательных аппаратов : тр. Московского Авиационного Ин-та им. С. Ордженикидзе. – 1972. – № 245. – С. 91–99.

147. Новичков А.А. Определение параметров кромочного удара в зубчатом зацеплении в зависимости от точностных, геометрических и энергетических характеристик // Техническая акустика. Изв. Восточно-

европейской ассоциации акустиков. Т.3. Вып. 1-2 (7-8)., СПб., 1994, с. 36 – 42.

148. Нори Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304с.

149. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.

150. Онищенко Г.Д. Расчетно-экспериментальное исследование инерционно-жесткостных характеристик турбомашин // Динамика гибких роторов: сб. научн. ст. АН СССР. – М.: Наука, 1972. – С.103–111.

151. Орлов В.В. Разработка и реализация метода расчета вынужденных колебаний венцов рабочих лопаток турбомашин: Дис. ... канд. техн. наук. М., 1985. – 210с.

152. Основные теоретические принципы построения комплекса программ «Система – 4» по расчету на прочность конструкций летательных аппаратов / А.Б. Кудряшов, Т.Б. Снисаренко, В.Д. Чубань, и др. // Труды ЦАГИ. – 1981. – Вып. 2099. – С. 1–58.

153. Особенности колебания бандажированных лопаток мощных паровых турбин / К.Н. Боришанский, В.А. Дудников, А.Ю.Кондаков и др. // Теплоэнергетика. – 1997. – №7. – С. 21–25.

154. Остробоков С.А. Влияние толщины полотна диска с лопатками на его собственные частоты колебаний // Колебания и прочность деталей двигателей летательных аппаратов: тр. Московского Авиационного Ин-та им. С. Ордженикидзе. – 1972. – № 245. – С. 77–90.

155. Паллей З.С. Конструкция и прочность авиационных газотурбинных двигателей. – М.: Транспорт. – 1967. – 426с.

156. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Мир, 1983. – 384с.

157. Паровые и газовые турбины: Учебник для вузов / М.А. Трубилов, Г.В. Арсеньев, В.В. Фролов и др.; под ред. А.Г. Костюка, В.В. Фролова. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 352с.

158. Паровые турбины малой мощности КТЗ / В.И. Кирюхин, Н.М. Тараненко, Е.П. Огурцова и др. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 216 с.
159. Писанецки С. Технология разрезанных матриц. – М.: Мир, 1988. – 410с.
160. Писцов Н.В, Вассерман И.Н. Алгоритм определения частот и форм собственных колебаний конструкций для БЭСМ-6 // Динамика и прочность механических систем: межвуз. сб. научн. тр. – Пермь: Пермский политехнический ин-т, 1988. – С. 132–138.
161. Планетарные передачи. Справочник. Под ред. В.Н. Кудрявцева, Ю.Н. Кудряшева. – Л.: Машиностроение, 1977. – 536с.
162. Победря Б.Е., Георгиевский Д. В. Лекции по теории упругости. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 208с.
163. Попов А.П. Зубчатые муфты в судовых агрегатах. – Л.: Судостроение, 1985. – 233с.
164. Применение системы «МАРС» в проектировочных расчетах авиационных конструкций / А.Б. Кудряшов, Е.К. Липин, А.Н. Шаныгин и др. // Ученые записки ЦАГИ. – 1988. – Т.ХІХ,№4. – С. 71-80.
165. Прочность паровых турбин. / Л.А. Шубенко-Шубин, Д.М. Тернер, Н.Я. Зельдес и др. Под ред. Л.А Шубенко-Шубина. – М.: Машиностроение, 1973. – 456с.
166. Прочность. Устойчивость. Колебания. : Справочник в 3 т. / под общ. Ред. И.А. Биргера и Я.П. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 3: Колебания. – 567с.
167. Прочность, устойчивость и колебания термонапряженных оболочечных конструкций / В.Ф. Грибанов, И.А. Крохин, Н.Г. Паничкин и др. – М.: Машиностроение, 1990. – 368с.
168. Прусс Л.В. Исследование подвижности планетарных механизмов с двумя плавающими элементами // Труды МВТУ № 139: Машиностроение, 1970. – с.459 – 462.

169. Расчет машиностроительных конструкций на прочность / Шапошников Н.Н., Тарабасов Н.Д., Петров В.Б. и др. – М.: Машиностроение, 1981. – 333 с.
170. Расчет на прочность авиационных газотурбинных двигателей / И.А. Биргер, В.М. Даревский, И.В. Демьянушко и др. – М.: Машиностроение, 1984. – 208с.
171. Репецкий О.В. Исследование колебаний элементов рабочих колес турбомашин с использованием конечноэлементных аппроксимаций // Науч.-техн. сб. / ИВВАИУ. – Иркутск, 1984. – Вып. 6, С. 104–108.
172. Репецкий О.В. Конечноэлементные аппроксимации в динамике лопаточных венцов // Всесоюзн. конф. по теории упругости. – Тбилиси, 1984. – С. 240–241.
173. Репецкий О.В. Колебания рабочих колес турбомашин // Актуальные вопросы эксплуатации авиационной техники: Тез. докл. юбилейной науч.-техн. конф. / ИАВАИУ. – Иркутск, 1985. – С. 46 – 54.
174. Репецкий О.В. Управление спектрами колебаний деталей и механических систем турбомашин // Динамика виброактивных систем и конструкций: сб. научных трудов. – Иркутск: ИПИ, 1988. – С. 122-126.
175. Решетов Л.Н. Самоустанавливающиеся механизмы / Справочник. – М: Машиностроение, 1979. – 334с.
176. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977. – 129с.
177. Руденко Н.Ф. Планетарные передачи. – М.: Машгиз 1947. – 756с.
178. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392с.
179. Седов В.Л., Селивановский Ю.М. Снижение вибрации редуктора за счет повышения точности изготовления. – Сб. «виброакустическая активность механизмов с зубчатыми передачами». М.: Наука, 1971, с. 98 – 100.

180. Синицин А.П. Метод конечных элементов в динамике сооружений. – М.: Стройиздат, 1978. – 231с.
181. Слива О.К., Ковадло А.А. Влияние конструктивных факторов на вибронпряженность лопаток радиально-осевых турбин // Тр. II республ. научно-техн. семинара АН УССР. – Киев: Наукова думка, 1980. – С. 61–69.
182. Смешанная аппроксимация перемещений в динамике и прочности механических конструкций / О.Ф. Борискин, Д.Г. Лошкарев и др. // Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: сб. тез. XVII междунар. конф. – СПб, 1999. – С. 38–39.
183. Сринивасан А.В. Вибрация лопаточных дисков // Конструирование и технологии машиностроения: обзор основных работ. – 1984. – Т.106, №2. – С. 1–5. – (Тр. Амер. общ. инж.-мех. Сер.В).
184. Сринивасан А.В., Катто. Измерение относительного виброперемещения стыков нижнего обода скрепного банджа вентилятора // Конструирование и технологии машиностроения. – 1984. – Т. 106, №2. – С. 22–31. – (Тр. амер. общ. инж. мех. Сер.В).
185. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 454с.
186. Стрент Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. – 352с.
187. Ступина Н.Н., Шорр Б.Ф. Расчет спектра частот и форм колебаний вращающегося диска с закрученными лопатками, связанными антивибрационными полками // Проблемы прочности. – 1978. – №12. – С. 102–106.
188. Суперэлементный расчет подкрепленных оболочек / З.И. Бурман, О.М. Аксенов, В.И. Лукашенко и др. – М.: Машиностроение, 1982. – 256с.
189. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512с.

190. Темис Ю.М., Карабан В.В. Анализ собственных частот и форм колебаний колеса компрессора ГТД // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Межвузовский сб. – М., 1998. – Вып.58. – С. 36–46.
191. Темис Ю.М. Карабан В.В. Влияние конструктивных факторов и центробежных нагрузок на формы и частоты колебаний лопаток компрессоров // Труды XVII междунар. Конф. по теории оболочек и пластин. – Казань, 1996. – Т.2. – С. 54–60.
192. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: наука, 1967. – 444с.
193. Ткаченко В.А. проектирование многосателлитных планетарных передач. – Харьков, 1961. – 182с.
194. Урьев Е.В. Вибрационная надежность паровых турбин и методы ее повышения: Дис. ... канд. техн. наук. – М., 1997. –175с.
195. Фельдман Е.Л. исследование распределения нагрузок в планетарном редукторе с сателлитами на сферических опорах применительно к условиям тяжелого машиностроения. – Автореф. Канд. Дисс. М., ВНИИМАШ, 1970.
196. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 520с.
197. Филипов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736с.
198. Фридман Л.П. Поперечные колебания круглых пластин с учетом инерции вращения и деформации сдвига // Проектирование и доводка авиационных ГТД. – Куйбышев: КуАИ, 1974. – С. 140–149.
199. Хазанов Х.С., Савельев Л.М. Метод конечных элементов в приложении к задачам строительной механики. – Куйбышев, 1976. – Т.2. – 73с.
200. Хейгман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы: пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 448с.

201. Хижа И.Ю. Исследование колебаний и нагруженности стержневых систем методом конечных элементов // Ракетная техника и космонавтика. – 1980. – Т.18. – №12. – С. 35–39.
202. Хронин Д.В. Совместные колебания дисков, валов и лопаток турбокомпрессорных машин и критические числа оборотов // изв. вузов Авиац. техника. – 1958. № 1. – С. 171–178.
203. Хрущ И.К. Исследование чувствительности собственных частот и форм колебаний к изменению инерционно-жесткостных параметров конструкции // Колебания сложных механических систем : сб. научн. Тр. АН УССР. – Киев: Наукова думка, 1990. – С. 30–35.
204. Хуан Венху. Свободные и вынужденные колебания жестко связанных между собой лопастей турбомашин // Ракетная техника и космонавтика. – 1981. – Т.19. – №7. – С. 110–115.
205. Шабров Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. – М.: Машиностроение, 1968. – 216с.
206. Шакур С. Программа «DANUTA» для расчета турбомашин на основе трехмерных элементов // Конструирование и технологии машиностроения. – 1972. – Т.94, №1. – С. 81–88. – (Тр. Амер.общ.инж.–мех. Сер. Д).
207. Шолуха А.Г. О неравномерности распределения нагрузок по сателлитам планетарных механизмов. Канд. дисс. Л., 1963.
208. Шорр Б.Ф. Изгибно–крутильные колебания закрученных компрессорных лопаток // Прочность и динамика авиационных двигателей. – М.: Машиностроение, 1964. – Вып. 1. – С. 217–246.
209. Шорр Б.Ф. Расчет на колебания шарнирных лопаток // Прочность и динамика авиационных двигателей. – М.: Машиностроение, 1965. – С. 292–315.
210. Эйделмен Г., Котеринес Д., Уолтон Дж. Точность вычисления напряжений методом конечных элементов // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – Т.8. – № 3. – С. 102-109.



211. Эльштейн Л.Б. Конструкция и расчет шлицевых муфт для передачи мощности в авиадвигателях в условиях перекоса осей соединяемых агрегатов // Труды Института им. П.Н. Баранова, №206. Оборонгиз, 1952.
212. Ямпольский И.Д. и др. Опыт использования податливых осей для выравнивания нагрузок между сателлитами передачи 2К-Н // Создание прогрессивных технологий, конструкций и систем. Тезисы докладов Российской научно-технической конференции Калуга, 1996. – с. 156.
213. Ямпольский И.Д. и др. Опыт снижения неравномерности нагружения сателлитов 2К-Н на режимах малых нагружений // теория и практика зубчатых передач. Труды международной конференции. Ижевск, 1996. – с. 147 – 152.
214. Ямпольский И.Д., Ильичев В.Ю. Влияние конструкции соединительных муфт на динамику роторных систем. // Математическое моделирование сложных технических систем: Труды МГТУ. – М.: МГТУ, 2001. – № 581. – С. 187-201.
215. Ямпольский И.Д., Ильичёв В.Ю. Исследование сил в соединении упругопластинчатой муфты при расцентровке осей валов // Труды МГТУ. – 2000. – № 578. – С. 145–161.
216. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements // Int/ J. Numer. Meths. Eng. – 1971. – V.3, №2. – P. 14–21.
217. Analyse des vibrations de metod / Lalanne M., Trompette Ph., Henry R. ets. // Stresses, Vibrations, Structural Integretion and Engine Integrity (Including Aeroplasticity and Flutter): AGARD conference rproceedings № 248, 1978. – P. 1–13.
218. ANSYS. Structural Nonlineaitics. User's Guide for Revision 5.0. – V.1. – SASY, Hauston, 1994. – DNOS201:50–1.
219. Armstrong E.K. Christie P.J., Hagua W. Natural frequencies of bladed disc // Proc.J.Mech.E. – 1966. – V.180, N31. – P. 110–123.

220. Azar R.C., Crossly F.R.E. En Experimental Investigation of Impact Phenomenon in Spur Gear System // Proc. Fourth World Congress of Theory of Machines and Mechanism. Newcastle, UK, 1975. – p.157 – 161.
221. Bladh R., Costanier M.P., Pierre C. Reduced order modeling and vibrations analysis of mistuned bladed disk assemblies with shrouds // Trans. ASME. J. Eng. Gas Turbines and Power. – 1999. – 121, №3. – P. 515–522.
222. Bossak M.A., Zienkiewicz O.C. Free vibration of initially stressed solids with particular reference to centrifugal-force effects in rotating machinery // J. Of Strain Analysis. – 1973. – V.8. – P. 245–252.
223. Bialawa P.L. An analitic study of energi dissipation of turbomaschinery bladed – Disc assemblies due to interschroud segment rubbing // Trans. of the ASME. J. of mechanical design. – 1978. – V.100, april. – P. 222–226.
224. Burdness J.S., Pennell J.A., Rosinski J. Development of a new three-dimensional dynamic model of helical gears // Proc. Int. Conf. On Gearing and Power Transmissions, Newcastle, UK, 1994. – p.517 – 524.
225. Calculation of energy dispersion in cycle loaded turbomachines blades locks / Romanenko L.G., Vorobyov Yu.S., Romanenko V.N., Shepel A.I. // Proc Int. Conf. "Rotor Systems Dynamics".- Kamenetz-Podolsky, 1998. – P. 137–140.
226. Campbell W. The protaction of steam turbine disc wuls from axial vibrations // Trans. of the ASME. – 1924. – V. 46. – P. 31–160.
227. Cha D., Sinha A. Statistics of response of a mistuned bladed disk assembly subjected to white nois and narrow band excitation // Trans. ASME. J. Eng. Gas Turbines and Power. – 1999. – 121, №4. – P. 710–717.
228. Chen T.C., Wang B.P., Chen T.Y. Design optimization of gasturbine blades with geometry and natural frequency constraints // Computers and structures. – 1989. – V. 32, №1. – P. 113–117.
229. Cottney D.J., Ewins D.J. Towards the efficient vibration analysis of Shrouded Bladed disk assemblies // ASME Paper. – 1973. – №73 DEC – 144. – 16p.

230. Courent R. Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibration // *Bul. Amer. Math. Soc.* – 1943. – V. 96. – P. 1054–1059.
231. Elchuri V., Gallo A.M., Skalski S.C. Forced vibration analysis of rotating cyclic structures in NASTRAN // *NASA Contractor Report.* – 1983. – CR 165429. – 174p.
232. Elchuri V., Smith G.C.C., Gallo A.M. NASTRAN Forced vibration stress of rotating cyclic structures // *J. of vibration stress and reability in design.* – 1983. – №83. – P. 1–11.
233. Ewins D.J. Bladed discs vibration // *A review of techiques and characteristics. Proc. Int. Conf. On Recent Advances in Structural Dynamics. Southampton.* – 1980. V.1. – P. 187–210.
234. Ewins D.J., Imregun M. Vibration modes of packeted bladed discs // *Vibration of Bladed Discs Assemblies (9-th Bienial Conf. On Mechanical Vibration and Noist-Dearborn. 11–14 Sep., 1983).* – Michigan, 1983. – P. 231–234.
235. Grammel R. Drillungs und dehnungs schwingen von schein // *Zeitschrift für angew. – Math. und Mech.* – 1925. – №5. – S. 192–200
236. Henry R. Contribution a l’etude dynamique des machines tournautes: Dis. ... Dr. Ing. – Unuversite Claude Bernard. – Lyon, 1981. – 156p.
237. Henry R., Lalanne M. Vibration a1nalysis of rotating compressor blades. *Jornalof Engenering for Indastry, August 1974.*
238. Hofmeister L.D., Evenson D.A. Vibration problems using isoparametric shell elements // *Int. J. for Num. Mech. in Eng., 1972.* – V. 5. – P. 142–145.
239. Hohlrieder M. Zur statischen und dynamischen Analyse rotierender elastischen (Turbinenschaufelen, Verdichter) bei transienten Betriebsbedingungen: Dis. ... Dr. Ing. – Kassel, 1994. – 202s.
240. Humilton E.B., Alan L. Methods and apparatus for analysing variations in rotary moution: G01b7/14/ №9609677.1

241. Irretier H. Berechnung der Schwingungen rotierender beschauelter Scheiben mittels eines anfangswertverfahrens: Dis. ... Dr. Ing. – Hannover, 1978. – 129s.
242. Irretier H., Hohlrieder M. Transiente Schwingungen von Turbinenschaufeln, DFG-Abschlußbericht, Institut für Mechanik, Universität Gh Kassel, 1991. – 184s.
243. Janecki S., Krawczuk M. Dynamics of Steam Turbine Rotor Blading. – Gdansk, 1998. – 382p.
244. Kirchberger G., Paulum J.-H. Berechnug von Eigenfrequenzen der Schaufel-pakete in Dampf-und Gasturbinen insbesondere bei verjüngten Schaufeln // Konstruktion. – 1958. – Bd.10, №2. – S. 41–50.
245. Kirkhope J., Wilson G.P. A finite element analysis for the vibration modes of a bladed disc // J. of sound and vibration. – 1976. – V.49, №4. – P. 469–482.
246. Kirkhope J., Wilson G.P. Analysis of coupled bladed disk vibration in axial flow turbine and fan // Structures , Struct. Dyn. Mater.: Proc. 12th AIAA/ASME Conf. – ASME paper N 71–375. – 1971. – P. 1–11.
247. Leissa A.W. Vibrations aspect of rotation turbomashinary blades // Applied Mechanics Reviews. – 1981. – V.34, №5. – P. 629-635.
248. Leissa A.W. Vibration of turbine engine Blades by Shells analysis // J. Shock and Vibration Digest. – 1980. – V.12, №5. – P. 153–162.
249. Mac Neal R.H. A simple quadrilateral shell element // Computers and structures. – 1978. – V.8, №2. – P. 175–183.
250. Macbain J.C., Genin J. Effect of support flexibility on the fundamental frequency of vibrating beams // J. of Franclin Institute. – 1973. – V. 296, №4. – P. 259–273.
251. Maillardet P., Hoffman D.A., Norman M.E. A new tool for designing quit, low vibration main propulsion gears. Paper 20, INEC 96, Warship design: what to do? Newcastle, UK, 1996.

252. Mark W.D. Use of the generalized transmission error in the equations of motion of gear system. ASME Trans.1. Mech. Trans Auto.in Des. 1987. – 109, p.283.
253. Mazurkiwicz M. Obliczenia przemieszczeń, częstotliwości i postaci drgań własnych łopatek maszyn wirnikowych metoda elementów skończonych // Archiwum budowy maszyn. – 1980. – V.27, N4. – P. 427–447.
254. Modal testing of rotating machinery while it is operating / Marscher William D. // J. Sound and Vibration. – 1999.- 33 № 11. – P. 29 – 32.
255. Modeling interfacial condition in normally flat contacts for application to fretting fatigue of turbine engine components / McVeigh P.A., Harish G., Farris T.N., Szolwiski M.P. // Int. J. Fatigue. – 1999. – 21, Suppl. – P. 157–165.
256. Olson M.D., Lindberg G.M. Dynamic analysis of shallow shell with a double-curved triangular finite element // J. Sound and Vibration. – 1971. – V. 19, №3. – P. 299–318.
257. Olson M.D., Lindberg G.M. Vibration analysis of cantilevered curved plates using a new cylindrical shell finite element // 2nd Conf. on Mech. Meth. in Struct. Mech. Wright- Patterson A.F. Base. – Ohio, 1968. – P. 247–270.
258. Parisch H. A critical survey the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration // Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. – 1979. – V. 20. P. 323–350.
259. Ramamurti V., Kielb K. Natural frequencies of twisted rotating plates // J. Sound and Vibration. – 1984. – V.94, №3. – P. 429–449.
260. Rao J.S. Turbomaschine blade vibration // 5th world Congr. Theor. Mach. and Mech. – 1979. V.1. – P. 637–640.
261. Resonance characteristics of turbine blades with compound periodic structure / Saito Eiji, Namura Kiyoshi, Okabe Akira // JSME Int. J.B. –1998. – 41, №3. – P. 727–733.
262. Riehm S. Schwingungen freistehender ND-Endschaufeln einer Kondensationsturbine im Ventilationsbetrieb: Dis. ... Dr. Ing. – Stuttgart, UNI, 1997. – 119s.

263. Riger N.F. Finite element analysis of turbomachine blade problems // Finite Element Applications in vibration Problems: The Design. Engineering Technical Conf. Chicago, Illinois. 26–28 Sep. – 1977. – P. 143–254.
264. Rzadkowski R. Free Vibration of Tuned and Mistuned Bladed Disc: Report № 306/1252/90, Polish Academy of Science. – Gdansk, Poland, 1990. – P. 42–49.
265. Sagendorph F.E. Natural frequencies of mid-span shrouded fan blades // Struct. din. asp. of bladed disc assemblies: publ. ASME. – New-York. – 1976. – P. 93–99.
266. Salame A.M. Finite element dynamic analysis of blade packets and bladed disc assemblies: Ph. D. Thesis. University of Southampton. – 1977. – 184p.
267. Salame A.M., Petyt M. Dynamic response of packets of blades by the finite element method // ASME Paper 77-DET-70. – 1977. – 17p.
268. Schaufelschwingunge erfassen // BWK: Brenst. – Warme-Kraft. – 2000. – 52, №1–2. S.56.
269. Seager D.L. Condition for neutralization of excitation by the teeth in epicyclical gearing. Journal Mechanical Engineering Science, Mech, E. 1975. – Vol 17 №5 p.293 – 298.
270. SOLVIA SYSTEM 87: User Manual, Solvia Engineering AB, Scweden. – 1987. – 146p.
271. Srinivasan A.V., McFarland D.M. Characterization of laws of friction in the context of engine blade dynamics // Trans. ASME. J. Eng. Gas Turbines and Power. – 1998. – 120, №4. – P. 759–765.
272. Stodola A. Über die schwingungen am dampfturbinen laufrädern. Schwiezervische Bauzeitg. – 1914. – №63. – S. 251–255 und 271–275.
273. Stoekicht W.G. Journal of the American Society of Naval Engineering 1948, vol. 60.
274. Surena K.S. Transition finite element for axisymmetric stress analysis // Int. J. for Num. Math. in Eng. – 1980. – V.15. – P. 809–832.

275. Surena K.S. Transition finite element for three dimensional stress analysis // *Int. J. for Num. Math. in Eng.* – 1980. – V. 15. – P. 991–1020.
276. Thompson S. J., Haigh J., Hofmann D.A., Rosinski J., Pennell J.A. A four megawatt test rig for gear noise and vibration research // *Proc. Int. Conf. on Gearing and Power Transmissions*, Newcastle, UK, 1994. – p.445 – 451.
277. Tong J., Wang K.W. Vibration control of rotationally periodic structures using passive piezoelectric shunt networks and active compensation // *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust.* – 1999. – 121, №3. – P. 379–390.
278. Trompette Ph., Lalanne M. Vibration analysis of rotating turbine blades. –A.S.M.E. Paper 74, WADE 23.
279. Turcotte J.F., Hollkamp J.J., Gordon R.W. Vibration of a mistuned bladed-disk assembly using structurally damped beams // *J. AIAA*, 1998. – Vol.36, №12. – P. 2225–2228.
280. Umemura S., Mase M., Kadoja Y. Vibration analysis of grouped blades of turbines by the finite element method // *Mitsubishi heavy Industries technical review.* – 1979. – V.16. – P. 85–91.
281. Vibration stress localization in turbomachine blades due to their complex geometry and effect of damage / Vorobiev Yu.S., Kanilo S.P., Nikoulina E.I. ets. // *Proc 1997 ASME ASIA Conf. And Exib. Techn. Paper ASME 97-AA-020*, Singapore ASME, New York, USA. – P. 369–374.
282. Vorobjov Yu.S. Complex of methods and programs for static and vibrational calculations of turbomachine blading // *U.S. – Ukrainian Energy Trade and Investment Conf.* – Kharkov, 1999. – P. 315.
283. Vorobjov Yu.S., Kanilo S.P., Nikoulina E.I. Numerical investigation of blade packet vibrations // *Proc 1997 ASME ASIA Conf. And Exib. Techn. Paper ASME 97-AA-020*, Singapore ASME, New York, USA – 6p.
284. Vorobjov Yu.S., Kanilo S.P. Sharing 3D finite element and beam model for turbomachine blades dynamic analysis // *Multiple Scale Analysis and*

Coupled Physical Systems. Sent-Venant Symposium. – Paris, 1997. – P. 469–473.

285. Vorobjov Yu.S., Korsunsky M.L. The modify variational method of calculation of turbomachines blading vibrations // Proc. Int. Conf. Computational Eng. Sc. – 1995. – P. 1614–1618.

286. Walker K.P. Vibrations of cambered helicoidal fan blades // J. Sound and Vibration. – 1978. – V. 59. – P. 35–57.

287. Wolter I. Experimentelle Untersuchungen des Schwingungsverhaltens von Turbinen-Laufdchaufeln unter realen Betriebsbedingungen mit und ohne Kopplung durch eingelegten Dämpferdraht: Dis. ... Dr. – Ing. – Stuttgart, UNI, 1980. – 179s.

288. Yanecki S., Vorobiev Yu.S., Kanilo S.P. The numerical analysis of turbomachine blade packet vibration // там же. – P. 291–296.

289. Yang B.D., Chen J.J., Meng C.H. Prediction of resonant response of shrouded blades with three-dimensional shroud constraint // Trans. ASME. J. Eng. Gas Turbines and Power. – 199. – 121, №3. – P. 523–529.

290. Yang T., Botkin M. A. A modular approach for threedementional shape optimization of structures // AIAA Journal. – 1987. – V.25, №3. – P. 492–497.

291. Yang B.–D., Meng C.–H. Modeling of friction contact and it's application to the design of shroud contact // Trans. ASME. J. Eng. Gas Turbines and Power. – 1997. – 119, №4. – P. 958–963.

292. Zhang J., Wen—liang W., Xiang—jun C. Natural mode analysis of N blades disc coupled system. Modal synthesis of symmetric structure with conv croup // Acta mech. solida sin., 1984. – N4. – P. 469–481.

293. Zhu Baotion, Wu Houyu Xi'an Jiaotong daxue xuebao // J. Xi'an Jiaotong Univ. – 1999. – 33,№9. – P. 47–49.

294. Косоzubая зубчатая передача. / Айрапетов Э.Л., Апархов В.И., Генкин М.Д., Федосеев Ю.Н., Авторское свидетельство СССР №442329, кл. F16H1/02, опубл. Б. И. № 33, 1974.



295. Косозубая зубчатая передача. / Айрапетов Э.Л., Апархов В.И., Генкин М.Д., Косарев О.И., Авторское свидетельство СССР №700723, кл. F16H1/02, опубл. Б. И. № 44, 1979.

296. Цилиндрическая передача. / Айрапетов Э.Л., Гребенников А.С., Федосеев Ю.Н., Авторское свидетельство СССР №1698530A1, кл. F16H1/08, опубл. Б. И. № 46, 1991.

297. Improvements in or relating to epicyclic gearings. / Stoekicht W.G. Patent of Germany №1. 163. 181, F16 H1/00, 1966.

298. Пинежанинов Ф., Пинежанинов П. Свойства базисных функций // Статьи по методу конечных элементов. – [www.exponenta.ru/soft/Mathemat/pinega/main.asp](http://www.exponenta.ru/soft/Mathemat/pinega/main.asp) (дата обращения : 15.09.2013)

## 8 ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

#### Основные соотношения теории упругости и метода конечных элементов

В соответствии с методом конечных элементов, выбрав в качестве степеней свободы узловые перемещения, с помощью интерполяционной формулы (базисных функций) можно аппроксимировать перемещение любой точки внутри элемента. В технической литературе базисные функции принято называть функциями форм и обозначать матрицу функций форм как  $[N]$ . Тогда интерполирующая формула для перемещений  $\{\delta\}$  запишется в виде:

$$\{\delta\} = [N]\{\delta_e\},$$

где индекс  $e$  (здесь и далее) указывает на принадлежность вектора или матрицы элементу, т.е. мы имеем дело с вектором узловых перемещений по всем степеням свободы КЭ.

Для трехмерного случая перемещения раскладываются по осям  $x, y, z$  и обозначаются соответственно  $u, v, w$ , интерполирующая формула для  $n$ -узлового КЭ может быть записана в виде:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \dots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} = [N]\{\delta_e\}.$$

Соотношения, связывающие деформации произвольной внутренней точки конечного элемента и узловые перемещения, записываются следующим образом:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & & & & & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ & \frac{\partial N_1}{\partial y} & & & & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ & & \frac{\partial N_1}{\partial z} & & & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & & & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ & & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & & \frac{\partial N_n}{\partial z} & & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \dots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix}$$

или  $\{\varepsilon\} = [B]\{\delta_e\},$

где  $[B]$  – матрица связи узловых перемещений и деформации. В этой матрице не учтены члены высшего порядка малости, т.е. речь идет о линейной постановке задачи. При небольших перемещениях мы получаем вполне корректные результаты.

Деформации  $\{\varepsilon\}$  и напряжения  $\{\sigma\}$  связаны соотношением:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\},$$

где  $[D]$  – матрица упругости в общем случае зависит от свойств материала.

Для изотропного материала, например, с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , матрица упругости примет следующий вид:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Таким образом, имея функции форм, соответствующим образом продифференцировав их, а также зная матрицу упругости материала, можно записать основные соотношения теории упругости для конечного элемента:

$$\begin{cases} \{\delta\} = [N]\{\delta_e\} \\ \{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} \\ \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \end{cases}$$

с определенными выше матрицами  $[N]$ ,  $[B]$  и  $[D]$ .

Уравнения, связывающие узловые силы с узловыми перемещениями, можно записать относительно перемещений (уравнения жесткости) или относительно сил (уравнения податливости):

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \text{ или } [f]\{F\} = \{\delta\}, \text{ где}$$

$[K]$  – матрица жесткости,

$\{F\}$  – вектор узловых сил,

$[f]$  – матрица податливости.

При имеющемся векторе перемещений  $\{\delta\}$ , размерность которого равна числу степеней свободы системы, потенциальная и кинетическая энергии запишутся в виде:

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} \{ \delta \}^T [K] \{ \delta \},$$

$$K_{\Sigma} = \frac{1}{2} \{ \dot{\delta} \}^T [M] \{ \dot{\delta} \},$$

причем матрицы жесткости  $[K]$  и масс  $[M]$  являются квадратными и симметричными. Размер этих матриц равен числу степеней свободы всей системы, и вычисляются они путем соответствующей процедуры суммирования соответствующих матриц элементов, которые, в свою очередь, определяются интегральными выражениями:

$$[K_e] = \int_V [B_e]^T [D] [B_e] dV, \quad (\text{П.1})$$

$$[M_e] = \rho \int_V [N_e]^T [N_e] dV. \quad (\text{П.2})$$

К свойству этих матриц можно добавить еще одно: при оптимальной нумерации узлов в системе эти матрицы приобретают ярко выраженный ленточный характер. Все эти свойства эффективно используются в вычислительных алгоритмах [159].

Уравнение движения системы с распределенными по узловым точкам степенями свободы имеет вид:

$$[K] \{ \delta \} + [C] \{ \dot{\delta} \} + [M] \{ \ddot{\delta} \} = \{ F \},$$

где  $[C]$  – матрица демпфирования, а  $\{ F \}$  – суммарный вектор всех действующих на систему сил.

Для рассматриваемых в данной работе систем демпфирование не оказывает существенного влияния на частоту собственных колебаний, поэтому исключив внешние силы, и демпфирование мы получаем уравнение собственных колебаний:

$$[K] \{ \delta \} + [M] \{ \ddot{\delta} \} = 0.$$

Это уравнение будет иметь вещественное периодическое решение

$$\{ \delta \} = \{ \delta_0 \} \cos(\omega t)$$

при выполнении условия

$$[K] - \omega^2 [M] = 0,$$

представляющего собой классическую задачу на собственные значения. Для решения таких задач разработано большое количество различных алгоритмов [27, 92, 156, 160].

При суперэлементном подходе, этот способ был предложен Айронсоном [10] и несколько позднее Гайяном [72], все степени свободы  $\{\delta\}$  необходимо разделить на две части:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix},$$

где перемещения  $\{\delta_2\}$  однозначно выражаются через перемещения  $\{\delta_1\}$ . Переменные  $\{\delta_1\}$  будем называть главными, а  $\{\delta_2\}$  – вспомогательными, тогда

$$\{\delta_2\} = [T]\{\delta_1\} \text{ и } \{\delta\} = [T^*]\{\delta_1\} = \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} \{\delta_1\}, \text{ где} \quad (\text{П.3})$$

$[I]$  – единичная матрица,

$[T]$  – матрица связи главных и второстепенных перемещений.

Уравнение равновесия системы можно представить в блочном виде:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}.$$

Если допустить предположение, что по второстепенным степеням свободы отсутствует нагрузка, в том числе и инерционная, то есть  $F_2=0$ , то из второго уравнения этой системы выразим  $\{\delta_2\}$ :

$$\{\delta_2\} = -[K_{22}]^{-1} [K_{12}]^T \{\delta_1\}.$$

Таким образом, связь главных и второстепенных степеней свободы можно записать в виде:

$$[T] = -[K_{22}]^{-1} [K_{12}]^{-T}. \quad (\text{П.4})$$

Для случая собственных колебаний системы можно записать потенциальную и кинетическую энергию в виде:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} = \frac{1}{2} \{\delta_1\}^T [T^*]^T [K] [T^*] \{\delta_1\} = \frac{1}{2} \{\delta_1\}^T [K^*] \{\delta_1\}, \\
 K &= \frac{1}{2} \{\dot{\delta}\}^T [M] \{\dot{\delta}\} = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_1\}^T [T^*]^T [M] [T^*] \{\dot{\delta}_1\} = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_1\}^T [M^*] \{\dot{\delta}_1\},
 \end{aligned}$$

а уравнение собственных колебаний без учета демпфирования:

$$[K^*] \{\delta_1\} + [M^*] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta_1\} = 0,$$

где

$$[M^*] = [T^*]^T [M] [T^*],$$

$$[K^*] = [T^*]^T [K] [T^*].$$

Таким образом, мы пришли к системе уравнений с меньшим количеством степеней свободы. Решая характеристическое уравнение, записанное в виде:

$$\left[ [K^*] + \omega^2 [M^*] \right] \{\delta_1\} = 0,$$

получим значения собственных частот и формы соответствующих им колебаний, выраженные через главные степени свободы.

Для восстановления перемещений по второстепенным степеням свободы логично было бы использовать соотношение П.3 с учетом П.4, однако соотношение П.4 было выведено в предположении, что второстепенные степени свободы не нагружены. Такой подход получил название статической конденсации. В реальности же к второстепенным степеням свободы должны быть приложены инерционные нагрузки, вызванные смещениями по главным степеням свободы. Для нахождения уточненного решения записывается характеристическое уравнение для полной системы в блочном виде:

$$\left( \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \{0\}.$$

После блочного перемножения второе уравнение разрешается относительно  $\{\delta_2\}$ :

$$\{\delta_2\} = -\left[ [K_{22}] - \omega^2 [M_{22}] \right]^{-1} \left[ [K_{21}] - \omega^2 [M_{21}] \right] \{\delta_1\},$$

в результате чего получаем матрицу связи главных и второстепенных степеней свободы:

$$[T] = -\left[ [K_{22}] - \omega^2 [M_{22}] \right]^{-1} \left[ [K_{21}] - \omega^2 [M_{21}] \right]. \quad (\text{П.5})$$

Решение, полученное таким способом, естественно, будет зависеть от того, насколько удачно производится разделение степеней свободы на главные и второстепенные, поэтому не может быть универсальным. Если амплитуды колебаний по второстепенным степеням свободы минимальны, то влиянием инерционных сил, то есть слагаемыми, содержащими множитель  $\omega^2$ , можно пренебречь и полученное решение является достаточно точным. В противном случае полученное решение можно использовать в качестве начального приближения и, получив с помощью соотношения 2.6 новые матрицы  $[K^*]$  и  $[M^*]$ , итерационным путем уточнить частоту и форму колебаний на этой частоте.

## Приложение 2

### Функции формы используемых элементов

Для записи функций форм вводится локальная система координат  $\xi$ - $\eta$ - $\zeta$  с центром в середине элемента. Координаты нормируются таким образом, чтобы диапазон их значений внутри элемента был в пределах от  $-1$  до  $1$ . Вводятся переменные  $\xi_0 = \xi \xi_i$ ,  $\eta_0 = \eta \eta_i$  и  $\zeta_0 = \zeta \zeta_i$ . Тогда функции формы можно записать следующим образом.

Элемент 3D48:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0) (\xi_0 + \zeta_0 - 1) \quad - \text{ для угловых узлов,}$$



$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad - \text{ для узлов на ребрах при } \xi=0,$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta^2) \quad - \text{ для узлов на ребрах при } \zeta=0.$$

При этом в направлении оси  $O\eta$  имеет место линейная аппроксимация перемещений, а в направлении других осей – квадратичная. Описание данного элемента и тестовые расчеты консольно закрепленных пластин приведены в [41].

Элемент 3D72:

$$N_i = \frac{1}{64}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)[-10 + 9(\xi^2 + \zeta^2)] \quad \text{при } \xi = \pm 1; \eta = \pm 1; \zeta = \pm 1;$$

$$N_i = \frac{9}{64}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 - \zeta^2)(1 + 9\zeta_0) \quad \text{при } \xi = \pm 1; \eta = \pm 1; \zeta = \pm \frac{1}{3};$$

$$N_i = \frac{9}{64}(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_0) \quad \text{при } \xi = \pm \frac{1}{3}; \eta = \pm 1; \zeta = \pm 1.$$

В направлении осей  $O\xi$  и  $O\zeta$  перемещения интерполируются полиномом третьей степени, а в направлении  $O\eta$  – линейным.

Элемент 3D96:

для угловых узлов ( $\xi = \pm 1; \eta = \pm 1; \zeta = \pm 1$ )

$$N_i = \frac{1}{64}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)[9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19],$$

для узлов на ребрах

$$N_i = \frac{9}{64}(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_0) \quad \text{при } \xi = \pm \frac{1}{3}; \eta = \pm 1; \zeta = \pm 1;$$

$$N_i = \frac{9}{64}(1 + \xi_0)(1 + \zeta_0)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta_0) \quad \text{при } \xi = \pm 1; \eta = \pm \frac{1}{3}; \zeta = \pm 1;$$

$$N_i = \frac{9}{64}(1 + \xi_0)(1 + \zeta_0)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta_0) \quad \text{при } \xi = \pm 1; \eta = \pm \frac{1}{3}; \zeta = \pm 1.$$

## Исходный текст блока расчета матриц для элемента со смешанной линейно-кубической аппроксимацией перемещений

```

      SUBROUTINE SAVE_72 (NE, FLAG, CORD, NOP)
LOGICAL FLAG
      COMMON/NTAPE/NT1, NT2, NT3, NT4
      DIMENSION ESTIFM(72, 72), ESMATM(72, 72), CORD(1), NOP(1)
      REWIND NT3
      REWIND NT4
      DO 400 N=1, NE
      PRINT 106, N
      CALL IQT372 (N, ESTIFM, ESMATM, FLAG, CORD, NOP)
      WRITE (NT3) ESTIFM, ESMATM
      WRITE (NT4) ESTIFM, ESMATM
106  FORMAT(70X, I3)
400  CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE IQT372 (N, ESTIFM, ESMATM, FLAG, CORD, NOP)
LOGICAL FLAG

COMMON/CONTR/NP, NE, NB, NDF, NCN, NSZF, CMY, XMAS, YMAS, RO, ZMAS, EMAT
      COMMON/NTAPE/NT1, NT2, NT3, NT4
      DIMENSION
ESTIFM(72, 72), ESMATM(72, 72), XX(4), SKK(4), YY(2), BB(24),
*CC(24), DD(24), ES(6, 6), B(72, 72), C(72, 72), EST(72, 72), E(72, 72),
*CORD(NP, NDF), NOP(NE, NCN)
C   весовые коэффициенты для численного интегрирования
      DATA SKK/.3478548, .6521451, .6521451, .3478548/,
C   весовые координаты для точек разбиения по оси y = 1
C   координаты точек интегрирования
      1  XX/-.8611363, -.3399810, .3399810, .8611363/
      2  YY/-0.557735, 0.557735 /
      AREAS=0.
      IX=NOP(N, 1)
      DO 10 J=1, NCN
      IY=NOP(N, J)
      BB(J) = (CORD(IY, 1) - CORD(IX, 1)) * XMAS
      CC(J) = (CORD(IY, 2) - CORD(IX, 2)) * YMAS
10  DD(J) = (CORD(IY, 3) - CORD(IX, 3)) * ZMAS
      ESTIFM=0.
      ESMATM=0.
      ES = 0.
      E1=(1. - CMY) / ((1. + CMY) * (1. - 2. * CMY))
      ES(1, 1)=E1
      ES(1, 2)=E1*CMY/(1. - CMY)
      ES(1, 3)=ES(1, 2)
      ES(2, 1)=ES(1, 2)
      ES(2, 2)=E1
      ES(2, 3)=ES(1, 2)
      ES(3, 1)=ES(1, 2)
      ES(3, 2)=ES(1, 2)
      ES(3, 3)=E1
      G=E1*(1 - 2.*CMY)/(2.*(1 - CMY))
      ES(4, 4)=G
      ES(5, 5)=G

```

```

      ES(6,6)=G
      ESS=1.E-20
      DO 50 IX=1,4
      X=XX(IX)
      DO 50 IY=1,2
      Y=YY(IY)
      DO 50 IZ=1,4
      Z=XX(IZ)
      CALL ISOQ72(X,Y,Z,AREA,BB,CC,DD,EST,E)
      IF(AREA.GT.ESS) GOTO 230
      WRITE(NT2,23) AREA,N,X,Y,Z
23  FORMAT(5X,'  Det = ',E12.5,'  Nelem = ',I5,'  COORD : ',
*      ' X=',F7.3,'  Y=',F7.3,'  Z=',F7.3)
230 CONTINUE
      CALL DDTED(C,EST,ES,72,6,72,72,6,B)
      A1=AREA*SKK(IX)*SKK(IZ)
      AREAS=AREAS+A1
      A2=A1*RO/981.
      DO 48 I=1,72
      DO 48 J=I,72
      ESTIFM(I,J)=ESTIFM(I,J)+C(I,J)*A1 * EMAT
      ESMATM(I,J)=ESMATM(I,J)+E(I,J)*A2
48 CONTINUE
50 CONTINUE
      DO 65 I=1,71
      DO 65 J=I+1,72
      ESTIFM(J,I)=ESTIFM(I,J)
      ESMATM(J,I)=ESMATM(I,J)
65 CONTINUE
      write(NT2,103)N,AREAS
      print 103,N,AREAS
C      Poljarwinckeln
C Преобразование в полярную систему координат
IF(FLAG) THEN
      DO 1101 J=1,NCN
      I=NOP(N,J)
1101  DD(J)=ATAN(CORD(I,2)/CORD(I,3))

C      Ubergatg in Poljarcoordinatsystem
      DO 1103 I=1,72
      DO 1102 J=1,72
1102  B(I,J)=0.
1103  B(I,I)=1.
      DO 1104 J=1,NCN
      I=(J-1)*NDF +2
      B(I ,I )= COS(DD(J))
      B(I ,I+1)= SIN(DD(J))
      B(I+1,I )=-SIN(DD(J))
      B(I+1,I+1)= COS(DD(J))
1104  CONTINUE
      CALL TMT(B,ESTIFM,72,72,C)
      CALL TMT(B,ESMATM,72,72,C)
ENDIF
      RETURN
C 220 WRITE(6,100)N
C 100 FORMAT(5X,'  Nelem = ',I4,'  ASRK4 Subr. IQT372')
103 FORMAT(1X,5X,'Nelem = ',I3,5X,'  Velem = ',E12.5)
      STOP
      END

```

```

SUBROUTINE ISOQ72(X,Y,Z,VOL,B,C,D,ERG,A)

```

```

COMMON/CONTR/NP,NE,NB,NDF,NCN,NSZF,CMY,XMAS,YMAS,RO,ZMAS,EMAT
DIMENSION AA(3,24),L(3),M(3),ERG(72,72),A(72,72)

```

```

        DIMENSION S(3,3),B(1),C(1),D(1),ANI(24),AB(3,72)
NSTIF=72
C   Определение матрицы AB=N (Ф.формы в точке интегрирования)
    AB = 0.
    CALL NFOR72(X,Y,Z,ANI)
    DO 30 I=1,NCN
        II=(I-1)*3+1
        AB(1,II)=ANI(I)
        AB(2,II+1)=ANI(I)
30   AB(3,II+2)=ANI(I)
C   Определение A=Nт*N в (.) интегрирования
    DO 40 I=1,NSTIF
        DO 40 J=1,NSTIF
            A(I,J)=0.
            DO 40 K=1,3
40   A(I,J)=A(I,J)+AB(K,I)*AB(K,J)
C   Определение производных функций формы по естественным коорди-
натам
    CALL GRAD72(X,Y,Z,AA)
C   Определение матрицы [J]
    DO 45 I=1,3
        DO 45 J=1,3
45   S(I,J)=0.
        DO 46 J=1,NCN
            S(1,1)=S(1,1)+AA(1,J)*B(J)
            S(1,2)=S(1,2)+AA(1,J)*C(J)
            S(1,3)=S(1,3)+AA(1,J)*D(J)
            S(2,1)=S(2,1)+AA(2,J)*B(J)
            S(2,2)=S(2,2)+AA(2,J)*C(J)
            S(2,3)=S(2,3)+AA(2,J)*D(J)
            S(3,1)=S(3,1)+AA(3,J)*B(J)
            S(3,2)=S(3,2)+AA(3,J)*C(J)
46   S(3,3)=S(3,3)+AA(3,J)*D(J)
        CALL MINV(S,3,VOL,L,M,.TRUE.)
C   обратный переход к глобальным координатам
    AB = 0.
    DO 60 I=1,NCN
        II=(I-1)*3+1
        AB(1,II )=S(1,1)*AA(1,I)+S(1,2)*AA(2,I )+S(1,3)*AA(3,I )
        AB(2,II+1)=S(2,1)*AA(1,I)+S(2,2)*AA(2,I )+S(2,3)*AA(3,I )
60   AB(3,II+2)=S(3,1)*AA(1,I)+S(3,2)*AA(2,I )+S(3,3)*AA(3,I )
C   Определение матрицы градиентов ERG=B
    ERG = 0.
    DO 70 I=1,3
        DO 70 J=1,NSTIF
70   ERG(I,J)=AB(I,J)
        J=NCN*3-2
        DO 80 I=1,J,3
            ERG(4,I )=ERG(2,I+1)
            ERG(4,I+1)=ERG(1,I )
            ERG(5,I )=ERG(3,I+2)
            ERG(5,I+2)=ERG(1,I)
            ERG(6,I+1)=ERG(3,I+2)
80   ERG(6,I+2)=ERG(2,I+1)
        RETURN
    END

SUBROUTINE GRAD72(X,Y,Z,AA)
DIMENSION AA(3,24)
C   Определение производных функций формы по естественным коорди-
натам
    E = 1.
    X1=E-X
    X2=E+X

```

```

Y1=E-Y
Y2=E+Y
Z1=E-Z
Z2=E+Z
X22=E-X*X
Z22=E-Z*Z

```

C Определение  $dN/dx$

```

F1=(10.+18.*X-27.*X*X-9.*Z*Z)/64.
F2=(-10.+18.*X+27.*X*X+9.*Z*Z)/64.
AA(1, 1)= Y1 *Z1 *F1
AA(1, 4)= Y1 *Z1 *F2
AA(1, 5)= Y2 *Z1 *F2
AA(1,08)= Y2 *Z1 *F1
AA(1,17)= Y1 *Z2 *F1
AA(1,20)= Y1 *Z2 *F2
AA(1,21)= Y2 *Z2 *F2
AA(1,24)= Y2 *Z2 *F1
F1=9.*(1.-3.*Z)*Z22/64.
F2=9.*(1.+3.*Z)*Z22/64.
AA(1,10)= Y1*F1
AA(1,14)= Y1*F2
AA(1,11)= Y2*F1
AA(1,15)= Y2*F2
AA(1, 9)= -AA(1,10)
AA(1,13)= -AA(1,14)
AA(1,12)= -AA(1,11)
AA(1,16)= -AA(1,15)
F1=9.*(-2.*X-3.+9.*X*X)/64.
F2=9.*(-2.*X+3.-9.*X*X)/64.
AA(1, 2)= Y1 * Z1 *F1
AA(1, 3)= Y1 * Z1 *F2
AA(1, 7)= Y2 * Z1 *F1
AA(1, 6)= Y2 * Z1 *F2
AA(1,18)= Y1 * Z2 *F1
AA(1,19)= Y1 * Z2 *F2
AA(1,23)= Y2 * Z2 *F1
AA(1,22)= Y2 * Z2 *F2

```

C Определение  $dN/dy$

```

F1=(-10.+9.*(X*X+Z*Z))/64.
F2=F1*Z2
F1=F1*Z1
AA(2, 5)= F1 * X2
AA(2, 8)= F1 * X1
AA(2,21)= F2 * X2
AA(2,24)= F2 * X1
AA(2, 4)= -AA(2, 5)
AA(2, 1)= -AA(2, 8)
AA(2,20)= -AA(2,21)
AA(2,17)= -AA(2,24)
F1=Z22*(1.-3.*Z)*9./64.
F2=Z22*(1.+3.*Z)*9./64.
AA(2,12)= F1 * X1
AA(2,16)= F2 * X1
AA(2,11)= F1 * X2
AA(2,15)= F2 * X2
AA(2, 9)= -AA(2,12)
AA(2,13)= -AA(2,16)
AA(2,10)= -AA(2,11)
AA(2,14)= -AA(2,15)
F1=9.*X22*(1.-3.*X)/64.
F2=9.*X22*(1.+3.*X)/64.
AA(2, 6)= F2 * Z1
AA(2, 7)= F1 * Z1
AA(2,22)= F2 * Z2

```

```

AA(2,23)= F1 * Z2
AA(2, 3)= -AA(2, 6)
AA(2, 2)= -AA(2, 7)
AA(2,19)= -AA(2,22)
AA(2,18)= -AA(2,23)
C   Определение dN/dz
      F1=(10.+18.*Z-9.*X*X-27.*Z*Z)/64.
      F2=(-10.+18.*Z+9.*X*X+27.*Z*Z)/64.
AA(3, 1)= X1 *Y1 * F1
AA(3, 4)= X2 *Y1 * F1
AA(3, 5)= X2 *Y2 * F1
AA(3, 8)= X1 *Y2 * F1
AA(3,17)= X1 *Y1 * F2
AA(3,20)= X2 *Y1 * F2
AA(3,21)= X2 *Y2 * F2
AA(3,24)= X1 *Y2 * F2
      F1=9.*(-3.-2.*Z+9.*Z*Z)/64.
      F2=9.*(3.-2.*Z-9.*Z*Z)/64.
AA(3, 9)= X1 * Y1 * F1
AA(3,13)= X1 * Y1 * F2
AA(3,12)= X1 * Y2 * F1
AA(3,16)= X1 * Y2 * F2
AA(3,10)= X2 * Y1 * F1
AA(3,14)= X2 * Y1 * F2
AA(3,11)= X2 * Y2 * F1
AA(3,15)= X2 * Y2 * F2
      F1=9.*X22*(1.-3.*X)/64.
      F2=9.*X22*(1.+3.*X)/64.
AA(3,18)= Y1 * F1
AA(3,19)= Y1 * F2
AA(3,22)= Y2 * F2
AA(3,23)= Y2 * F1
AA(3, 2)= -AA(3,18)
AA(3, 3)= -AA(3,19)
AA(3, 6)= -AA(3,22)
AA(3, 7)= -AA(3,23)
RETURN
      END

SUBROUTINE NFOR72(X,Y,Z,AA)
DIMENSION AA(1)
E=1.
X1=E-X
X2=E+X
Y1=E-Y
Y2=E+Y
Z1=E-Z
Z2=E+Z
      A=(9.*(X*X+Z*Z)-10.)/64.
      F1=A*Z1
      F2=A*Z2
AA( 1) = X1 * Y1 * F1
AA( 4) = X2 * Y1 * F1
AA( 5) = X2 * Y2 * F1
AA( 8) = X1 * Y2 * F1
AA(17) = X1 * Y1 * F2
AA(20) = X2 * Y1 * F2
AA(21) = X2 * Y2 * F2
AA(24) = X1 * Y2 * F2
      F1=9.*(E-Z*Z)/64.
      F2=F1*(E+3.*Z)
      F1=F1*(E-3.*Z)
AA( 9) = F1 * X1 * Y1
AA(13) = F2 * X1 * Y1

```



```

C если FLAG = .TRUE. и не определяющая если FLAG = .FALSE.
  LOGICAL FLAG
  DIMENSION A(1),L(1),M(1)
  D=1.
  NK=-N
  DO 80 K=1,N
  NK=NK+N
  L(K)=K
  M(K)=K
  KK=NK+K
  BIGA=A(KK)
  DO 20 J=K,N
  IZ=N*(J-1)
  DO 20 I=K,N
  IJ=IZ+I
  IF(ABS(BIGA)-ABS(A(IJ)).GE.0.) GO TO 20
  BIGA=A(IJ)
  L(K)=I
  M(K)=J
20 CONTINUE
  J=L(K)
  IF(J-K.LE.0) GO TO 35
  KI=K-N
  DO 30 I=1,N
  KI=KI+N
  HOLD=-A(KI)
  JI=KI-K+J
  A(KI)=A(JI)
30 A(JI)=HOLD
35 I=M(K)
  IF(I-K.LE.0) GO TO 45
  JP=N*(I-1)
  DO 40 J=1,N
  JK=NK+J
  JI=JP+J
  HOLD=-A(JK)
  A(JK)=A(JI)
40 A(JI)=HOLD
45 IF(ABS(BIGA).GT.0.) GO TO 48
  D=0.
  RETURN
48 DO 55 I=1,N
  IF(I-K.EQ.0) GO TO 55
  IK=NK+I
  A(IK)=A(IK)/(-BIGA)
55 CONTINUE
  DO 65 I=1,N
  IK=NK+I
  HOLD=A(IK)
  IJ=I-N
  DO 65 J=1,N
  IJ=IJ+N
  IF(I-K.EQ.0) GO TO 65
  IF(J-K.EQ.0) GO TO 65
  KJ=IJ-I+K
  A(IJ)=HOLD*A(KJ)+A(IJ)
65 CONTINUE
  KJ=K-N
  DO 75 J=1,N
  KJ=KJ+N
  IF(J-K.EQ.0) GO TO 75
  A(KJ)=A(KJ)/BIGA
75 CONTINUE
  IF(FLAG) D=D*BIGA

```



```

      A(KK)=1./BIGA
80  CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE MINV2(A,N,L,M)
      DIMENSION A(1),L(1),M(1)
      K=N
100  K=K-1
      IF(K.LE.0) GO TO 150
      I=L(K)
      IF(I-K.LE.0) GO TO 120
      JQ=N*(K-1)
      JR=N*(I-1)
      DO 110 J=1,N
      JK=JQ+J
      HOLD=A(JK)
      JI=JR+J
      A(JK)=-A(JI)
110  A(JI)=HOLD
120  J=M(K)
      IF(J-K.LE.0) GO TO 100
      KI=K-N
      DO 130 I=1,N
      KI=KI+N
      HOLD=A(KI)
      JI=KI-K+J
      A(KI)=-A(JI)
130  A(JI)=HOLD
      GO TO 100
150  CONTINUE
      RETURN
      END

```